http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/

Nadine Große, Ksenia Fedosova
WS18-19

Seminar Hyperbolische Gruppen

Die Geometrische Gruppentheorie ist ein Teilbereich der Mathematik, in der Gruppen als geometrische Objekte untersucht werden und welcher Verbindungen zwischen algebraischen Eigenschaften einer Gruppe und geometrischen Eigenschaften eines Raumes, auf welche die Gruppe über Isometrien agiert, erforscht.

Hyperbolische Gruppen sind Generalisierungen der fundamentalen Gruppe $\pi_1(X)$ auf einer Fläche X mit dem Geschlecht $g = 2$. In diesem Fall untersucht die geometrische Gruppentheorie die Verbindungen zwischen $\pi_1(X)$ und der hyperbolischen Ebene.

Obgleich die geometrische Gruppentheorie ein relativ neue Disziplin ist, hat sie bereits Anwendungen in vielen anderen Bereichen innerhalb der Mathematik gefunden. Es hat sich beispielweise herausgestellt, dass viele tradtionelle algebraische Probleme schnelle und transparente Lösungen für hyperbolische Gruppen besitzen, während sie mit endliche Präsentationen generell unlösbar sind. Eines dieser Probleme ist das folgende: Gegeben ist eine endliche Präsentation einer Gruppe G. Zeigen sie die Existenz eines Algorithmus, welcher das Wort w als Eingabe in den Generatoren annimmt und entscheidet, ob w die Identität von G darstellt oder nicht.

In diesem Seminar studieren wir hyperbolische Gruppen und deren Anwendung. Wir werden die hyperbolische Geometrie diskutieren, Fuchs'sche Gruppen studieren, die Notation eines Cayley Graphen einführen, beweisen, dass der Cayley Graph bestimmter Gruppen quasi-isomorph zur hyperbolischen Ebene ist, das Wort-Problem und Dehn's Algorithmus untersuchen und über klassische isoperimetrische Ungleichungen reden.

Daten: 17.10, 24.10, 31.10, 7.11, 14.11, 21.11, 28.11, 5.12, 12.12, 19.12, 9.1, 16.1, 23.1, 30.1, 6.2 (15 Termine)

Vorträge mit $\diamond$ sind insbesondere geeignet, um eine Bachelorarbeit anzuschließen.

1. (17.10) **Gruppen I** Definieren Sie den Begriff des Erzeugendensystem einer Grupper und den einer endlich erzeugten Gruppe [2, S. 3]. Definieren Sie den Rang einer abelschen Gruppe [2, Section 1.2]. Was ist speziell Rang 1 und 2. Beweisen Sie, dass die endlichen Gruppen, $\mathbb{Z}^n$, $GL(n,\mathbb{Z})$, $SL(n,\mathbb{Z})$, Heisenberg Gruppen (definiert in [2, S. 4]) und Zopfgruppen (definiert in [6, S. 16 and S. 21]) endliche erzeugte Gruppen sind (Aufgabe). Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $GL(n,\mathbb{R})$ keine endliche erzeugten Gruppen sind (Aufgabe). Definieren Sie eine Untergruppe von endlichem Index. Leiten Sie her, dass eine Untergruppe von endlichem Index endlich erzeugt ist, wenn die Gruppe endlich erzeugt ist (Aufgabe)[2, p, 5]. Definieren Sie frei erzeugte und freie Gruppen [2, S. 5/6]. Konstruktion von freien Gruppen: Definieren Sie ein Wort [2, S. 5], die Länge eines Wortes, eines Unterwortes und Äquivalenzklassen von Worten [7, S.3-4]. Definieren Sie die Wortmetrik und zeigen Sie, dass die Wortmetrik essenziell von der Wahl des Erzeugendensystems abhängt [7, S.3-4].

2. (24.10) **Gruppen II und metrische Räume** Definieren Sie eine Präsentation einer Gruppe und definieren Sie eine endliche Präsentation einer Gruppe [2, S. 10]. Beispiele: Präsentation der leeren Gruppe, einer freien Gruppe, von $\mathbb{Z}_n$ und von $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ [2, S. 11]. Definieren Sie einen Graphen; Erwähnen Sie hierbei Graphen als metrische Räume [2, S.14-15]. Graphen in Verbindung mit Gruppen: Konstruieren Sie einen Cayley Graphen [2, S.15-16]. Beispiele: Cayley Graph einer trivialen Gruppe, einer zyklischen Gruppe, von $\langle a, a^2\rangle$, $\langle a^2, a^3\rangle$, $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$, der Diedergruppe oder der Ikosaedergruppe [2, S.16-18]. Beweisen Sie, dass der Cayley Graph einer frei erzeugten Gruppe ein Baum ist [2, S.19]. Definieren Sie den metrischen Raum, Isometrie und Quasi-Isometrie [2, S.22]. Bespiele: Beweisen Sie, dass $(\mathbb{R}, d)$ und $(\mathbb{Z}, d)$ quasi-isometrisch sind, das jeder beschränkte metrische Raum quasi-isometrisch zu einem Punkt ist, $\mathbb{R} \times [0, 1]$ ist quasi-isometrisch zu $\mathbb{R}$, oder $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist quasi-isometrisch zu $\mathbb{R}^2$; Beweisen Sie, dass wenn S und T endliche Erzeugendensysteme einer Gruppe G sind, dann sind (G, d_S) und (G, d_T) quasi-isometrisch; Wenn T_n ein regulärer n-Baum ist, beweisen Sie, dass T_3 quasi-isometrisch zu T_4 ist; Beweisen Sie für alle $m, n \geq 3$, dass T_m und T_n quasi-isometrisch sind (Aufgabe). Beweisen Sie, dass Beschränktheut eine quasi-isometrische Invariante ist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ nicht quasi-isometrisch zu $[0, 1]$ ist. Leiten Sie her, dass $[0, \infty)$ nicht quasi-isometrisch zu $\mathbb{R}$ ist (Aufgabe)und skizzieren Sie den Beweis, dass $\mathbb{R}$ nicht quasi-isometrisch zu $\mathbb{R}^2$ ist [2, S. 31].

3. (31.10) **Hyperbolische Geometrie I** Poincaré Modell des hyperbolischen Raumes; Möbius Transformationen und Eigenschaften von Möbius Transformationen; Geodäten [8, S. 80-81] oder [1, Section 2.1]. Dreiecke im hyperbolischen Raum, Fläche von Dreiecken [1, Lemma 2.3.1], das ideale Dreieck [2, S. 52], Beweisen Sie, dass alle idealen Dreiecke kongruent sind (Aufgabe). Definieren Sie dünne Dreiecke und den Innenradius eines Dreiecks. Parkettierungen von $\mathbb{H}^2$ [2, S. 53] und Parkettierung des hyperbolischen Raumes durch reguläre n-ecke [2, S. 54].

4. (7.11) ⋄ **Hyperbolische Geometrie II** Isoperimetrische Ungleichung füer die euklidische und die hyperbolische Ebene [7, S. 13], (Aufgabe). Fläche, Geschlecht einer Fläche, Kugel und Torus [2, S. 54]. Fundamentalgruppe einer Fläche [7, S. 9]. Konstruieren Sie eine Fläche mit Geschlecht 2 durch verkleben eines Oktagons. Geben Sie eine hyperbolische Struktur auf dieser Fläche und ein Präsentation dieser Fäche [2, S. 55]. Konstruieren Sie eine hyperbolische geschlossenen Fläche mit Geschlecht $g \geq 2$ durch Verklebung mit einem regulärem $4g$-gon, einer hyperbolischen Struktur und einer Präsentation seiner Fundamentalgruppe [2, S. 56].

5. (14.11)

⋄ **Hyperbolische Geometrie III** Klassifikation von Elementen von $PSL_2(\mathbb{R})$ [1, Definition 2.5]. Definieren Sie Fuchs'sche Gruppen [1, Section 2.2]. Definieren Sie den Fundamentalbereich und eine Parkettierung verbunden mit einer Fuchs'schen Gruppe [1, Section 2.2.1].

6. (21.11)

⋄ **Hyperbolische Geometrie IV** Das Modell des oberen Halbraums des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes, Geodäten, Darstellung von $PSL(2, \mathbb{C})$ auf $\mathbb{H}^3$. [4, Section 1.1] Klassifikation der Elemente in $PSL(2, \mathbb{C})$, die Darstellung von $PSL(2, \mathbb{C})$ auf dem Rand von $\mathbb{H}^3$. Definition Fundamentalbereich. [4, Section 2.2]

7. (28.11)

Hyperbolische Geometrie V $SL_2(\mathbb{Z})$ [3, Lecture 30, b] [3, Proposition 5.38] Dreiecksgruppen, imaginäerer quadratischer Zahlkörper, Bianchi-Gruppe, Fundamentalbereiche für Bianchi-Gruppen[4, Section 7.1, Section 7.3, Theorem 3.4].

8. (5.12) ⋄ **Hyperbolische Gruppen** Definieren Sie einen metrischen Raume und eine Geodäte im metrischen Raum [2, S. 22]. Definieren Sie einen geodätischen Raum. Beispiele für geodätisch metrisch Räume: Graphen mit Einheitskantenlänge, $\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik, jede konvexe Untergruppe von $\mathbb{R}^n$, hyperbolische Räume oder jede vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit [2, S.23-24] (Aufgabe). Beispiele für nicht-geodätisch metrisch Räume: jeder nicht-verbundene Raum, $\mathbb{R}^2$ ohne einen Punkt oder bestimmte unendlich Graphen mit Kanten unterschiedlicher Länge [2, S. 24] (Aufgabe). Definieren Sie ein geodätisches Segment, ein geodätisches Dreieck, dünne Dreiecke, einen hyperbolisch-geodätisch-metrischen Raumes [2, S.9-10]. Beispiele für Räume mit hyperbolischer Metrik: beschränkte geodätische metrische Räume, Bäume, $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}^n$ (Aufgabe). Beispiele für nicht-hyperbolische geodätisch-metrische Räume: $\mathbb{R}^n$ (Aufgabe). Wenn zwei geodätisch-metrische Räume quasi-isometrisch zueinander sind, dann sind sie beide hyperbolisch oder beide nicht-hyperbolisch.

Definieren Sie hyperbolischen Gruppen. Beispiele hyperbolischer Gruppen: Eine endliche Gruppe, eine freie Gruppe, eine fundamentale Gruppe einer Fläche mit Geschlecht $g \geq 2$; Beispiele für nicht-hyperbolische Gruppen: $\mathbb{Z}^n$; Beweisen Sie, dass jede hyperbolische Gruppe endlich präsentiert ist [7, S. 11-12].

9. (12.12)

Entscheidungsproblem I Definieren Sie ein Dehn-Diagramm einer Gruppendarstellung. Geben Sie das Dehn-diagramm für $\langle x, y, |[x, y]\rangle$ an; Definieren Sie den Begriff der Dehnfunktion. Geben Sie Beispiele für Dehnfunktionen verschiedener Gruppen an. Geben Sie eine alternative Definition einer hyperbolischen Gruppe mittels linearer isoperimetrischer Ungleichungen an. Die Heisenberggruppe hat eine kubische isoperimetrische Ungleichung [5, S. 163-165]. Beweisen Sie mit Hilfe von Dehndiagrammen, dass $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nicht hyperbolisch ist.

10. (19.12)

Entscheidungsproblem II Was ist das Wortproblem? Beweisen Sie, dass das Wortproblem für hyperbolische Gruppen lösbar ist. Zeigen Sie, dass der Dehnalgorithmus in linearer Zeit gelöst werden kann. Definieren Sie das Kojugationsproblem und beweisen Sie, dass es für hyperbolische Gruppen lösbar ist. [7, S. 13-18] Definieren Sie das Isomorphismus- und das Mitgliedschaftproblem. Formulieren Sie das Novikov-Boone Theorem.

11. (9.1) **Ripskomplex** Definieren Sie den Simplizialkomplex einer Fundamentalgruppe eines Simplizialkomplexes. Beweisen Sie den Satz von Ribs. Wenden Sie den Satz von Rips auf den Fundamentalbereich von Flächen [7, S.19-22] an.

12. (16.1)

$\diamond$ **Der Rand Hyperbolischer Gruppen** Definieren Sie den Rand von $\mathbb{H}$. Definieren Sie äquivalente Geodäten in einem Cayley-Graph, definieren Sie ferner den Rand einer Gruppe. Zeigen Sie, dass der Rand einer endlichen Gruppe leer, der einer Fuchs'schen Gruppe S^1 und der einer Kleinschen Gruppe hingegen S^2 ist. Führen Sie die Topologie auf dem Rand einer Gruppe, Gromovs inneres Produkt und die Metrik auf dem Rand ein. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nicht hyperbolisch ist. [7, S. 22-25].

13. (23.1)

Wachstum von Gruppen I Definieren Sie die Wachstumsfunktion einer Gruppe und berechnen Sie diese von $G = \mathbb{Z}$ und $\Gamma = \{1\}$, $G = \mathbb{Z}^2$ und $\Gamma = \{(1,0),(0,1)\}$. Beweisen Sie, dass die Wachstumsfunktion immer mindestens linear und höchstens exponentiell wächst. Berechnen Sie die Wachstumsrate einer Heisenberg Gruppe. Beweisen Sie die Relation der Wachstumsfunktionen für eine festgelegte Gruppe und verschiedene Erzeugendensysteme. Zeigen Sie, dass wenn die Wachstumsfunktion einer Gruppe polynomial (bzw. exponentiell) ist, dann wächst sie für ein anderes Erzeugendensystem ebenfalls polynomial (bzw. exponentiell) [3, Lecture 32].

14. (30.1)

Wachstum von Gruppen II Definieren Sie die Kommensurabilität von Gruppen und beweisen Sie, dass Kommensurabilität eine Äquivalenzrelation ist. Zeigen Sie, dass alle endlichen Gruppe kommensurabel zueinander und zu den trivialen Gruppen sind; Beweisen Sie, dass die unendliche Diedergruppe kommensurabel zu $\mathbb{Z}$ ist. Leiten Sie her, dass alle freien nicht-abelschen Gruppen kommensurabel sind und zeigen Sie, dass $SL(2,\mathbb{Z})$ kommensurabel zu jeder nicht-abelschen freien Gruppe ist. Beweisen sie weiterhin, dass die Wachstumseigenschaft durch die Kommensurabilität erhalten bleiben [3, Lecture 32]. Geben sie ein Beispiel für exponentielles Wachstum an.

15. (6.2) $\diamond$ **Wachstum von Gruppen III** Grigortschuk-Gruppe [3, Lecture 35].

Literatur

[1] D. Borthwick *Spectral theory on infinite-area hyperbolic surfaces,* 2nd edition ed., Basel: Birkhauser/Springer, 2016.

[2] B. Bowditch *A course on geometric group theory,* MSJ Memoirs, 2006. Available at https://www.math.ucdavis.edu/~kapovich/280-2009/bhb-ggtcourse.pdf

[3] V. Climenhaga, A. Katok *From groups to geometry and back* American Mathematical Soc., 2017

[4] J. Elstrodt, F. Grunewald, J. Mennicke *Groups acting on hyperbolic spaces* Springer, 1997

[5] D. B. A. Epstein, M. S. Paterson, J. W. Cannon, D. F. Holt, S. V. Levy, W. S. Thurston *Word processing in groups.* Jones and Bartlett Publishers, 1992

[6] J. González-Meneses *Basic results on braid groups* Annales mathématiques Blaise Pascal, 18, 15-59 (2011) available at http://www.numdam.org/article/AMBP_2011__18_1_15_0.pdf

[7] J. Howie *Hyperbolic Groups. Lecture Notes.* available at http://www.macs.hw.ac.uk/~jim/samos.pdf

[8] B. Iversen *Hyperbolic geometry.* Cambridge University Press, 1992.