Seminar Differentialgeometrie

Vortragsplan:

Allgemeines:

- Vorträge mit * sind speziell für Lehramtstudierende geeignet.
- Vorträge mit $\diamond$ sind insbesondere geeignet, um eine Bachelorarbeit anzuschließen.
- Veranschaulichen Sie (sofern möglich) definierte Begriffe, Sätze etc. zusätzlich an hilfreichen Beispielen!

1 Ebene Kurven* (24.4)

[2] oder [10]

- regulär parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^n$, Umparametrisierung, Parametrisierung nach Bogenlänge
- Interpretation als Bewegung eines Punktes, Geschwindigkeit, Beschleunigung
- Krümmung einer ebenen Kurven (Formel, Anschauung, Taylorentwicklung)
- [8, II Lemma I] mit Beweis
- Krümmung von Raumkurven und Schurs Lemma [8, II Lemma A]

2 Geschlossene ebene Kurven* (8.5)

[8]

- geschlossen, einfach geschlossen [10, Kap. 2F]
- Isoperimetrische Ungleichung (mit Beweis)
- Vierscheitelsatz und/oder weitere Sätze der globalen Kurventheorie (aber nicht den Hopfschen Umlaufsatz)

3 Starrheit von Polyedern* (15.5)

[8, Kap. II.5]

4 Totalkrümmung von Raumkurven* (22.5)

- Satz von Fenchel [10, Satz 2.34] mit Beweis
- (Un-)Knoten, Crofton-Formel mit Beweis[12, Prop. 3.2 + Ex. 12 (p.33)]
- Satz von Fary-Milnor [12] oder [10]

5 Flächen im $\mathbb{R}^3$* (29.5)

[2] oder [6]

- als Untermannigfaltigkeit, lokaler Funktionsgraph und abstrakt (Beispiel: $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$)
- Wann sind regulär parametrisierte Raumkurven Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$?
- Satz von Whitney (nur erwähnen, dazu sagen, dass die Definition einer Untermannigfaltigkeit/abstrakten Mannigfaltigkeit auch in höheren Dimensionen funktioniert) und Beweisidee am Beispiel des $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (wenn Zeit auch noch für $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$) veranschaulichen.

6 Flächeninhalt und der Satz von Gauß-Bonnet (12.6)

Für Flächen im $\mathbb{R}^3$ (als Beispiel insbesondere Kugel und Rotationstorus): [10]

- induzierte Metrik und Abstandsfunktion
- Flächeninhalt, Anschauung/Bedeutung des Volumenelements
- Gaußkrümmung (Definition, Anschauung)
- Satz von Gauß-Bonnet (lokal, mit Ecken und global) mit Beweisideen (siehe z.B. [1]) und Anwendungen

7 Totalkrümmung vollständiger offener Flächen$^\diamond$ (19.6)

[13, Kap.2]

- Eulercharakteristik für offene Flächen
- Satz von Cohn-Vossen und Huber (min. Beweisidee)
- Berechnung mehrerer Beispiele

8 Riemannsche Flächen I$^\diamond$ (26.6)

(Geschlecht ≥ 2 = hyperbolische Flächen)
Alle hyperbolische Flächen kann man aus 'Stücken' der hyperbolische Ebenen zusammenbauen.

- Metrik- und Abstandsdefinition für abstrakte Mannigfaltigkeiten.
- Poincaresches Halbebenen $\mathbb{H}$ Modell mit Metrik und Abstandsfunktion, Angabe der Geraden (= abstandsminimierende Kurven) und Gaußkrümmung
- Orthogonale Sechsecke in $\mathbb{H}$
- 'Aneinanderkleben', Hosen und Riemannsche Flächen
- Warum kann eine Riemannsche Flächen nicht als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ mit induzierter Metrik auftreten? (Analoger Grund gilt für $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit der euklidischen Metrik).

9 Riemannsche Flächen II (3.7)

Riemannsche Flächen als Graph mehrwertiger analytischer Funktionen [14, Section 1]

10 Systolische Ungleichungen$^\diamond$ (10.7)

[5, Kap. 2.C.4], [9] und [7, Sec. 1-3]

- Homotopiedefinition, Fundamentalgruppe, Existenz von minimalen Geodäten in Homotopieklassen
- Systole
- Satz von Loewer (mit Beweis) [5] und [9]
- In höheren Dimensionen und Verallgemeinerungen? [7, Sec. 3] und [9]

11 Minkowskiraum* (17.7)

[10] und [3, Kap. 4.1]

- Minkowskiraum $\mathbb{R}^{3,1}$ mit Interpretation (kausale, raumartige und lichtartige Kurven)
- Eigenschaften des Minkowskiraumprodukt, insbesondere die inverse Dreiecksungleichung und Lorentztransformationen.

12 Kausale Struktur von Raumzeiten$^\diamond$ (24.7)

[4] und [11]

- Lorentzmetrik, Zeitorientierbarkeit (mit [11, Lemma 32] mit Beweis)
- Existenz (zeitorientierbarer) Lorentzmetriken [11, Prop. 27]
- verallgemeinerte Zeitfunktionen, global hyperbolische Raumzeiten einschliesslich [4, Thm. 3.17] mit Beweis und [4, Thm. 3.18] mit Anschauung

Literatur

[1] Ammann, B. http://www.mathematik.uni-regensburg.de/ammann/lehre/2009s_diffgeo/gaussbonnet_divergenz.pdf.

[2] Bär, C. *Elementare Differentialgeometrie*. DeGruyter, 2.Auflage, 2010.

[3] Bär, C. *Elementargeometrie*. Skript, Potsdam, 2008. http://www.math.uni-potsdam.de/fileadmin/user_upload/Prof-Geometrie/Dokumente/Lehre/Lehrmaterialien/skript-ElemGeo.pdf.

[4] Beem, J. K., Ehrlich, P. E., and Easley, K. L. *Global Lorentzian geometry*, second ed., vol. 202 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1996.

[5] Gallot, S., Hulin, D., and Lafontaine, J. *Riemannian geometry*, third ed. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[6] Grosse, N. Differentialgeometrie. http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/DiffGeo_WS-1617_Skript.pdf Skript, WS 16/17.

[7] Guth, L. Metaphors in systolic geometry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II* (2010), Hindustan Book Agency, New Delhi, pp. 745–768. math.mit.edu/~lguth/Exposition/icmguth.pdf.

[8] Hopf, H. *Differential geometry in the large*, second ed., vol. 1000 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1989. Notes taken by Peter Lax and John W. Gray, With a preface by S. S. Chern, With a preface by K. Voss.

[9] Katz, M. G. *Systolic geometry and topology*, vol. 137 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. With an appendix by Jake P. Solomon.

[10] Kühnel, W. *Differentialgeometrie*. ...

[11] O'Neill, B. *Semi-Riemannian geometry*, vol. 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983. With applications to relativity.

[12] Shifrin, T. Differential geometry: A first course in curves and surfaces. alpha.math.uga.edu/~shifrin/ShifrinDiffGeo.pdf Skript, WS 16/17.

[13] Shiohama, K., Shioya, T., and Tanaka, M. *The geometry of total curvature on complete open surfaces*, vol. 159 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[14] Teleman, C. Riemann surfaces. https://math.berkeley.edu/~teleman/math/Riemann.pdf Skript.