

---

## Pro-Seminar Sturm-Liouville-Theorie

---

Dieses Proseminar gibt eine Einführung in die Sturm-Liouville-Theorie. Vorkenntnisse in funktionaler Analysis, in der Spektraltheorie oder Komplexer Analysis werden hierfür nicht benötigt. Wir werden die regulären und singulären Sturm-Liouville-Probleme betrachten, insbesondere ihre Anwendung bei der Lösung von partiellen Differentialgleichungen und vergleichbaren Problemen der Spektraltheorie.

Daten: 17.4, 24.4, 8.5, 15.5, 29.5, 5.6, 12.6, 19.6, 26.6, 3.7, 10.7, 17.7 (12 Termine)

### Programm:

- 1. (17.4) Voraussetzungen** Rückblick auf die Komplexe Analysis: Definitionen und Beispiele holomorphischer Funktionen durch konvergierende Reihen und Integrale über einen Punkt; Meromorphe Funktionen, Restbeträge. Cauchysche Integralformel (integriere händisch  $1, 1/z, 1/z^2, 1/z^3$  um 0) [4];
- 2. (24.4) Reguläre Sturm-Liouville Probleme (I)** Formulierung des regulären Sturm-Liouville-Problems [1, Abschnitt 1.1]; Definition der Liouville Transformation [2, S. 3], welche zeigt, dass Eigenwerte von S-L reelle Zahlen sind und Eigenfunktionen zu den verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind (und ggf. orthonormalisiert werden können) [1, Abschnitt 1.1]. Rückschau auf Fourier Reihen, Orthogonalität von Sinus und Cosinus, der Satz von Parseval; Herleiten der Verbindung des SL-Problems mit Fourier Reihen für  $q \equiv 0$ ;
- 3. (8.5) Reguläre Sturm-Liouville-Probleme (II)** Herleiten der Existenz von Lösungen für reguläre Sturm-Liouville-Probleme [1, Satz 1.5] oder [2, Abschnitt 1.7], der Sturm-Liouville Entwicklungssatz [1, (1.6.5)];
- 4. (15.5) Reguläre Sturm-Liouville-Probleme (III)** Rückschau auf die Konvergenz von Fourier Reihen, Beweis der orthogonalen Eigenschaften der Sturm-Liouville Entwicklung;
- 5. (29.5) Singuläre Sturm-Liouville-Probleme (I)** Formulierung des singulären Sturm-Liouville-Problems [1, Kapitel 2], der Satz von Parseval auf der Halblinie [2, Abschnitt 2.1.1], Definition der Spektralfunktion;
- 6. (5.6) Singuläre Sturm-Liouville-Probleme (II)** Singuläres Sturm-Liouville-Problem: der/die Sturm-Liouville Entwicklungssatz/ Reihe [2, Satz 2.1.2]; Grenz-Kreis-Fall / Grenz-Punkt-Fall [2, Abschnitt 2.2.1], Weyl-Lösung;
- 7. (12.6) Beispiele und Anwendungen (I)** Orthogonalität von Sinusfunktionen; Violinen (mit beiden Dirichlet Randbedingungen, Eigenfunktionen, Verteilung von Eigenwerten); Orthogonalität von Eigenfunktionen der Besselschen Differentialgleichung (BDG) [1, Kapitel 4.8–4.9]. Vollständigkeit der Orthogonalität und Anwendung auf Partielle Differentialgleichungen (PDG) [3, Kapitel 5.5];
- 8. (19.6) Beispiele und Anwendungen (II)** Orthogonalität von Hermiteschen Polynomen als Lösungen des harmonischen Oszillators [1, Kapitel 4.2]; Vollständigkeit Hermiteschen Polynomen und Anwendung auf PDG [3, Kapitel 6.4];
- 9. (26.6) Spektraltheorie (I)** Asymptotische Formeln für die Eigenwerte und Eigenfunktionen für den regulären Fall [2, Abschnitt 1.2.1 – 1.2.2];
- 10. (3.7) Spektraltheorie (II)** Sturm's Theorie für Nullstellen von Lösungen [2, Abschnitt 1.3]; Die Regel von Sturm [2, Satz 1.3.1], der Chengsche Eigenwertvergleichssatz [2, Satz 1.3.2];

11. **(10.7) Periodische Potentiale (I)** Weyl-Titchmarsh Funktion [2, Kapitel 2.4], Floquet (Bloch) Lösungen [2, Kapitel 2.6];
12. **(17.7) Periodische Potentiale (II)** Entwicklungssatz [2, Kapitel 2.7].

## Literatur

- [1] TITCHMARSH E.C. *Eigenfunction expansions* Oxford. 1962. 2nd ed..
- [2] LEVITAN B.M., SARGSJAN I.S. *Sturm-Liouville and Dirac operator* Springer Science. 1991.
- [3] GERALD B. FOLLAND *Fourier analysis and its applications* The Wadsworth Brooks. 1992.
- [4] MICHAEL TAYLOR <http://www.unc.edu/math/Faculty/met/complex.pdf>