

BLATT 8
(02.12.2025)

Aufgabe 1 (4 Punkte).

Es sei $\tau = \{R, P, f, g, c\}$ eine Symbolmenge, die aus dem 2-stelligen Relationszeichen R , dem 1-stelligen Relationszeichen P , dem 2-stelligen Funktionszeichen f , dem 1-stelligen Funktionszeichen g und aus dem Konstantenzeichen c besteht.

Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke $\mathcal{L}(\tau)$ -Formeln sind und welche nicht. Sie müssen dabei keine Begründung angeben.

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a) fv_1c | e) $\forall xRyz$ |
| b) $gv_1 = c$ | f) $Rv_1gc = gv_7c$ |
| c) $Rcfv_1c$ | g) $(\exists x(Pc \wedge Rcx) \wedge \forall x(\neg Pc \vee \neg Rcx))$ |
| d) $(Pc \leftrightarrow fv_1v_2)$ | h) $\forall v_1(Pv_1 \rightarrow (\exists v_1\neg Pv_1 \vee \exists v_1Rgv_1v_1fv_2))$ |

Aufgabe 2 (4 Punkte).

Bestimmen Sie, ohne Beweis, die Menge der freien Variablen für die folgenden $\mathcal{L}(\tau)$ -Formeln.

- $Rcv_1 \rightarrow \exists v_2fv_2c = v_1$
- $\exists v_2(\forall v_1Pc \rightarrow Rv_1v_2) \wedge fv_1v_2 = c$
- $\exists x(\forall y\forall z(gx = fyz \rightarrow (Px \wedge Ryz)) \wedge fgxgx \neq c)$
- $\forall v_0\exists v_1(((gv_0 = c \wedge Pv_1) \rightarrow \exists v_0fv_0v_0 = gv_0)) \leftrightarrow (\forall v_2Rv_1v_2 \vee Pv_2)$
sollte richtig heißen $\forall v_0\exists v_1((gv_0 = c \wedge Pv_1) \rightarrow \exists v_0fv_0v_0 = gv_0) \leftrightarrow (\forall v_2Rv_1v_2 \vee Pv_2)$. Am Ergebnis macht die doppelte Klammerung keinn Unterschied.

Aufgabe 3. Sei $\tau' = \{p, m, c\}$ eine Symbolmenge, die aus den 2-stelligen Funktionszeichen p und m sowie dem Konstantenzeichen c besteht.

Weiter sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 1)$ die $\mathcal{L}(\tau')$ -Struktur, welche als Universum die natürlichen Zahlen \mathbb{N} hat und in der die Interpretation $p^{\mathcal{N}}$ von p die Addition, $m^{\mathcal{N}}$ die Multiplikation und $c^{\mathcal{N}} = 1$ ist. Wir definieren eine Belegung $s : \{v_0, v_1, \dots\} \rightarrow \mathcal{N}$ durch $s(v_i) := i$.

- Berechnen Sie für $i \in \{0, 1, 2\}$ die Auswertungen $\bar{s}(t_i)$ der folgenden $\mathcal{L}(\tau')$ -Terme:

- $t_1 = pv_1mv_1pcv_1$
- $t_2 = mpccv_2$
- $t_3 = mv_3v_1$

- Finden Sie Belegungen s_0, s_1 so, dass folgendes gilt:

- $(\mathcal{N}, s_0) \models (t_1 \neq t_2 \wedge (t_1 \neq t_3 \wedge t_2 \neq t_3))$
- $(\mathcal{N}, s_1) \models (t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3)$

Rückseite beachten!

Online Abgaben werden nur in PDF-Form bewertet.

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten in der Technischen Fakultät mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Donnerstag, den 11.12.2025, 10 Uhr.

Aufgabe 4 (4 Punkte).

Beweisen Sie die folgenden Aussagen oder widerlegen Sie sie durch ein Beispiel

- a) Keine Formel ist ein echtes Endstück einer anderen Formel.
- b) Jedes nicht-leere Endstück eines Terms lässt sich eindeutig als eine endliche Folge von Termen schreiben.

Online Abgaben werden nur in PDF-Form bewertet.

Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten in der Technischen Fakultät mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Donnerstag, den 11.12.2025, 10 Uhr.