http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/ Nadine Große, Ksenia Fedosova
WS2021

Seminar Hyperfunktionen

Manchmal ist die Menge der klassischen Funktionen nicht ausreichend, sondern man benötigt allgemeinere Objekte. Ein Beispiel ist die Dirac-Deltafunktion. Sie taucht in der Physik als Dichte einer idealisierten Punktmasse auf und ist überall Null außer in einem Punkt. Weiterhin, ist das Integral über die reelle Achse gleich eins. Das impliziert, dass die Dirac-Deltafunktionen entgegen ihrem Namen keine Funktion sein kann.

Es gibt verschiedene Wege die Menge der klassischen Funktionen derart zu erweitern, dass man eine mathematisch rigorose Definition der Dirac-Deltafunktion erhält und sogar derart, dass man alle Ableitungen von lokal integrierbaren Funktionen in diesen Rahmen fassen kann, selbst dann, wenn diese Funktionen im klassischen Rahmen gar keine Ableitung besitzen. Eine solche Möglichkeit benutzt sogenannte Distributionen. Dort betrachtet man (statt Funktionen) lineare Abbildungen, die auf 'genügend schönen' Funktionen wirken. Ein anderer - noch allgemeinere Weg - sind Hyperfunktionen.

Hyperfunktionen können als 'Sprung' einer holomorphen Funktion auf der oberen Halbenene zu einer anderen holomorphen Funktion auf der unteren Halbebene der komplexen Ebene definiert werden. Diese 'Sprung ' kann nicht als Differenz von Grenzwerten von zwei Funktionen aufgefasst werden, da der Grenzwert nicht existieren muss. Überraschenderweise hat der Sprung aber eine natürliche Interpretation, die aus der Hydrodynamik kommt, von 'Vortex sheets' einer perfekten Flüssigkeit.

Das Hauptziel dieses Seminars ist es die Theorie der Hyperfunktionen in einer Dimension zu entwickeln und ihre zugeörige Fouriertheorie kennenzulernen.

Die Quelle, [1], ist sehr ausführlich und mit vielen Beispielen.

1. (03.11) **Grundlagen von Hyperfunktionen - 0** [1, S. 1–14] Dirac-Delta-Funktion, komplexe Geschwindigkeit und analytische Funktionen, Vertices, Definition von Hyperfunktionen, Wert einer Hyperfunktion, gewöhnliche Funktionen, Linearkombination, Hyperfunktion 0.

2. (10.11) **Grundlagen von Hyperfunktionen - I** [1, S. 14–23] Produkt einer Hyperfunktion und einer analytischen Funktion, absolut integrierbare Funktionen sind Hyperfunktionen, Heaviside-Funktion, Ableitungen von Hyperfunktionen, δ -Funktion, Integrale von Hyperfunktionen.

3. (17.11) **Grundlagen von Hyperfunktionen - II** [1, S. 33–56] singuläre analytische Funktionen interpretiert als Hyperfunktionen, Cauchys Hauptwert, formales Produkt einer Hyperfunktion und einer analytischen Funktion, Heaviside-Funktion, Dirac-Delta-Funktion, x^{-m}, $x^{-m}sgn(x)$, $x^{-m}H(x)$, $\log(|x|)$, $\log(|x|)H(x)$, $\log(|y|)sgn(x)$, $|x|^\alpha$, $|x|^\alpha H(x)$, $|x|^\alpha sgn(x)$, Lösungen von $\phi(x)\cdot f(x) = h(x)$, Hyperfunktionen abhängig von einem Parameter, Beispiele.

4. (24.11) **Grundlagen von Hyperfunktionen - III** [1, S. 56 – 81] Operationen für parameterabhängigen Hyperfunktionen, Konvergenz von Folgen von Hyperfunktionen (mit Analysis I vergleichen), Potenz-Hyperfunktionen, endlicher Teil eines divergierenden Integrals, Berechnung von pf-Integralen.

5. (01.12) **Fourier-Transformation - I** [1, S. 83-98] Fourier-Transformation für Funktionen. Definition, Eigenschaften. Inverse Fourier-Transformation bei Hyperfunktionen, Beispiele.

6. (08.12) **Fourier-Transformation - II** [1, S. 101-131] Fourier-Transformation für Hyperfunktionen des Potenz-Typs, Beispiele; Hyperfunktionen vom unteren (oberen) Typ.

7. (15.12) **Fourier-Transformation - III** [1, S. 133-154] Existenz und Regulartität: Funktionen und Hyperfunktionen vom Typ eks α, ausreichende Bedingung für die Existenz von Fourier-Transformationen; Riemann-Lebesgue-Theorem und seine Verallgemeinerung.

8. (22.12) **Fourier-Transformation - IV** [1, S. 165-199] Die Fourierreihe; Standard-erzeugende Funktionen, Hyperfunktionen mit standard-erzeugenden Funktionen, periodische Hyperfunktionen, Fourier-Reihen von Hyperfunktionen, Fourier-Transformation von periodischen Hyperfunktionen, 'δ -Funktionsreihe' und Stufenfunktionen, Berechnungen von Fourier-Reihen, Verhalten von Fourier-Koeffizienten, c_n, wenn $n \to \infty$.

9. (12.01) **Analytische Fortsetzung und Projektion von Hyperfunktionen** [1, S. 205–223] Projektion, analytische Fortsetzung, verallgemeinerte δ -Funktion, Standardhyperfunktionen, Erweiterung der Definition der Projektion, endlicher Teil des divergenten Integrals.

10. (19.01) **Produkt von Hyperfunktionen** [1, S. 225–246] Produkt von Hyperfunktionen, bestimmtes Integral des Produkts von Hyperfunktionen, erzeugende Funktion des Produkts von Hyperfunktionen, Produkt von zwei Hyperfunktionen vom oberen (und unteren) Typ, Klassifikationen von Produkten von Hyperfunktionen.

11. (26.01) **Faltung von Hyperfunktionen - I** [1, S. 249–267] Faltung und Produkt verbunden über Fourier-Transformation für gewöhnliche Funktionen, Faltung von gewöhnliche Funktion und Hyperfunktion, Faltung von Hyperfunktion und Hyperfunktion, Definition von Faltungen, Grundfaltungen, grundlegende Eigenschaften von Faltungen, Berechnungen von Faltungen.

12. (02.02) **Faltung von Hyperfunktionen - II** [1, S. 267-282] Hinreichende Bedingungen für die Existenz von Faltungen, Faltung von zwei rechten (linken) Hyperfunktionen, Faltung von Hyperfunktionen vom oberen (unteren) Typ, Fourier-Transformationen von Faltungen, Titschmarsch-Theorem, Fourier-Transformationen von Produkten, Werte von Hyperfunktionen und unendliche Hauptwert-Integrale, Satz von Parseval

13. (09.02) **Anwendungen: Integralgleichungen** [1, S. 357-380] Klassifikation von Integralgleichungen, Lösungen von Evolutionsgleichungen, Volterra Integralgleichungen, Abels Integralgleichung, Fredholm Version einer Abel Integralgleichung, homogene Gleichungen, Integrale von Hyperfunktionen.

Literatur

[1] Isao Imai. *Applied hyperfunction theory*, volume 8. Springer Science & Business Media, 2013.