

BLATT 6
(18.11.2025)

Aufgabe 1 (4 Punkte).

Entscheiden Sie (ohne Beweis), ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	Wahr	Falsch
$n^4 = O(n^5)$		
$5n + 6n^2 + 200n^3 = O(n^3)$		
$3^n = o(n^3)$		
$n^2 = O(n \log(n))$		
$O(f) + O(g) = O(f + g)$		
$O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$		
Falls $f = O(g)$ und $g = O(h)$, dann auch $f = O(h)$		
Es ist $f \neq O(g)$ genau dann, wenn $g = o(f)$		

Aufgabe 2 (4 Punkte).

Gegeben sei eine nichtdeterministische Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, b, q_0, q_{ab}, S, F, \delta)$ die folgendermaßen partiell beschrieben¹ ist:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_{ab}\}$, $S = \{q_2, q_{ab}\}$, $F = \{q_2\}$,
- $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{b\}$,
- $\delta((q_0, b)) = \{(q_0, 0, R), (q_1, 1, R), (q_2, b, L)\}$ und $\delta((q_1, b)) = \{(q_1, 0, R), (q_2, b, L)\}$.

Geben Sie alle Wörter an, die auf das Band geschrieben werden können, wenn M auf das leere Wort angesetzt wird und nach spätestens fünf Schritten den Endzustand q_2 erreicht.

Rückseite beachten!

¹Nach Skript muss δ auf ganz $(Q \setminus S) \times \Gamma$ definiert sein. Dies wird in der Aufgabe nicht gemacht. Man spricht von einer partiellen Definition. Für diese Aufgabe genügt die partielle Definition, da bei Eingabe des leeren Wortes die Turingmaschine M nur in die definierten Situationen (q_0, b) und (q_1, b) kommt.

Partielle Definitionen sind übersichtlicher, aber dafür sind sie im Allgemeinen nicht für jede Eingabe definiert. Im Falle der Aufgabe ist lediglich das leere Wort als Eingabe erlaubt! Warum?

Online Abgaben werden nur in PDF-Form bewertet.

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten in der Technischen Fakultät mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Donnerstag, den 27.11.2025, 10 Uhr.

Aufgabe 3 (4+(2*) Punkte²).

Eine natürliche Zahl ist eine Primzahl, wenn sie genau zwei Teiler besitzt. (Inbesondere ist 1 keine Primzahl). Für alle $n \in \mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definieren wir einen ungerichteten Graphen $G_n = (V_n, E_n)$ durch

$$V_n = \{m \in \mathbb{N}^+ \mid m \text{ teilt } n\} \quad \text{und}$$

$$E_n = \left\{ \{k, m\} \mid \left((k \text{ teilt } m \text{ und } \frac{m}{k} \text{ ist eine Primzahl}) \text{ oder } \left(m \text{ teilt } k \text{ und } \frac{k}{m} \text{ ist eine Primzahl} \right) \right) \right\}.$$

a) Zeichnen Sie G_{12} und G_{16} .

b) Seien nun $m, n \in \mathbb{N}^+$ und m teile n . Ist dann G_m immer ein Teilgraph von G_n , d.h. ist immer $V_m \subseteq V_n$ und $E_m \subseteq E_n$?

Bonusaufgabe zum Knobeln (2 Bonuspunkte)*

Ein Pfad p in G_n ist eine Folge von paarweise verschiedenen Knoten, sodass nacheinanderfolgende Knoten mit einer Kante verbunden sind, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ und für alle $0 \leq i < m$ Knoten $v_i \in V_n$ mit $p = (v_0, v_1, \dots, v_{(m-1)})$ und für alle $0 \leq i \neq j < m$ gilt $v_i \neq v_j$ und für alle $0 \leq i < m - 1$ gilt $\{v_i, v_{i+1}\} \in E_n$. (Nach dieser Definition gibt es also einen leeren Pfad und Pfade der Form (v_0) .)

c) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für $n \in \mathbb{N}^+$ an, damit G_n die folgende Eigenschaft hat:

Es gibt zwei verschiedene Knoten in G_n , die mit einem *eindeutigen* Pfad in G_n verbunden sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte).

Sei Σ eine endliche Menge und S und S' Turing-berechenbare Teilmengen von Σ^* . Sind dann auch die Mengen $\Sigma^* \setminus S$, $S \cup S'$ und $S \cap S'$ berechenbar?

Hinweis: Nutzen Sie die Aufgabe 2 von Blatt 5. Sie dürfen natürlich Buchstaben zum Alphabet hinzufügen, diese können nützlich sein, um sich Stellen zu merken oder um Grenzen zu setzen.

²Punkte, die mit einem Stern gekennzeichnet sind, sind Bonuspunkte.

Online Abgaben werden nur in PDF-Form bewertet.

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten in der Technischen Fakultät mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Donnerstag, den 27.11.2025, 10 Uhr.