String-Topologie

Nadine Große und Maximilian Stegemeyer

1. Motivation und Überblick

In der algebraischen Topologie wird studiert, wie man topologischen Räumen algebrische Objekte zuordnen kann, wie z.B. die Homologie- und Kohomologie-Gruppen. Die Homologie, bzw. Kohomologie einer kompakten Mannigfaltigkeit hat eine besondere Eigenschaft, die andere Räume im Allgemeinen nicht erfüllen. Homologie und Kohomologie einer kompakten Mannigfaltigkeit erfüllen zusammen die sogenannten *Poincaré*-Dualität. Diese besondere Struktur hat viele interessante Konsequenzen, z.B. gibt es nun ein Produkt auf den Homologie-Gruppen, das *Schnitt-Produkt*.

In diesem Seminar wollen wir zunächst die algebraische Topologie von Mannigfaltigkeiten kennen lernen und Poincaré-Dualität und das Schnitt-Produkt studieren. Die Ideen hinter dem Schnitt-Produkt lassen sich dann auf den *freien Schleifenraum* einer Mannigfaltigkeit übertragen. Die Homologie des freien Schleifenraums erhält damit auch ein Produkt, sowie weitere algebraische Strukturen. Die Untersuchung dieser zusätzlichen algebraischen Strukturen auf dem Schleifenraum nennt man *String-Topologie*. Wir werden in diesem Seminar einige Aspekte und Anwendungen der String-Topologie kennen lernen und zuletzt noch sehen, was die String-Topologie über die Geometrie und Topologie der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit aussagen kann.

2. Vorkenntnisse

Algebraische Topologie, insbesondere Grundkenntnisse in singulärer Homologie und Kohomologie. Andere Veranstaltungen, wie z.B. Differentialgeometrie I sind hilfreich, aber keine Voraussetzung für die Teilnahme am Seminar.

3. Votragsliste

1. Mannigfaltigkeiten

In diesem Vortrag werden topologische und glatte Mannigfaltigkeiten eingeführt. Wir werden das Tangentialbündel einer glatten Mannigfaltigkeit kennen lernen und das Konzept der Riemannschen Metrik disktieren. Zudem sollen Untermannigfaltigkeiten und Tubenumgebungen eingeführt werden.
Literatur: [12, Kapitel 9, 11.2] und [11, Theorem 5.25].

2. Homologie von Mannigfaltigkeiten und Orientierungen

Für eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit lässt sich der Begriff einer Orientierung definieren. Falls eine Orientierung existiert, heißt die Mannigfaltigkeit *orientierbar*. In der algebraischen Topologie hängt dieser Begriff der Orientierung zudem von der Wahl der Koeffiziten der Homologie ab. In diesem Vortrag wird der Begriff der Orientierung eingeführt und wir werden sehen, wie sich die Homologie einer orientierbaren Mannigfaltigkeit in gewissen Geraden verhält. Inbesondere stellt sich heraus, dass ein kompakte Mannigfaltigkeit M mit gewählter Orientierung eine ausgezeichnete Klasse $[M] \in \mathrm{H}_n(M)$ besitzt mit $n = \dim(M)$. Zudem soll an den klassischen Begriff der Orientierbarkeit einer glatten Mannigfaltigkeit erinnert und die beiden Konzepte verglichen werden.

Literatur: [1, Abschnitt VI.7], [7, Abschnitt 3.3 bis S. 239], sowie [12, Abschnitt 11.3] für Orientierung von glatten Mannigfaltigkeiten via Karten.

3. Das Cap-Produkt und Poincaré-Dualität

Neben dem Cup-Produkt in singulärer Kohomologie kann man auf ähnliche Weise ein *Cap-Produkt* einführen, welches eine Paarung

$$\cap\colon \mathrm{H}^k(X) \otimes \mathrm{H}_m(X) \to \mathrm{H}_{m-k}(X)$$

zwischen Kohomologie und Homologie eines topologischen Raums X definiert. Indem wir nun das Cap-Produkt mit der Orientierungsklasse einer kompakten orientierten Mannigfaltigkeit M nehmen, erhalten wir auf M eine Abbildung $\mathrm{H}^\bullet(M) \to \mathrm{H}_{n-\bullet}(M)$. Die Aussage der Poincaré-Dualität ist, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist. Dies stellt also eine zusätzliche Symmetrie der Homologie einer Mannigfaltigkeit dar, die andere Räume im Allgemeinen nicht besitzen.
Literatur: [7, Abschnitt 3.3, S. 240-249], auch [1, Abschnitte VI.5 und VI.8].

4. Thom-Klassen und Umkehrabbildungen

Ist $f\colon N \hookrightarrow M$ eine Abbildungen zwischen topologischen Räumen, so gibt es eine induzierte Abbildung in Homologie, $f_*\colon \mathrm{H}_\bullet(N) \to \mathrm{H}_\bullet(M)$. Sind N und M kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten, so kann man nun aber auch eine Abbildung $f_!\colon \mathrm{H}_\bullet(M) \to \mathrm{H}_\bullet(N)$, die *Umkehrabbildung*, erklären. Die Umkehrabbildung lässt sich auch allgemeiner definieren, sobald $f\colon N \hookrightarrow M$ eine Einbettung mit Tubenumgebung ist. In diesem Fall lässt sich eine spezielle Kohomologie-Klasse finden, die *Thom-Klasse* $\tau \in \mathrm{H}^\bullet(M, M \setminus N)$. Besonders wichtig ist hier der Satz über den Thom-Isomorphismus.
Literatur: [1, Abschnitt VI.11, hier 11.1-11.7 und Beginn von Abschnitt VI.14].

5. Das Schnitt-Produkt auf Mannigfaltigkeiten

Mit der Poincaré-Dualität, die wir in Vortrag 3 kennen gelernt haben, lässt sich das Cup-Produkt direkt von Kohomologie auf Homologie übertragen. Dieses Produkt in der Homologie einer Mannigfaltigkeit heißt *Schnittprodukt* und kann in vielen Fällen tatsächlich durch den Schnitt von Untermannigfaltigkeiten ausgedrückt werden. Wir wollen in diesem Vortrag noch eine andere Weise sehen, wie man das Schnitt-Produkt erklären kann. Dafür verwenden wir das Konzept der Umkehrabbildungen aus Vortrag 4.
Literatur: [1, Abschnitt VI.11, S. 367 und 11.8-11.16] und [8, Appendix B].

6. Die Euler-Klasse und die Gysin-Sequenz eines Sphärenbündels

Zu einem orientierten Vektorbündel $E \to M$ lässt sich immer eine gewisse Kohomologie-Klasse auf M assoziieren, die wichtige Information über das Vektorbündel enthält. Diese Klasse heißt *Euler-Klasse* des Vektorbündels. Die Euler-Klasse des Tangentialbündels einer Mannigfaltigkeit hängt zudem mit der Euler-Charakteristik der Mannigfaltigkeit zusammen. Auch im Falle von Sphärenbündeln lässt sich eine Euler-Klasse definieren und diese tritt in einer langen exakten Sequenz, der *Gysin-Sequenz* auf, welche sehr nützlich für Berechnungen von Kohomologiegruppen in vielen Situationen ist.
Literatur: [1, Abschnitt VI.13. und VI.14].

7. Schleifenräume

Für einen topologischen Raum X kann man den Raum aller stetigen Schleifen $LX := \mathrm{Map}(\mathbb{S}^1, X)$ betrachten, den *freien Schleifenraum*. Eng verwandt mit dem freien Schleifenraum ist der *Schleifenraum* $\Omega_{x_0}X$ von X bzgl. eines gewählten Punktes x_0. Im Gegensatz zum freien Schleifenraum ist der Schleifenraum $\Omega_{x_0}X$ ein H-Raum und die Homologie von $\Omega_{x_0}X$ erhält somit automatisch ein Produkt, das *Pontryagin-Produkt*.

In diesem Vortrag sollen die topologischen Grundlagen des freien Schleifenraums und des Schleifenraums bzgl. eines Punkts erklärt werden und die Eigenschaften des Pontryagin-Produkts diskutiert

werden.
Literatur: [15, Section 11, Loop Space and Suspension], [7, S. 296-297] und [2, Abschnitte 1.1,1.4].

8. Der Schleifenraum als Hilbert-Mannigfaltigkeit

In Vortrag 5 haben wir Schleifenräume für beliebige topologische Räume X betrachtet. Ist $X = M$ eine kompakte Mannigfaltigkeit, so kann man statt stetigen Schleifen auch solche mit gewissen Regularitätsbedingungen betrachten. Es stellt sich raus, dass man so den freien Schleifenraum als unendlichdimensionale *Hilbert-Mannigfaltigkeit* verstehen kann. Insbesondere kann man also auch im Schleifenraum von glatten Abbildungen und Untermannigfaltigkeiten sprechen.

In diesem Vortrag soll zudem erklärt werden, wie man Umkehrabbildungen in unendlichen Dimensionen erklären kann.
Literatur: [2, Abschnitt 2.1] und [9, Abschnitt 2.3].

9. Das Chas-Sullivan Produkt

Falls M eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, so kann man auf der Homologie des freien Schleifenraums ein Produkt definieren, das *Chas-Sullivan Produkt*. Dies ist heuristisch gesprochen eine Kombination aus dem Schnitt-Produkt auf der Mannigfaltigkeit M und dem Pontryagin-Produkt auf dem Schleifenraum bzgl. eines Punktes $\Omega_{x_0}M$.

In diesem Vortrag soll das Chas-Sullivan Produkt eingeführt werden, seine algebraischen Eigenschaften diskutiert werden und das Verhältnis zu Schnitt- und Pontryagin-Produkt untersucht werden.
Literatur: [2, Abschnitt 3], [3, Abschnitt 1.2] und [10, Abschnitt 2.1 und 2.3].

10. Die $\mathbb{S}^1$-Wirkung und BV-Algebren

Auf dem freien Schleifenraum einer kompakten Mannigfaltigkeit M gibt es auf natürliche Weise eine Wirkung der Lie-Gruppe $\mathbb{S}^1$. Diese Wirkung induziert eine Abbildung $\Delta\colon \mathrm{H}_\bullet(LM) \to \mathrm{H}_{\bullet+1}(LM)$ in Homologie. Diese verträgt sich auf eine gewisse Weise mit dem Chas-Sullivan Produkt, sodass beide Operationen gemeinsam die Struktur einer *BV-Algebra* bilden.

In diesem Vortrag soll die $\mathbb{S}^1$-Wirkung auf dem Schleifenraum eingeführt werden und die Grundlagen der String-Topologie BV-Algebra dargestellt werden. Zudem soll der Zusammenhang zu Gerstenhaber-Algebren erklärt werden. Falls noch Zeit ist, kann auch auf die algebraischen Strukturen in $\mathbb{S}^1$-äquivarianter Homologie eingegangen werden.
Literatur: [3, Abschnitt 1.3] und [4, Definition 1.1 und Proposition 1.2].

11. Faserungen und Spektralsequenzen

In der Topologie führt man den Begriff der *Faserung* $p\colon E \to B$ ein, als topologische Verallgemeinerung von Faserbündeln, wie sie häufig in der Differentialgeometrie auftreten. Die Abbildung $\mathrm{ev}\colon LM \to M, \gamma \mapsto \gamma(0)$ ist ein Beispiel für eine Faserung. Das Urbild eines Punktes unter einer Faserung wird *typische Faser* F genannt – im Fall der Abbildung ev ist dies genau der Schleifenraum bzgl. eines Punkts. Betrachtet man die Homologie, so stellt sich die Frage, wie Homologie von Basis B, Totalraum E und Faser F zusammenhängen. Der Zusammenhang wird von einem algebraischen Objekt hergestellt, einer *Spektralsequenz*.
Literatur: [2, Abschnitte 1.1 und 1.2] und [6, Seiten 1-10].

12. Spektralsequenzen und String-Topologie

In diesem Vortrag sollen multiplikative Spektralsequenzen eingeführt werden und die Anwendung auf die Berechnung der Homologie von Schleifenräumen erklärt werden. So lässt sich mit einer Spektralsequenz das Chas-Sullivan Produkt auf Sphären bestimmen.
Literatur: [2, Abschnitt 4] und [6, Seiten 24,25].

13. Ausblick: Homotopie-Invarianz der String-Topologie

Bei den meisten Konstruktionen in der algebraischen Topologie stellt sicher heraus, dass die konstruierten algebraischen Objekte *invariant* unter Homotopie-Äquivalenzen sind. Da in der Konstruktion der String-Topologie die Struktur als glatte Mannigfaltigkeit benutzt wird, ist a priori nicht klar, dass die String-Topologie-Operationen auch homotopie-invariant sind. Es stellt sich aber heraus, dass das Chas-Sullivan Produkt invariant ist. Allerdings gibt es ein Koprodukt in der String-Topologie, welches im Allgemeinen nicht homotopie-invariant ist. In diesem Vortrag sollen diese Fragen diskutiert werden und insbesondere das Goresky-Hingston Koprodukt besprochen werden.
Literatur: [13]

14. Ausblick: String-Topologie und geschlossene Geodätische

Ist M eine Mannigfaltigkeit mit gewählter Riemannscher Metrik g, so kann man sich fragen, ob es geodätische Kurven in M gibt, die sich schließen. Eine Möglichkeit diese Kurven zu untersuchen, ist, auf dem freien Schleifenraum die kritischen Punkte des von g induzierten *Energie-Funktionals* zu betrachten. Die Theorie von Marston Morse stellt einen Zusammenhang zwischen kritischen Punkten auf Mannigfaltigkeiten und der Homologie dieser Mannigfaltigkeit dar. Die Homologie des freien Schleifenraums einer Mannigfaltigkeit kann also in gewissen Fällen genutzt werden um Existenz-Aussagen über geschlossene Geodätische zu machen. Es ist dann eine naheliegende Frage, wie sich geschlossene Geodätische und String-Topologie zueinander verhalten.

In diesem Vortrag sollen gewisse Zusammenhänge zwischen den String-Topologie Produkten und dem Energie-Funktional des Schleifenraums erklärt werden.
Literatur: [5] und [14]

Literatur

[1] Glen E Bredon. *Topology and geometry*, volume 139. Springer Science & Business Media, 2013.

[2] David Chataur and Alexandru Oancea. Basics on free loop spaces. *Free Loop Spaces in Geometry and Topology*, page 21.

[3] Ralph L Cohen, Kathryn Hess, and Alexander A Voronov. *String topology and cyclic homology.* Springer, 2006.

[4] Ezra Getzler. Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories. *Communications in mathematical physics*, 159(2):265–285, 1994.

[5] Mark Goresky and Nancy Hingston. Loop products and closed geodesics. *Duke Math. J.*, 150(1):117–209, 10 2009.

[6] Allen Hatcher. *Spectral sequences.* 2004.

[7] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* 2005.

[8] Nancy Hingston and Nathalie Wahl. Product and coproduct in string topology. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure*, 56(5):1381–1447, 2023.

[9] Wilhelm Klingenberg. *Riemannian geometry*, volume 1. Walter de Gruyter, 1995.

[10] Philippe Kupper. Homology products on Z2-quotients of free loop spaces of spheres. 2020.

[11] John M Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*, volume 2. Springer, 2018.

[12] Wolfgang Lück. *Algebraische Topologie: Homologie und Mannigfaltigkeiten.* Springer-Verlag, 2012.

[13] Florian Naef, Manuel Rivera, and Nathalie Wahl. String topology in three flavors. *EMS Surveys in Mathematical Sciences*, 10(2):243–305, 2023.

[14] Alexandru Oancea. Morse theory, closed geodesics and the homology of free loop spaces. In *Free Loop Spaces in Geometry and Topology*, pages 67–109. 2015.

[15] Joseph J Rotman. *An introduction to algebraic topology*, volume 119. Springer Science & Business Media, 2013.