BLATT 09

(09.12.2025)

Erinnerung. Eine Äquivalenzrelation ist eine binäre Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Eine binäre Relation ist ...

- reflexiv, falls für jedes Element x gilt, dass (x, x) in der Relation ist,
- symmetrisch, für alle Elemente x, y die Implikation „wenn (x, y) in der Relation ist, so ist auch (y, x) in der Relation" gilt, und
- transitiv, falls für alle Elemente x, y, z die folgende Implikation gilt: „(x, y) und (y, z) sind in der Relation impliziert, dass auch (x, z) in der Relation ist".

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Es sei $\tau = \{E\}$ mit einer zweistelligen Relation E. Formalisieren Sie die folgenden in Worten geschriebenen Aussagen als $\mathcal{L}(\tau)$-Sätze[1].

a) Die Relation E ist eine Äquivalenzrelation.

Sei $n \in \mathbb{N}^+$ beliebig.

b) Es existiert mindestens eine Äquivalenzklasse von E mit mindestens n Elementen.

c) Es existiert mindestens eine Äquivalenzklasse von E mit genau n Elementen.

d) Es existiert genau eine Äquivalenzklasse von E mit genau n Elementen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Es sei nun $\tau = \{R\}$ mit einer zweistelligen Relation R. Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, wobei wie immer V die Menge der Knoten und E hier die Menge der Kanten ist, lässt sich auf natürliche Art als $\mathcal{L}(\tau)$-Struktur $\mathcal{G}$ mit Universum V auffassen, in dem man $R^{\mathcal{G}}$ durch $\{(v, w) : \{v, w\} \in E\}$ interpretiert. Beschreiben Sie in Worten, welche Graphen die folgenden $\mathcal{L}(\tau)$-Sätze[1] erfüllen, und zeichnen Sie jeweils einen erfüllenden und einen nicht erfüllenden Graphen.

a) $\forall x \exists y \exists z(\neg Rxy \wedge Rxz)$

b) $\exists x \exists y \exists z(\neg y = z \wedge Rxy \wedge Rxz \wedge \forall w(Rxw \to (w = y \vee w = z)))$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei nun τ eine beliebige Sprache und seien φ und ψ $L(\tau)$-Formeln.

a) Beweisen Sie das folgende Quantorengesetz: $\exists v_i(\varphi \wedge \psi) \models (\exists v_i \varphi \wedge \exists v_i \psi)$

b) Belegen Sie mit einem Beispiel, dass $(\exists v_i \varphi \wedge \exists v_i \psi) \not\models \exists v_i(\varphi \wedge \psi)$

c) Sei nun v_i nicht frei in φ. Zeigen Sie, dass $\exists v_i(\varphi \wedge \psi) \models (\exists v_i \varphi \wedge \exists v_i \psi)$ und $(\exists v_i \varphi \wedge \exists v_i \psi) \models \exists v_i(\varphi \wedge \psi)$

Bonus (2 Punkte)* Überlegen Sie sich, was passiert, wenn die $\wedge$ in den Teilaufgaben durch $\vee$ ersetzt werden.

Rückseite beachten!

Online Abgaben werden nur in PDF-Form bewertet.
Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten in der Technischen Fakultät mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Donnerstag, den 18.12.2025, 10 Uhr.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Es sei nun $\tau = \{0, 1, +, \cdot, P, G\}$ mit zwei Konstanten 0 und 1, zwei zweistelligen Funktionen + und · sowie zwei einstelligen Relationen P, G. Ferner sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, \mathbb{P}, 2\mathbb{N})$ die $\mathcal{L}(\tau)$-Struktur, in der 0, 1, + und · wie üblich, P durch die Primzahlen $\mathbb{P}$ und G durch die geraden Zahlen $2\mathbb{N}$ interpretiert werden. Formalisieren Sie die *Goldbach'sche Vermutung* als $\mathcal{L}(\tau)$-Aussage[1]: Jede gerade Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen.

Bonus (4 Punkte):* Es sei $\tau' = \{+, \cdot\}$ und $\mathcal{N}' = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ die $\mathcal{L}(\tau')$-Struktur in der + und · wie üblich interpretiert werden. Können Sie die Goldbach'sche Vermutung auch als $\mathcal{L}(\tau')$-Aussage formalisieren?

[1] $\mathcal{L}(\tau)$-Sätze werden auch $\mathcal{L}(\tau)$-Aussagen genannt

Online Abgaben werden nur in PDF-Form bewertet.
Abgabe per Ilias oder in den (richtigen) Übungsaufgaben-Briefkasten in der Technischen Fakultät mit Namen und Nummer der Übungsgruppe bis Donnerstag, den 18.12.2025, 10 Uhr.