Hauptfaserbündel, Holonomie und charakteristische Klassen

Nadine Große und Maximilian Stegemeyer

1. Motivation und Überblick

Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) kann durch Paralleltransport entlang einer Kurve eine Isometrie zwischen den Tangentialräumen an verschiedenen Punkten gefunden werden. Beschränkt man sich auf geschlossene Kurven, so erhält man eine Gruppe von linearen Isometrien des Tangentialraums eines Punktes. Diese Gruppe hängt bis auf Isomorphismus nur von der Riemannschen Metrik und der Mannigfaltigkeit - nicht aber vom gewählten Punkt - ab. Man bezeichnet diese Gruppe als die *Holonomie-Gruppe* von (M, g). Die Holonomie-Gruppe enthält wichtige Informationen über die Metrik und über zusätzliche geometrische Strukturen der Mannigfaltigkeit.

Im ersten Teil dieses Seminars wollen wir das Konzept der Holonomiegruppe verstehen. Dafür werden wir Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln benutzen und zunächst noch allgemeiner den Begriff der Holonomiegruppe eines Zusammenhangs auf einem Hauptfaserbündel betrachten.

Mit den erlernten Methoden über Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln lassen sich dann auch *charakteristische Klassen* behandeln. Dies sind Kohomologieklassen in der de-Rham-Kohomologie einer Mannigfaltigkeit, die für ein gegebenes Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit konstruiert werden können. Im letzten Teil des Seminars werden wir daher auch diese charakteristischen Klassen, ihre Konstruktion und deren Anwendungen kennen lernen.

2. Vorkenntnisse

Differentialgeometrie 1, insbesondere Grundkenntnisse in Riemannscher Geometrie und Differentialformen. Andere Veranstaltungen aus dem Bereich Differentialgeometrie sind hilfreich, aber keine Voraussetzung für die Teilnahme am Seminar.

3. Vortragsliste

1. Lie-Gruppen

In diesem Vortrag soll an die wichtigsten Eigenschaften von Lie-Gruppen und Lie-Algebren erinnert werden. Es sollen Lie-Gruppen und die dazugehörigen Lie-Algebren eingeführt werden, sowie die wichtigsten Eigenschaften der Exponential-Abbildung und der adjungierten Darstellung erklärt werden. Zum Schluss soll das Konzept einer Gruppenwirkung erklärt werden und kurz die wichtigsten Eigenschaften homogener Räume dargestellt werden.
Literatur: [1, 1.1 - 1.6]

2. Hauptfaserbündel

Das Konzept der Hauptfaserbündel ist eine wichtige Konstruktion in der Differentialgeometrie, die nicht nur von eigene Interesse ist, sondern auch besonders für das Studium von Vektorbündeln von Bedeutung sind. Dieser Vortrag soll einen Überblick über Faserbündel geben und dann - nach der Beschreibung von Hauptfaserbündeln - den Zusammenhang von Hauptfaserbündeln mit Vektorbündeln erklären. Zum Schluss soll nach kurz auf das Konzept der Reduktion und der Erweiterung von Hauptfaserbündeln eingegangen werden.
Literatur: [1, 2.1 - 2.5]

3. Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln I - Parallelverscheibung

Auf einem Hauptfaserbündel lässt sich der Begriff eines Zusammenhangs erklären. Hat man einen Zusammenhang gefunden, so lässt sich Parallelverschiebung definieren. Dies verallgemeinert das Konzept der Parallelverschiebung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. In diesem Vortrag sollen Zusammenhänge und Parallelverschiebung eingeführt werden.
Literatur: [1, 3.1 - 3.3]

4. Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln II - Krümmung

Nachdem wir im vorherigen Vortrag Zusammenhänge auf Hauptfaserbündeln und die zugehörige Parallelverschiebung kennen gelernt haben, beschäftigen wir uns in diesem Vortrag mit der Krümmung eines Zusammenhangs. Dieser Krümmungsbegriff lässt sich wieder als Verallgemeinerung des entsprechenden Konzepts aus der Riemannschen Geometrie verstehen. Zudem werden in diesem Vortrag Eichtransformationen definiert und als Spezialfall noch $\mathbb{S}^1$-Hauptfaserbündel behandelt.
Literatur: [1, 3.4 - 3.6]

5. Holonomie von Zusammenhängen auf Hauptfaserbündeln

In diesem Vortrag wird die Holonomie von Zusammenhängen auf Hauptfaserbündeln definiert. Falls $p\colon E \to M$ ein G-Hauptfaserbündel mit Zusammenhang A ist, so werden wir die *Holonomie-Gruppe* $\mathrm{Hol}(A)$ definieren und sehen, dass dies eine Untergruppe von G ist. Zudem soll das *Holonomie-Bündel* eingeführt werden und wir werden sehen, dass dies die "kleinstmögliche"Reduktion von $p\colon E \to M$ ergibt.
Literatur: [1, 4.1 - 4.2, 4.3 - 4.4 eventuell noch ergänzend]

6. Holonomie von Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Die Ergebnisse, die im vorherigen Vortrag allgemein für Hauptfaserbündel mit Zusammenhang vorgestellt wurden, sollen nun auf den Spezialfall Riemannscher Mannigfaltigkeiten übertragen werden. Nach einer kurzen Erinnerung an die wichtigsten Begriffe der Riemannschen Geometrie (Metrik, Isometrie, Levi-Civita-Zusammenhang) sollen in diesem Vortrag einige Beispiele erklärt werden und die Ergebnisse des vorherigen Vortrags auf den Riemannschen Fall übertragen werden.
Literatur: [1, 5.1] und zur Erinnerung an die Grundbegriffe der Riemannschen Geometrie [1, A.5-A.6], bzw. [3, Kapitel 1-5]

7. Der Zerlegungssatz von de Rham und Wu I - Involutive Distributionen

In diesem Vortrag sollen Distributionen eingeführt werden und der Satz von Frobenius erklärt werden. Aus der Holonomie-Theorie erhalten wir die sog. *Holonomie-Distribution* und wir wollen sehen, dass dies eine involutive Distribution ist. Mit dieser Vorbereitung kann man dann einen lokalen Zerlegungssatz beweisen.
Literatur: [2, 19.1 und 19.2], sowie [1, 5.2, bis Satz 5.6]

8. Der Zerlegungssatz von de Rham und Wu II - Der Satz von Cartan-Ambrose-Hicks und der der Zerlegungssatz

Die Holonomiegruppe einer zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(n)$, $n = \dim(M)$ und wirkt auf den Tangentialraum T_pM für einen beliebigen Punkt $p \in M$. Falls die zugehörige Darstellung $\mathrm{Hol}(M, g) \to \mathrm{GL}(T_pM)$ reduzibel ist, so haben wir im vorherigen Vortrag gesehen, dass sich die Mannigfaltigkeit M lokal als Riemannsches Produkt beschreiben lässt. Zusammen mit dem Satz von Cartan-Ambrose-Hicks gibt dies einen globalen Zerlegungssatz für Riemannsche Mannigfaltigkeiten, der Satz von de Rham und Wu.
Literatur: [1, 5.2, ab Satz 5.6, sowie A.9 für den Satz von Cartan-Ambrose-Hicks]

9. Holonomiegruppen symmetrischer Räume

Symmetrische Räume sind eine Klasse von homogenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, deren geometrische Eigenschaften sich rein Lie-theoretisch beschreiben lassen. Dieses allgemeine Prinzip soll in diesem Vortrag durch die Bestimmung der Holonomie-Gruppe symmetrischer Räume verdeutlicht werden. Zu Beginn sollen dafür noch grundlegende Eigenschaften von Riemannschen symmetrischen Räumen diskutiert werden.
Literatur: [1, 5.3]

10. Die Berger-Liste

Nachdem wir im vorherigen Vortrag symmetrische Räume betrachtet haben, beschäftigen wir uns nun mit Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die *nicht* lokal symmetrisch sind. Die Berger-Liste ist eine Liste der möglichen Untergruppen der orthogonalen Gruppe, die als Holonomiegruppen auftreten können. In diesem Vortrag soll erklärt werden, was die verschiedenen Untergruppen für *spezielle Geometrien* induzieren und die Beweisidee des Satzes von Berger skizziert werden.
Literatur: [1, 5.4]

11. Der Weil-Homomorphismus

Charakteristische Klassen sind Kohomologie-Klassen, die auf natürliche Weise Vektorbündeln zugeordnet werden. Um dies zu erreichen, werden Zusammenhänge von Hauptfaserbündeln verwendet. Eine allgemeine Konstruktion, wie man aus der Krümmung eines Hauptfaserbündels eine Klasse in der de-Rham-Kohomologie gewinnen kann, ist durch den Weil-Homomorphismus gegeben, welcher in diesem Vortrag vorgestellt werden soll.
Literatur: [1, 6.1]

12. Chern-Klassen

Für ein komplexes Vektorbündel $p\colon E \to M$ lassen sich die *Chern-Klassen* $c_k(E) \in \mathrm{H}^{2k}_{\mathrm{dR}}(M)$ definieren. Für ein triviales Vektorbündel sind alle Chern-Klassen $c_k(E)$, $k > 0$ trivial, man kann also aus dem Nicht-Verschwinden von Chern-Klassen u.a. die Nicht-Trivialität eines Bündel schließen. Des weiteren ist die Konstruktion der Chern-Klassen mit typischen Konstruktionen für Vektorbündel wie Whitney-Summe und Pullback verträglich. Diese Eigenschaften sollen in diesem Vortrag vorgestellt werden und zudem die erste Chern-Klasse vom Tangentialbündel einer Kähler-Mannigfaltigkeit diskutiert werden.
Literatur: [1, 6.2]

13. Pontrjagin-Klassen und die Euler-Klasse

Einem reellen Vektorbündel $p\colon E \to M$ werden durch Ausnutzen der Konstruktion der Chern-Klassen die sogenannten *Pontryagin-Klassen* zugeordnet. Zudem kann man jedem reellen orientierbaren Vektorbündel mit geradzahligem Rang eine *Euler-Klasse* zuordnen. Diese hat auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit direkte Beziehung zu Krümmungstermen und führt daher zum Satz von Gauß-Chern-Bonnet, welcher den klassischen Satz von Gauß-Bonnet verallgemeinert.
Literatur: [1, 6.3 - 6.4]

14. Potenzreihen und Indexsätze

In diesem Vortrag soll ein Ausblick auf Potenzreihen und Indexsätze gegeben werden. Potenzreihen werden genutzt um aus den Chern- bzw. Pontryagin-Klassen eines Vektorbündels neue Kohomologie-Klassen zu bauen. Im Vortrag sollen einige Beispiele diskutiert werden und dann die Verbindung zu Differentialoperatoren und Indextheoremen skizziert werden.
Literatur: [1, 6.5]

Literatur

[1] Helga Baum. *Eichfeldtheorie*. Springer, 2009.

[2] John M Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2012.

[3] John M Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*, volume 2. Springer, 2018.