Probeklausur zur Vorlesung
Logik für Studierende der Informatik
vom Wintersemester 2025/26

Bearbeitungszeit: 2 Stunden.
Diese Probeklausur ist nur für die persönliche Vorbereitung zur Klausur gedacht. Sie wird nicht korrigiert und zählt nicht zu den regulären Übungsblättern.

Zur „echten” Klausur: Eine sehr gute Note gibt es etwa bei 80% der Punkte. Bei den offenen Fragen gibt richtiges Raten ohne Begründung schon einen Punkt. Eine falsche Entscheidung gibt keinen Abzug, schreiben Sie also Ihre Intuition nieder. Sie dürfen einen Spickzettel mitbringen. Sie können ja bei der Probeklausur erst mal ohne Nachschlagen probieren und dann immer mehr Hilfsmittel zu Rate ziehen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
Punkte maximal	6	10	6	4	8	6	8	6	6	60

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Entscheiden Sie ohne Beweis, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	Wahr	Falsch
Die aussagenlogischen Formeln $((A_0 \vee (A_1 \leftrightarrow A_2)) \wedge (A_2 \vee \neg A_0))$ und $(\neg A_2 \rightarrow \neg(A_0 \vee A_1))$ sind äquivalent zueinander.		
Zu jeder aussagenlogischen Formel φ existiert genau eine äquivalente Formel ψ in DNF.		
Eine Formel ohne doppelte Negation mit genau n binären Junktoren hat eine Länge von höchstens $4n+1$.		
Es gibt Eine Turingmaschine die $A = \{0^n 1^n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{0,1\}^*$ entscheidet		
Die Menge der gerichteten Graphen mit einen Pfad zwischen zwei gegebenen Knoten $PFAD$ ist NP-vollständig.		
Für beliebiges τ ist kein $\mathcal{L}(\tau)$-Term ein Anfangsstück eines anderen $\mathcal{L}(\tau)$-Terms.		

Aufgabe 2. (10 Punkte)
Für diese Aufgabe sind keine Begründungen notwendig!

1. Für welche aussagenlogische Formel ist $\top$ eine Abkürzung?

2. Geben Sie eine der de Morgan'schen Regeln an.

3. Schreiben Sie die Formel $((A \vee B) \to \neg C)$ in polnischer Notation.

4. Wann ist eine Menge X abzählbar?

5. Geben Sie die Menge Σ^* für ein endliches Alphabet Σ an.

6. Wie ist die Komplexizitätsklasse P definiert?

7. Was bedeutet es für eine Menge M Turing-berechenbar zu sein?

8. Geben Sie den Zielbereich der Übergangsfunktion δ einer nicht deterministischen Turingmaschine $(Q, \Sigma, \Gamma, b, q_0, q_{ab}, S, F, \delta)$ an.

9. Geben Sie ein Beispiel für eine nicht-atomare $\mathcal{L}(\tau)$-Formel für eine Formelmenge τ Ihrer Wahl an.

10. Wie heißen die Quantoren der Prädikatenlogik und wie sehen die Zeichen dafür aus?

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Entscheiden Sie ohne Beweis, ob die folgenden aussagenlogischen Formeln Tautologien, erfüllbar aber keine Tautologie oder nicht erfüllbar sind.

1. $(A_0 \to A_1) \vee (A_1 \to A_2)$

2. $((A_0 \vee A_2) \to (A_1 \wedge \neg A_2))$

3. $((A_0 \to A_1) \wedge \neg(A_1 \vee \neg A_0))$

4. $(\neg(A_0 \to A_1) \to (A_1 \vee A_0))$

5. $((A_0 \leftrightarrow A_1) \to ((A_0 \vee A_1) \wedge \neg(A_1 \wedge A_2)))$

6. $(((A_0 \leftrightarrow A_1) \leftrightarrow A_2) \wedge A_0) \wedge \neg A_2)$

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Die folgende Tabelle zeigt die Wahrheitswertverläufe von zwei aussagenlogischen Formeln φ und ψ:

A_0	A_1	A_2	φ	ψ
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

1. Geben Sie eine zu ψ äquivalente Formel in DNF an.

2. Geben Sie eine zu $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ äquivalente Formel in KNF an.

3. Geben Sie eine zu $(\varphi \rightarrow \psi)$ äquivalente Formel in DNF an.

4. Geben Sie eine zu $\neg(\varphi \vee \psi)$ äquivalente Formel in KNF an.

Aufgabe 5. (8 Punkte)

1. Was besagt der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik?

2. Sei $A \subseteq \{0,1\}^*$ eine unendliche Menge von Wörtern. Zeigen Sie, dass es eine unendliche Folge von Wörtern $w_0, w_1, w_2, \ldots$ gibt, so dass jedes w_i ein Anfangsstück von w_{i+1} und von mindestens einem Wort aus A ist.

Aufgabe 6. (6 Punkte)
Es sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{ak}, q_{ab})$ die folgende Turingmaschine:

- $Q = \{q_0, q_{ak}, q_{ab}\}$,
- $\Sigma = \{0, 1\}$,
- $\Gamma = \{0, 1, b\}$,
- $\delta(q_0, 0) = (q_0, 1, R)$,
  $\delta(q_0, 1) = (q_{ak}, 0, R)$,
  $\delta(q_0, b) = (q_{ak}, 1, R)$.

1. Geben Sie ein Übergangsdiagramm für M an.

2. Welche Ausgaben erzeugt M bei den Eingaben 110 und 0011?

   110:

   0011:

3. Beschreiben Sie kurz in Worten, was die Maschine berechnet und wie sie dies tut.

Aufgabe 7. (8 Punkte)
Ist die Menge $\{4, 13, 117\} \subseteq \mathbb{N}$ Turing-berechenbar? Hierbei sollen die Elemente aus $\mathbb{N}$ wie gewohnt im Alphabet $\{0, \ldots, 9\}$ im Zehnersystem notiert sein.

Aufgabe 8. (6 Punkte)
Wir betrachten einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ als $\mathcal{L}(\{R\})$-Struktur für ein zweistelliges Relationszeichen R.

1. Formalisieren Sie die folgenden in Worten geschriebenen Aussagen als $\mathcal{L}(\{R\})$-Aussagen.

   i) Es gibt zwei Knoten, die nicht durch eine Kante verbunden sind.

   ii) Es gibt einen Knoten der mit jedem anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist.

   iii) Jeder Knoten ist mit mindestens zwei anderen Knoten durch eine Kante verbunden.

   iv) Je zwei Knoten sind durch höchstens zwei andere Knoten miteinander verbunden.

2. Zeichnen Sie einen Graphen, der die Eigenschaften i)-iv) besitzt. Wieviele Knoten muss ein solch ein Graph mindestens besitzen?

Aufgabe 9. (6 Punkte)
Es sei $\tau = \{f, R\}$ für ein einstelliges Funktionszeichen f und ein zweistelliges Relationszeichen R. Wir betrachten die $\mathcal{L}(\tau)$-Formel φ definiert durch

$$\forall x\ Rxfx\ \wedge\ fy = x.$$

1. Geben Sie die Menge der freien Variablen von φ an.

2. Ergänzen Sie φ um Quantoren und Klammern, sodass es sich um einen Satz handelt.

3. Geben Sie jeweils eine Struktur an, die Ihren Satz aus Teil 2 erfüllt bzw. nicht erfüllt ODER beweisen Sie, dass Ihr Satz entweder eine Tautologie oder nicht erfüllbar ist.