Proseminar SS16 Nadine Große, Doris Hein
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching` Mi 10:15-11:45 in SR325

Ungleichungen und Abschätzungen - Vortragsplan

---

1. **Cauchy-Schwarz. 20.4.** Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Summen (auf min. zwei verschiedene Weisen, siehe z.B [1] und [5, Kap. IV]) und diskutieren Sie verschiedene Anwendungen oder Verallgemeinerungen: z.B. Äquivalenz der L^1 und L^∞-Norm auf Vektorräumen [1, Satz 3.13] oder siehe [5, Kap. IV] oder [4, 2.6]

2. **Jensensche Ungleichung. 27.4.** [9],[5, Kap. I] Führen Sie den Begriff der konvexen Funktion ein. Zeigen Sie, dass alle konvexen Funktionen stetig sind. Formulieren und beweisen Sie die Jensensche Ungleichung. Diskutieren Sie die wahrscheinlichkeitstheoretische Interpreation der Jensenschen Ungleichung sowie die Interpretation über Massenschwerpunkte. Beweisen Sie als erste Anwendung der Jensenschen Ungleichung die Höldersche Ungleichung für Summen.

3. **Anwendungen und Verallgemeinerung von Jensen. 4.5.** Beweisen Sie die allgemeine Mittelungleichung (Jensen für Exponentialfunktionfunktion) [5, Kap. I.13], und noch einige frei wählbare weitere Anwendungen, wie z.B. Winkelungleichungen im Dreieck [3]. Mehr Beispiele findet man leicht im Netz, siehe z.B. auch [9]. Beweisen Sie die Jensensche Ungleichung für Integrale und wenden Sie diese an, um die Hölderungleichung für Integrale zu erhalten [9].

4. **Einige weiter elementare Ungleichungen. 11.5.** Beweisen Sie die Minkowski-Ungleichung (z.B. [5, Kap. V.8]), die Umordnungsungleichung und die Tschebychevungleichung (z.B. [6]) (und weitere nach freier Wahl, wenn die Zeit es erlaubt).

5. **Satz von Perron-Frobenius und PageRank. 25.5.** Beweisen Sie den Satz von Perron-Frobenius und diskutieren Sie seine Anwendung im Google PageRank Algorithmus. (Hierzu gibt es sehr viel Literatur im Netz.)

6. **Eigenwertungleichungen für hermitische Matrizen - Teil 1. 1.6.**[8] (siehe auch [2, Kap. III.1]) Definieren Sie die Begriffe der hermitischen Matrix, des endlich-dimensionalen Hilbertraumes und der selbstadjungierten Abbildung. Beweisen Sie den Spektralsatz für selbstadjungierte Abbildungen auf einem endlich-dimensionalen Hilbertraum und wenden Sie diesen Satz auf hermitische Matrizen an. Beweisen Sie das Courant-Fischer min-max Theorem und [8, Prop. 3].

7. **Eigenwertungleichungen für hermitische Matrizen - Teil 2. 8.6.**[8] Nutzen Sie die Vorarbeiten aus Teil 1, um verschiedene Eigenwertungleichungen für die Summe zweier hermitischer Matrizen zu erhalten.

8. **Doppelt stochastische Matrizen 15.6.** [2, Kap. II.1] (siehe auch [6]) Führen sie die Begriffe (schwach) majorisiert und doppel stochastisch ein. Diskutieren Sie deren Zusammenhänge untereinander und die Charakterisierung über konvexe Funktionen – beweisen Sie insbesondere [2, Thm. II.1.10] und [2, Thm. II.3.1].

9. **Operatormonotone und -konvexe Funktionen. 22.6.** [2, Thm. V] Führen Sie ein, was es heißt, dass eine reelle Funktion Matrix monoton bzw. Matrix konvex ist und diskutieren Sie Beispiele und Eigenschaften. Zeigen Sie dabei insbesondere [2, Lem. V.1.5] und [2, Thm. V.1.9].

10. **Matrixungleichungen für positive Matrizen. 29.6.** Beweisen Sie [2, Thm. IX.2.1 oder IX.2.2] und [2, Thm. IX.2.5] und führen Sie dazu die notwendigen Begriffe und Vorarbeiten ein. Falls noch Zeit bleibt, können Sie noch [2, Thm. IX.2.10] behandeln.

11. **Ungleichungen für Exponentialfunktion von Matrizen. 6.7.** Führen Sie die Exponentialfunktion für Matrizen ein und beweisen Sie die Lie-Produkt-Formel [2, Thm. IX.1.3]. Diskutieren Sie verschiedene Matrixungleichungen für die Exponentialfunktion, insbesondere [2, Thm. IX.3.1], [2, Thm. IX.3.5] und die Golden-Thompson Ungleichung [2, (IX.14)].

12. **Einige analytische Ungleichungen. 13.7.** Beweisen Sie die Steffensensche Ungleichung (auf zwei Arten [5, Kap. 11.2 und 11.7]), die Youngsche Ungleichung [5, Thm. XIV.1], diskutieren Sie ihre geometrische Interpretation und geben Sie Beispiele.

13. **Lieb-Thirring Ungleichung in 1D. 20.7.** Beweisen Sie die Lieb-Thirring Ungleichung [7]. Beschränken Sie sich dabei auf den eindimensionalen Fall und erklären Sie alle nötigen Sachen derart, dass Analysis I Wissen zum Nachvollziehen ausreicht.

References

[1] Amann, H., and Escher, J. *Analysis. I.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

[2] Bhatia, R. *Matrix analysis*, vol. 169 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1997.

[3] Gräbe, H.-G. *Die Jensensche Ungleichung* `lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet/pdf/graebe-98-1.pdf`.

[4] Mitrinović, D. S. *Analytic inequalities.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970.

[5] Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., and Fink, A. M. *Classical and new inequalities in analysis*, vol. 61 of *Mathematics and its Applications (East European Series).* Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[6] Patzt, P., *Ungleichungstheorie*, `rho.math.uni-rostock.de/SemSkripte/Skript_Peter1.pdf`

[7] Solovej, J. *Lieb-Thirring inequality*, `http://www.ucl.ac.uk/~ucahipe/solovej-lt.pdf`

[8] Tao, T. *254A, Notes 3a: Eigenvalues and sums of Hermitian matrices* `https://terrytao.wordpress.com/2010/01/12/254a-notes-3a-eigenvalues-and-sums-of-hermitian-matrices/`

[9] Treiberg, A. *Inequalities in Analysis*, Slides `www.math.utah.edu/~treiberg/InequalitiesSlides.pdf`