

# Allgemeine Relativitätstheorie

Universität Freiburg, SS 2023

Nadine Große

Skript - Version vom 20. Juli 2023

Wenn Sie (Tipp-)Fehler finden, bin ich dankbar, wenn Sie mir diese  
mitteilen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Vor der allgemeinen Relativitätstheorie</b>	<b>3</b>
I.1. Newtonsche Gravitationstheorie: . . . . .	3
I.2. Spezielle Relativitätstheorie (SRT) . . . . .	5
I.2.1. Kinematik und Dynamik . . . . .	12
I.3. Gravitation in SRT? . . . . .	14
<b>II. Allgemeine Relativitätstheorie</b>	<b>15</b>
II.1. Das Äquivalenzprinzip . . . . .	15
II.1.1. Interpretation der Raumzeit als Lorentzmannigfaltigkeit . . . . .	18
II.1.2. Kovarianzprinzip - Tensoren . . . . .	25
II.1.3. Korrespondenzprinzip . . . . .	37
II.1.4. Gezeitenkräfte . . . . .	38
II.2. Feldgleichungen . . . . .	40
II.3. Die Schwarzschildlösung . . . . .	45
II.3.1. Geodätengleichung und Erhaltungsgrößen . . . . .	47
II.3.2. Qualitatives Verhalten der Geodätischen . . . . .	48
II.3.3. Newtonsch im Limes? . . . . .	52
II.3.4. Klassische Tests der ART . . . . .	53
II.3.5. $r = r_S$ - eine echte Singularität? Nein! . . . . .	57
II.3.6. Andere Lösungen . . . . .	61
II.4. Kosmologie und Isometrien . . . . .	64
II.4.1. Killingvektorfelder . . . . .	64
II.4.2. Kosmologische Raumzeiten . . . . .	74
II.4.3. Materiemodell für perfekte Flüssigkeiten . . . . .	76
II.4.4. Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker . . . . .	77
II.4.5. Zur Messungen der Hubble-Konstante – Rotverschiebung . . . . .	80
II.4.6. Andere kosmologische Modelle . . . . .	85
II.5. Kausalität . . . . .	85
II.5.1. Allgemeines zu Topologie . . . . .	85
II.5.2. Grundlegende Begriffe . . . . .	86
II.5.3. Riemannsche vs. Lorentzeigenschaften . . . . .	93
II.5.4. Global hyperbolisch . . . . .	97
II.6. Singularitäten . . . . .	102
II.6.1. Singularitätentheorem von Raychaudhuri und Komar . . . . .	103
II.6.2. Geometrie von Untermannigfaltigkeiten . . . . .	105
II.6.3. Singularitätentheorem von Penrose . . . . .	107
II.7. Linearisierte Gravitationstheorie . . . . .	111
II.7.1. Freiheit in der Koordinatenwahl . . . . .	112

*Inhaltsverzeichnis*

II.7.2. Newtonscher Limes . . . . .	113
II.7.3. Gravitationswellen . . . . .	114
II.8. Zu Wellengleichungen auf Lorentzmannigfaltigkeiten . . . . .	115
II.8.1. Wellengleichung im $2D$ -Minkowski . . . . .	116
II.8.2. Auf global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten . . . . .	117
II.9. Das Cauchyproblem der Einsteingleichungen . . . . .	118
II.9.1. Die Zwangsbedingungen . . . . .	118
II.9.2. Wohlgestelltheit der Vakuumeinsteingleichungen . . . . .	121
<b>A. Sternmodell</b>	<b>125</b>
A.1. Statische radialsymmetrische Sterne . . . . .	125
A.1.1. Newton . . . . .	125
A.1.2. ART . . . . .	127
A.2. Gravitativer Kollaps . . . . .	129
<b>B. Übungsaufgaben</b>	<b>135</b>
<b>Literatur</b>	<b>154</b>

# Einleitung

Die Gravitation ist die Anziehung von Massen. In der klassischen Physik wird Gravitation als Kraft mit Hilfe des Newtonschen Gravitationsgesetzes beschrieben. Diese Theorie lieferte ein grundlegendes und quantitatives Verständnis der Bewegungen der Planeten unseres Sonnensystems mit sehr präzisen Vorhersagen. Insbesondere bestätigte sie die Keplerschen Gesetze zu Planetenbahnen. So gut diese Theorie auch ist, gab es Mitte des 19. Jahrhunderts besonders genaue Beobachtungen von Merkurdurchgängen durch Le Verrier, der dadurch herausfand, dass die Periheldrehung des Merkurs etwas höher ausfiel als durch die Korrekturen an der elliptischen Vorhersage durch Kepler/Newton, die durch die Gravitation anderer Planeten verursacht wird, erwartbar war.

**Vorl. 1**

Die allgemeine Relativitätstheorie erweitert das Newtonsche Gravitationsgesetz und die spezielle Relativitätstheorie (SRT), dazu später mehr, und hat diese Theorien als Limes bei hinreichend kleinen Raumzeitgebieten, Massedichten und Geschwindigkeiten. Die allgemeine Relativitätstheorie (ART) wurde von Einstein (~1915) entwickelt und beschreibt die Wechselwirkung zwischen Materie, Raum und Zeit. Sie deutet Gravitation als geometrische Theorie und beschreibt diese durch eine gekrümmte vierdimensionale Raumzeit. Als mathematisches Werkzeug zur Beschreibung dieser Raumzeit kommen Begriffe aus der Differentialgeometrie zum Einsatz.

In vielen Tests wurde die ART experimentell bestätigt, z.B. in der Erklärung der Merkurperiheldrehung.



# I. Vor der allgemeinen Relativitätstheorie

## I.1. Newtonsche Gravitationstheorie:

- Eine (sich möglicherweise zeitlich verändernde) *Masseverteilung*  $\rho(t, x)$  erzeugt ein *Gravitationspotential*  $\Psi = \Psi(t, x)$  bestimmt durch:

$$\Delta\Psi = 4\pi G\rho,$$

wobei in euklidischen Koordinaten zu jedem Zeitpunkt

$$\Delta\Psi := \left( \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2} \right) \Psi$$

ist. Hierbei ist  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$  die *Gravitationskonstante* – eine Naturkonstante. Man beachte, dass das Gravitationspotential durch obige Gleichung nicht eindeutig bestimmt ist, sondern z.B. Addition einer Konstante immer wieder eine Lösung bestimmt. Man wählt i.A. (sofern möglich) die Lösung, die im Unendlichen Null wird.

- Ein *Inertialsystem* ist ein Bezugssystem (*Bezugssystem* = Festlegen der räumlichen Koordinaten  $x = (x^1, x^2, x^3)^*$  zu jedem Zeitpunkt und eines Zeitnullpunkts), in dem sich jeder kräftefreie Körper relativ zu diesem Bezugssystem gleichförmig (unbeschleunigt) bewegt (schließt insbesondere den Ruhefall ein). In solchen Inertialsystemen bewegt sich ein Körper im Gravitationspotential  $\Psi$  gemäß den Bewegungsgleichungen<sup>†</sup>  $\ddot{x} = -\nabla\Psi$ . Hat der Körper die Masse  $m$ , nennt man  $-m\nabla\Psi$  die Kraft auf diesen Körper.
- Die obigen Bewegungsgleichungen implementieren schon das *Äquivalenzprinzip*: Ein Beobachter kann in einem geschlossenen Labor, ohne Information von außen, aus dem mechanischen Verhalten von Gegenständen im Labor nicht ablesen, ob er sich in Schwerelosigkeit oder im freien Fall befindet. Das heißt, dass Gravitationskräfte äquivalent zu Trägheitskräften sind und Gravitationskräfte durch Wechsel in ein beschleunigtes Bezugssystem lokal eliminiert werden können. Das entspricht der Gleichheit von *träger Masse* (= der Massebegriff, der an Beschleunigung durch Bewegung koppelt) und *schwerer Masse* (= der Massebegriff, der an die

---

\*Die Indizes für Koordinaten setzen wir immer oben. Wir werden bald noch sehen, warum.

†Mit  $\dot{\phantom{x}}$  meinen wir immer die Zeitableitung, also  $\dot{x} = \partial_t x$  und  $\ddot{x} = \partial_t^2 x$ .

I. Vor der allgemeinen Relativitätstheorie

Gravitation koppelt). In der Bewegungsgleichung von oben ist das schon drin und die Massen sind 'rausgekürzt'. Eigentlich stände dort

$$m_{\text{träge}}\ddot{x} = -m_{\text{schwere}}\nabla\Psi \quad (\text{Kräftegleichgewicht}). \quad (\text{I.1})$$

- Die Energie  $E = \underbrace{\frac{1}{2}m|\dot{x}|^2}_{\text{kinetische Energie } T} + \underbrace{m\Psi}_{\text{potentielle Energie } V}$  ist konstant entlang einer

Lösung  $x(t)$  der obigen Bewegungsgleichung, s. ÜA 1.i. (Ist  $\nabla\Psi$  konstant gleich  $g\partial_{x^3}^*$ , dann ist  $m\Psi = mgx^3$  (bis auf eine Konstante). Die rechte Seite taucht z.B. als potentielle Energie in Nähe der Oberfläche auf, wo die Konstanz von  $\nabla\Psi$  näherungsweise gegeben ist. Dann ist  $g \sim 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  die *Erdbeschleunigung*.)

- Variationelle Beschreibung (Prinzip der stationären Wirkung)* – siehe ÜA 1. Ordnet man einer Bewegung  $x = x(t)$  zwischen zwei Punkten  $q_0 = x(t_0)$  und  $q_1 = x(t_1)$  die *Wirkung*  $L(x)$ , also das Integral

$$L(x) := \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

über die Lagrangefunktion  $\mathcal{L} = T - V$ , zu, dann erfüllt  $x(t)$  genau dann die Bewegungsgleichung, wenn die Wirkung unter allen Bewegungen  $x(t)$  mit  $q_0 = x(t_0)$  und  $q_1 = x(t_1)$  *extremal* ist. D.h.  $x(t)$  erfüllt genau dann die Bewegungsgleichung, wenn für alle  $\delta \in C^\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^3)$  mit  $\delta(t_0) = \delta(t_1) = 0$  und  $x_\epsilon(t) := x(t) + \epsilon\delta(t)$

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} L(x_\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = 0$$

gilt. In diesem Fall heißt  $x(t)$  auch *kritischer Punkt* von  $L$ .

**Beispiel I.1.1.** Ist unsere Masseverteilung einfach nur ein (idealisiertes) Punktteilchen der Masse  $M$  im Punkt  $y \in \mathbb{R}^3$ , ist  $\rho(t, x) = M\delta_y(x)$  und  $\Psi(t, x) = -\frac{GM}{r}$ , wobei  $r = |y - x|$  ist (=Newtonsches Gravitationsgesetz für ein Punktteilchen/Planet). Dann ist die Energie eines Testteilchens im Ursprung (also  $y = 0$ ) der Masse  $m$ , welches nur unter dem Einfluss des Gravitationsfeldes von  $M$  im freien Fall ist:

$$E = \frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 - \frac{GMm}{|x|}.$$

Ist unsere Masseverteilung nicht nur idealisiert in einem Punkt gegeben, aber innerhalb eines Balles vom Radius  $R$  und darin radialsymmetrisch, dann wird  $\Psi$  für  $r > R$  auch durch  $\Psi(t, x) = -\frac{GM}{r}$  mit  $M = \int_0^R \rho(r)4\pi r^2 dr$  beschrieben, vgl. ÜA 2.

Die zugehörige Kraft ist dann  $-m\nabla\Psi = \frac{mMG\vec{r}}{r^3}$ .

\* $\partial_{x^3} := \frac{\partial}{\partial x^3}$  ist hier als der Einheitsvektor in  $x^3$ -Richtung zu verstehen

† $\delta_y$  ist keine Funktion, sondern eine Distribution. Die wichtige Eigenschaft ist, dass für  $A \subset \mathbb{R}^3$  offen,  $\int_A \delta_y d\text{vol}$  gleich 1 ist, falls  $y \in A$  ist und sonst verschwindet. Weg von  $y$  benimmt sich also  $\delta_y$  wie die Nullfunktion.

## 1.2. Spezielle Relativitätstheorie (SRT)

**Bemerkung I.1.2** (Planetenbewegung unter Newton). Nehmen wir an, dass  $\Psi(x) = -\frac{GM}{|x|}$  das Gravitationspotential der Sonne sei, die sich im Koordinatenursprung befindet.

Die folgenden Aussagen werden in ÜA 3 unter der Annahme, dass ein Testkörper auf die Position der Sonne keinen Einfluss hat, und in ÜA 4 ohne diese Annahme, detailliert nachgerechnet.

Dann bewegen sich Testkörper in diesem Gravitationspotential auf zeitlich unveränderlichen Ebenen, in welchen die Sonne liegt. Es können drei Fälle auftreten: Die Bewegung in dieser Ebene verläuft entlang einer Ellipse, einer Parabel oder einer Hyperbel: Beschreibt man die Bahnkurve unter Verwendung von (zweidimensionalen) Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  und betrachtet  $r = r(\varphi)$  (die Spur der Bewegung), dann erhält man für  $u = 1/r$  die Gleichung

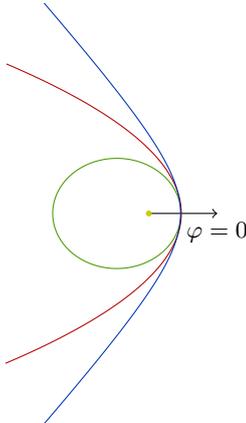
$$u'' + u - \frac{GM}{\ell^2} = 0. \quad (\text{I.2})$$

Hierbei ist  $u' := \frac{du}{d\varphi}$ . Außerdem ist  $\ell = r^2 \dot{\varphi}$  der *Drehimpuls*, eine *Erhaltungsgröße* – also in der Zeit konstant – und kann deshalb aus den Anfangswerten berechnet werden.

Ansatz für die Lösung:

$$u = \frac{1}{p}(1 + \epsilon \cos \varphi).$$

Dann ist  $r = r(\varphi)$  die Darstellung einer Ellipse ( $\epsilon \in [0, 1)$ )/Parabel ( $\epsilon = 1$ )/Hyperbel ( $\epsilon > 1$ ) in Polarkoordinaten deren Mittelpunkt in einem Brennpunkt ist.



Man rechnet nach, dass  $p = \frac{\ell^2}{M}$  ist. Nehmen wir an, dass zur Zeit Null der Planet sich am sonnennächsten Punkt befindet. Der ist immer in einem Radius  $r_0 > 0$  – vgl. ÜA 3.iii. Des Weiteren sei dort  $\varphi = 0$ . Dann sind die Anfangswerte  $r(0) = r_0, \dot{r}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0$  und wir erhalten  $p = \frac{r_0^4 \omega_0^2}{M}$  und  $u(0) = r_0^{-1} = \frac{M}{\ell^2}(1 - \epsilon)$ , also  $\epsilon = \frac{\ell^2}{Mr_0} - 1$ .

## 1.2. Spezielle Relativitätstheorie (SRT)

Bevor wir zur Speziellen Relativitätstheorie kommen, wollen wir noch kurz etwas zur klassischen/Newtonschen Mechanik sagen. Allgemein wird in der Newtonschen Theorie eine absolute Zeit angenommen, genauer einer absolute Gleichzeitigkeit. Das soll heißen, dass es eine globale Uhr gibt und jedem Ereignis unabhängig vom Beobachter eine Zeit

## I. Vor der allgemeinen Relativitätstheorie

zugeordnet ist. Wie groß diese Zeit ist, ist dabei erst mal unwichtig, wichtig ist, dass wir immer wissen können, ob zwei Ereignisse gleichzeitig stattfinden oder nicht.

Außerdem gibt es in der klassischen Mechanik das *Galileisches Relativitätsprinzip*: Alle Bezugssysteme, die durch Translation, räumliche Rotation auseinander hervorgehen oder gleichförmig zueinander bewegt sind, sind äquivalent (= alle Naturgesetze\* haben für alle Beobachter in solchen Bezugssystemen die gleiche Form).<sup>†</sup> Diese Arten der Transformationen, die in der klassischen Mechanik nun erlaubt sind, heißen *Galileo-Transformationen* – die neuen räumlichen Koordinaten  $x'$  ergeben sich aus den alten  $x$  durch:

$$x'(t) = Ax(t) + a + vt$$

wobei  $A \in SO(3)$  eine konstante Rotationsmatrix ist,  $t \in \mathbb{R}$  ist die Zeit, und  $a, v \in \mathbb{R}^3$ .<sup>‡</sup>

Als Spezialfall (Bei allen Wechseln der Bezugssysteme sei nun  $A = \text{Id}$ ) folgt daraus, dass wir die *Newtonsche Geschwindigkeitsaddition* haben: Haben wir drei Körper bzw. Testteilchen A, B, C, dann messe A in einem Bezugssystem, in welchem er in Ruhe ist, die Relativgeschwindigkeit  $u$  von C (also den Ort von C als  $x_C(t) = ut + c_0$ ) und  $u'$  von B ( $x_B(t) = vt + b_0$ ). Analog messe B im Bezugssystem, in welchem er in Ruhe sei ( $x'_B(t) = 0$ ), die Relativgeschwindigkeit  $v$  von C ( $x'_C(t) = u't + c_1$ ). Damit ist

$$0 \stackrel{!}{=} x'_B(t) = x_B(t) + a + wt$$

und somit  $a = -b_0$  und  $w = -u$ . Damit nun  $x'_C(t) = ut + c_0 + a + wt$  sein und damit  $u' = v - u$ . Also gilt  $u = v + u'$ .

Das müsste dann insbesondere auch gelten, wenn eines der Teilchen Licht ist. Aber Experimente zeigen, dass die Lichtgeschwindigkeit (bzgl. eines festen Bezugssystems) konstant ist. (Sie hängt insbesondere nicht von Geschwindigkeit der emittierenden Quelle ab.) Insbesondere ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum in allen Bezugssystemen gleich.<sup>§</sup>

Will man also auch Bewegungen von Teilchen, deren Geschwindigkeiten nicht mehr genügend klein verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit sind, oder von Licht selbst beschreiben, reicht die Newtonsche Theorie nicht mehr aus.

Für seine spezielle Relativitätstheorie (SRT) verfasste Einstein zwei Postulate:<sup>¶</sup>

---

\*die Newton kannte

<sup>†</sup>Damit legt man insbesondere einen Begriff von *ruhend in einem Bezugssystem* fest: Ein Körper ist in einem Bezugssystem in Ruhe, wenn es zu jedem Zeitpunkt, die gleichen räumlichen Koordinaten hat.

<sup>‡</sup>Es kann auch  $A \in O(3)$  und zusätzlich  $t \mapsto -t$  erlaubt sein, also räumliche Spiegelung und Zeitspiegelungen einschließen. Das hängt davon ab, welche Naturgesetze man genau betrachtet. Lässt man zum Beispiel Reibung zu, sind Zeitspiegelungen keine erlaubte Transformation sein. Weiterhin gibt es rechts- und linkshändige Neutrinos, die sich echt anders verhalten, s. <https://de.wikipedia.org/wiki/Paritätsverletzung>.

<sup>§</sup>Experiment (1887): [https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson%E2%80%93Morley\\_experiment](https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson%E2%80%93Morley_experiment)

<sup>¶</sup>Einstein verfasste die SRT insbesondere für die Elektrodynamik [3]. Die Maxwellgleichungen (~1865, <https://de.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Gleichungen>) kann man aber auch so lesen, dass sie schon eine konstante Lichtgeschwindigkeit voraussagen. Aber es gab zu dieser Zeit verschiedene konkurrierende Theorien des Elektromagnetismus, z.B. basierend auf Äther. Dieses Äther sollte eigentlich im obigen Experiment von Michelson und Morley nachgewiesen werden.

## I.2. Spezielle Relativitätstheorie (SRT)

Dazu ist ein Inertialsystem noch immer ein Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Körper gleichförmig bewegt.

- (1) Das Relativitätsprinzip: Die Gesetze der Physik (Newton II ( $F = ma^*$ ), Elektrodynamik) sind in allen Inertialsystemen die gleichen. Es gibt insbesondere kein bevorzugtes Inertialsystem.
- (2) Die Geschwindigkeit von Licht im Vakuum ist konstant und hängt insbesondere nicht von der Geschwindigkeit der Quelle ab. Nichts bewegt sich schneller als die Lichtgeschwindigkeit.

Das erste Postulat ist immer noch das im Newtonschen (mit 'mehr Gesetzen') – allerdings wird das hier nicht mehr implizieren, dass die zwei Inertialsysteme mittels einer Galileo-Transformation auseinander hervorgehen, da diese die Newtonsche Geschwindigkeitsaddition impliziert, was der konstanten Lichtgeschwindigkeit im zweiten Postulat widerspricht.

Um das Postulat zur Lichtgeschwindigkeit zu implementieren, betrachtet man nun Zeit und Raum nicht mehr getrennt voneinander sondern als  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ . Für  $(v^0, \vec{v} = (v^1, v^2, v^3)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  soll hierbei die erste Koordinate die Zeit sein und die anderen die räumlichen Koordinaten sein. Eigentlich ist das ungünstig, weil Zeit und Länge andere Einheiten tragen und man damit das eigentlich nicht in einen Vektor zusammenfasst. Aber wir denken bei  $v^0$  in Wirklichkeit an Lichtgeschwindigkeit mal Zeit, was nun auch die Einheit Länge hat.

**Vorl. 2**

In  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  sind nun durch die konstante Geschwindigkeit insbesondere die Bahnkurven von Lichtteilchen festgelegt – nämlich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit  $c \sim 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Solche Bahnkurven nennen wir *lichtartige* Geraden. Die Lichtgeschwindigkeit wird oft vereinfachend auf  $c = 1$  gesetzt und es wird ohne Einheiten gearbeitet. Machen wir auch, das hat den kleinen Vorteil, dass wir obiges Einheitenproblem nicht mitschleppen müssen. Es hat den größeren Nachteil, dass man die Einheiten nicht sieht und es nachdenken muss, ob irgendwas nun mit  $c$  oder  $c^2$  geht.

Dazu wird die SRT im Minkowskiraum  $M$  beschrieben:  $M = \mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  mit dem inneren Produkt  $\eta$ , definiert durch die Matrix  $J := \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , d.h. für  $v, w \in \mathbb{R}^4$  gilt<sup>†</sup>

$$\eta(v, w) := \langle v, Jw \rangle = v^T Jw = -v^0 w^0 + v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3 + v^4 w^4 =: \eta_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta.$$

Der letzte Ausdruck eigentlich eine Summe über alle  $\alpha, \beta$ , aber wir verwenden die *Einsteinsche Summenkonvention*, in der über wiederkehrende Indizes, die einmal oben und einmal unten stehen, automatisch summiert wird.

Analog definiert man Minkowskiraum  $\mathbb{R}^{1,m}$  mit  $m$  räumlichen Koordinaten.

<sup>\*</sup> $m$  wird dann nicht mehr konstant sein..

<sup>†</sup>In dieser Schreibweise steht  $\eta_{\alpha\beta}$  für die Einträge der Matrix  $J = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . Griechische Indizes  $\alpha, \beta, \dots$  stehen im Folgenden immer für Koordinaten einschließlich der nullten Koordinate, der Zeitkoordinate, während wir für rein räumliche Koordinaten i.A. lateinische Indizes  $i, j, \dots$  verwenden werden.

I. Vor der allgemeinen Relativitätstheorie

**Satz I.2.1** (Borchers-Hegerfeldt [2]). \* Sei  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{1,3}$  versehen mit dem Innenprodukt  $\eta(v, v) := -(v^0)^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$ . Sei  $T: M \rightarrow M$  eine bijektive Abbildung, welche lichtartige Geraden auf lichtartige Geraden abbildet. Dann ist  $T$  eine affine Abbildung. Die Menge solcher Abbildungen bilden eine Gruppe<sup>†</sup>, die durch

(i) die Lorentzgruppe (Das ist die Invarianzgruppe vom Minkowskiraum, s. Lemma I.2.2.)

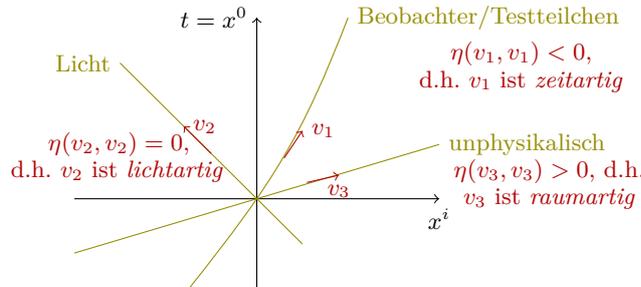
(ii) Translationen von  $M$

(iii) Dilatationen (Multiplikation mit einem Skalar)

erzeugt wird.

Wir ignorieren vorerst die Dilatationen, dazu mehr auf Seite 11.

Wir schreiben auch  $\langle v, w \rangle_L := \eta(v, w)$  und  $|v|_L^2 := \eta(v, v)$  – beachten Sie, dass  $|v|_L^2$  auch negativ sein kann. Nach Konstruktion hat das Licht zu jedem Zeitpunkt einen Geschwindigkeitsvektor  $v \in \mathbb{R}^4$  mit  $|v|_L^2 = 0$ , einen sogenannten *lichtartigen* Vektor. Für ein Teilchen mit räumlicher Geschwindigkeit kleiner der Lichtgeschwindigkeit ist der Geschwindigkeitsvektor im



Minkowskiraum zeitartig, d.h.  $|v|_L^2 < 0$ . Raumartige Vektoren, also  $|v|_L^2 > 0$ , entsprechen einer räumlichen Geschwindigkeit größer der Lichtgeschwindigkeit und sind daher nach Postulat unphysikalisch.

Wir wollen nun die Lorentzgruppe näher bestimmen:

**Lemma I.2.2.** Sei  $M$  der  $m + 1$ -dimensionale Minkowskiraum. Sei  $\varphi: M \rightarrow M$  eine bijektive Abbildung, die das Minkowskiprodukt erhält, d.h.

$$\eta(\varphi(x), \varphi(y)) = \eta(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in M.$$

Dann ist  $\varphi$  linear, und es gibt eine Matrix  $A \in O(m, 1) := \{A \in M_{\mathbb{R}}(m+1) \mid A^T J A = J\}$ , so dass  $\varphi(x) = Ax$  gilt. Solche Abbildungen heißen Lorentztransformationen.

*Beweis.* Sei  $w_{x,y} := \varphi(x + y) - \varphi(x) - \varphi(y)$ , Angenommen  $w_{x,y} \neq 0$ . Dann gibt es einen Vektor  $w'$  mit  $\eta(w', w_{x,y}) \neq 0$ , und wir haben

$$\begin{aligned} 0 \neq \eta(\varphi(x + y) - \varphi(x) - \varphi(y), w') &= \eta(x + y, \varphi^{-1}(w')) - \eta(x, \varphi^{-1}(w')) - \eta(y, \varphi^{-1}(w')) \\ &= \eta(0, \varphi^{-1}(w')) = 0. \end{aligned}$$

\*gilt analog auch für  $M = \mathbb{R}^{1,n}$  mit  $n \geq 3$

†Diese Gruppe ist auch die Invarianzgruppe der Maxwellgleichungen, die die Propagation von elektromagnetischer Strahlung, wie z.B. Licht, beschreiben.

## I.2. Spezielle Relativitätstheorie (SRT)

Analog sieht man  $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ . Also ist  $\varphi$  linear und kann durch eine Matrix  $A$  beschrieben werden. Wir haben also

$$x^T J y = \eta(x, y) = \eta(Ax, Ay) = (Ax)^T J (Ay) = x^T A^T J A y$$

für alle  $x, y \in M$ . □

**Bemerkung I.2.3.** Die reine Änderung der Zeitrichtung  $(x^0, \vec{x}) \mapsto (-x^0, \vec{x})$  ist eine Lorentztransformation. Wenn man sich für diese nicht interessiert, kann man

$$\mathcal{L}^\uparrow(m+1) := \{A \in O(m, 1) \mid a_{11} > 0\}$$

betrachten – die *zeitorientierungserhaltenden* Lorentztransformationen. Diese sind eine Untergruppe von  $O(m, 1)$ . Die folgenden Transformationen erzeugen  $\mathcal{L}^\uparrow(m+1)$  (nicht minimal erzeugend).

(i) Rotationen in räumliche Richtungen:

$$R := \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \quad B \in SO(m) = \{A \in O(m) \mid \det A = 1\}.$$

(ii) Räumliche Spiegelungen: Wir betrachten erst einmal den Fall  $m = 2$ : Ist  $B \in O(2) \setminus SO(2)$ , hat also die Form  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$ , dann erhält man in (i) noch immer ein Element aus  $\mathcal{L}^\uparrow(3)$  (=Rotation um den Winkel  $\alpha$  und dann Spiegelung an der  $x_2$ -Achse). Insbesondere ist  $S_2 := \text{diag}(1, 1, -1) \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$ . Analog ist  $S_n := \text{diag}(1, \dots, 1, -1) \in \mathcal{L}^\uparrow(n+1)$ .

(iii) *Lorentz-Boosts*:

$$L_\eta^1 := \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta & 0 \\ \sinh \eta & \cosh \eta & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$$

und analog für alle  $i = 1, \dots, m$

$$L_\eta^i := \begin{pmatrix} \cosh \eta & 0 & \sinh \eta & 0 \\ 0 & \text{Id}_{i-1, i-1} & 0 & 0 \\ \sinh \eta & 0 & \cosh \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{Id}_{m-i, m-i} \end{pmatrix} \quad \eta \in \mathbb{R}$$

Diese Matrizen kann man als die 'Rotationen im hyperbolischen' ansehen, da  $\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1$  ist, vgl. auch ÜA 5.

**Eigenzeit eines Testteilchens:** Ist ein Testteilchen in einem Bezugssystem  $(t = x^0, x^i)$  in Ruhe, sei  $t$  die auch für das Testteilchen vergehende Zeit, die *Eigenzeit*. Es bewege sich in diesem Bezugssystem nun ein Beobachter räumlich mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}$  – also im Minkowskiraum entlang  $x(t) = (t, \vec{v}t)^T$  (wir ignorieren hier Translationen). Dann ist  $\dot{x}(t) = (1, \vec{v})$  und wird im Falle von drei Raumdimensionen

## I. Vor der allgemeinen Relativitätstheorie

*Vierergeschwindigkeit* genannt. Da die Geschwindigkeit des Beobachters kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein sollte, muss  $|\vec{v}| < 1$  sein.

*Welche Zeit vergeht für den Beobachter?* Dazu verwenden wir eine Lorentztransformation  $A$ , so dass  $Ax(t)$  die Form  $(s(t), \vec{0})^T$  hat, also sich der Beobachter bzgl. des neuen Bezugssystems in Ruhe befindet, vgl. ÜA 5. Eine solche Lorentztransformation existiert immer, ist jedoch nicht eindeutig. Allerdings ist  $s(t)$  modulo Vorzeichen eindeutig bestimmt: Da  $A$  das Minkowskiprodukt erhält, gilt  $-s(t)^2 = -t^2 + |\vec{v}|^2 t^2 = -\eta(\dot{x}, \dot{x})t^2$ . Nun ist für den Beobachter  $s(t)$  die verstreichende Eigenzeit und nicht das ursprüngliche  $t$ , was einfach nur die Parametrisierung beschrieb. Parametrisieren wir  $x(t)$  um mittels  $\tau = s(t)$ , als  $\gamma(\tau) := x\left(\frac{\tau}{\sqrt{1-|\vec{v}|^2}}\right) = \left(\frac{\tau}{\sqrt{1-|\vec{v}|^2}}, \frac{\tau}{\sqrt{1-|\vec{v}|^2}}\vec{v}\right)^T$ , dann ist  $A\gamma(\tau) = (\tau, \vec{0})^T$ , also ist der Beobachter *nach Eigenzeit parametrisiert*.\*

Habe der Beobachter nun keine konstante räumliche Geschwindigkeit, dann gibt es keine Lorentztransformation, die seine Kurve auf die  $x^0$  abbildet. Aber infinitesimal ist das natürlich immer möglich<sup>†</sup> und definiert so auch den Begriff der Eigenzeit:  $d\tau = \sqrt{-\eta(\dot{x}(t), \dot{x}(t))}dt$  – d.h. zwischen  $x(t_0)$  und  $x(t_1)$  vergeht für den Beobachter die Eigenzeit

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{-\eta(\dot{x}(t), \dot{x}(t))} dt.$$

Ist der Beobachter schon in Eigenzeit parametrisiert, ist insbesondere  $\eta(\dot{x}(t), \dot{x}(t)) = -1$  für alle  $t$ . Im Folgenden seien unsere Beobachter immer schon in Eigenzeit und in unsere 'feste Zeitrichtung' parametrisiert, also eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve  $\gamma: I \rightarrow M$  mit  $\eta(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = -1$  (*zeitartig*:  $\eta(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) < 0$  und *zukunftsgerichtet*:  $\dot{\gamma}^0(t) > 0$ ).

In Koordinaten  $x^\alpha$  wird die allgemeine Formel für die Eigenzeit eines Beobachters oft als

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{I.3}$$

geschrieben. Das ist erst einmal nur eine formale Schreibweise, die an die Tensoren-schreibweise<sup>‡</sup> angelehnt ist.

*Wie muss man das lesen?* Erstens ist hier  $dx^\alpha$  als eine *Einsform* gemeint, d.h. als lineare Abbildung  $dx^\alpha: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch<sup>§</sup>  $dx^\alpha(\partial_{x^\beta}) = \delta_\alpha^\beta$ . Allgemein ist für

\*Für eine (parametrisierte) Kurve  $\alpha: t \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt  $t$  *Parameter* und für ein Diffeomorphismus  $\varphi: J \rightarrow I$  ist  $\hat{\alpha}(s) := \alpha(\varphi(s))$  eine *Umparametrisierung* von  $\alpha$ . Die Kurven  $\alpha$  und  $\hat{\alpha}$  haben das gleiche Bild in  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>†</sup>d.h. für jeden Punkt der Kurve gibt es eine Lorentztransformation, die den Geschwindigkeitsvektor auf  $(-1, \vec{0})^T$  abbildet und damit infinitesimal die Eigenzeit definiert. Das ist analog zur Aussage in der Kurventheorie im euklidischen  $\mathbb{R}^n$ , dass jede reguläre Kurve  $x(t)$  (*regulär* = nirgends Geschwindigkeit  $\dot{x} = 0$ ) nach Bogenlänge parametrisiert werden kann, d.h.  $\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle_{\text{eukl.}} = 1$ .

<sup>‡</sup>vgl. (II.6)

<sup>§</sup> $\partial_\beta := \partial_{x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta}$  ist hier als der Einheitsvektor im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$  in Richtung der Koordinate  $x^\beta$  zu verstehen. Warum da die gleiche Notation wie für die  $\beta$ .te partielle Ableitung verwendet wird, siehe ÜA 14 und Seite 69

## I.2. Spezielle Relativitätstheorie (SRT)

$f: U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  dann die Einsform  $df: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als  $df = \frac{\partial f}{\partial z^k} dz^k$ . Für einen Beobachter, der sich entlang  $x(t) = (x^0(t), \dots, x^n(t))$  bewegt, ist im Punkt  $x(t)$  der Geschwindigkeitsvektor  $\dot{x}(t) = \dot{x}^\alpha(t) \partial_{x^\alpha}$ . Dann ist  $dx^\alpha = \dot{x}^\alpha(t) dt$ . Also ist formal  $\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -\eta_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha(t) \dot{x}^\beta(t) dt^2 = -\eta(\dot{x}(t), \dot{x}(t)) dt^2$  und damit das formale Quadrat von  $d\tau = \sqrt{-\eta(\dot{x}(t), \dot{x}(t))} dt$ .

**Wie ist das mit der Eigenzeit von Licht?** Sei  $x(t)$  die Kurve eines Lichtteilchens, dann ist  $\eta(\dot{x}, \dot{x}) = 0$  für alle  $t$ . Es gibt also keine Lorentztransformation, die  $x(t)$  auf ein Bezugssystem abbildet, in dem das Lichtteilchen in Ruhe ist. Benutzt man aber einfach ganz analog die gleiche Definition von Eigenzeit wie oben, so ist  $d\tau = \sqrt{-\eta(\dot{x}(t), \dot{x}(t))} dt = 0$ . Für Licht vergeht also keine Eigenzeit. Wegen Stetigkeit erkennt man schon, um so näher die räumliche Geschwindigkeit eines Teilchens in einem festen Bezugssystem an der Lichtgeschwindigkeit ist, desto weniger Eigenzeit vergeht für das Teilchen (s. Zwillingparadoxon, ÜA 7).

**Was ist mit den Dilatationen aus Satz I.2.1?** In den obigen Betrachtungen haben wir bis jetzt nur die Lorentztransformationen verwendet. Die Translation haben auf die Geschwindigkeit und damit auf die Eigenzeit keinen Einfluss. Verwenden wir eine Dilatation, so würde sich die Eigenzeit eines Beobachters skalieren. Wir wollen aber (erstes Postulat), dass in jedem Inertialsystem die gleichen Gesetze der Physik gelten, also auch die gleiche Eigenzeit vergeht. Also sind die Dilatationen keine Transformation zwischen Inertialsystemen.\* Die Invarianzgruppe der SRT<sup>†</sup> ist also die *Poincaré-Gruppe*, also die Gruppe, die durch die Lorentzgruppe und Translationen erzeugt wird:

**Was bedeutet die konstante Lichtgeschwindigkeit für die Synchronisation von Uhren?** Während man in der Newtonschen Theorie, 'beliebig schnell' kommunizieren kann und damit einen Begriff von absoluter Gleichzeitigkeit hat (=alle Uhren zu einer Zeit 'beliebig genau' synchronisieren kann), ist Kommunikation nun durch die Lichtgeschwindigkeit begrenzt.

Vorl. 3

In einem Bezugssystem kann ich Uhren synchronisieren (ich weiß ja, wie lange das Licht irgendwohin braucht), aber diese Synchronisation wird vom Bezugssystem abhängen, vgl. Abbildung I.1.

Hat ein Beobachter 2 eine Uhr in einem festen Abstand zu sich, schickt er einen Lichtstrahl (gelb im Bild) los zu dieser Uhr. In dem Moment, wo dieser Lichtstrahl an dieser Uhr ankommt (roter Punkt), wird er dort zurückgeschickt. Der Beobachter hat die Zeit gemessen, die zwischen Abschicken und Zurückkommen des Lichtes vergangen ist. Da die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, hat das Licht die Hälfte dieser Zeit gebraucht, um zur Uhr zu gelangen. Zur Hälfte der verstrichenen Zeit, war der Beobachter gerade in dem oliven Punkt. Also gibt die olive Gerade das Jetzt (alles was sich für den Beobachter gleichzeitig ist) des zweiten Beobachters zum oliven Zeitpunkt an. Hat der Beobachter 2, den Geschwindigkeitsvektor  $v$ , so ist die olive Gerade parallel zu  $v^\perp = \{y \in M \mid \eta(v, y) = 0\}$  – ÜA 5. Im Gegensatz dazu ist das Jetzt des Beobachter 1 –

---

\*Strenggenommen haben wir hier verwendet, dass es in unserer Theorie überhaupt ein Testteilchen/massives Teilchen gibt. Elektromagnetismus für (ausschließlich) Photonen ist dagegen auch dilatationsinvariant.

<sup>†</sup>=die Gruppe der Transformationen, die ein Inertialsystem in ein anderes Inertialsystem überführt

## I. Vor der allgemeinen Relativitätstheorie

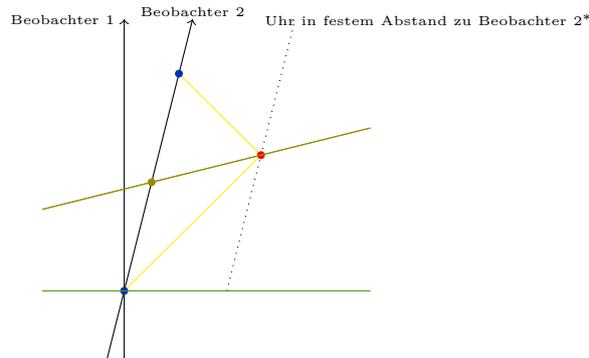


Abb. I.1.: Wie synchronisiert ein Beobachter seine Uhren?

in Ruhe zum Bezugssystem, also Geschwindigkeit  $(-1, 0, 0, 0)$  – durch die Hyperebenen mit  $t = \text{const}$  gegeben.

### I.2.1. Kinematik und Dynamik

Ein Beobachter in Ruhe (Geschwindigkeit  $\hat{x} = (1, \vec{0})^T$ ) misst die Relativgeschwindigkeit eines Testteilchens der Vierergeschwindigkeit  $\hat{z}$  als  $\hat{v} = (0, \vec{v})$  mit  $\hat{z} = a(\hat{x} + \hat{v})$ . Die Rolle von  $a$  ist nur Skalierung – wegen  $\eta(\hat{z}, \hat{z}) = -1$  muss  $a = (1 - \eta(\hat{v}, \hat{v}))^{-\frac{1}{2}}$  sein. (Da der Beobachter sich mit Geschwindigkeit kleiner Lichtgeschwindigkeit bewegt, ist  $\eta(\hat{v}, \hat{v}) < 1$ .)

Was bedeutet das für unseren Beobachter bzgl. eines anderen Bezugssystems, das aus obigem Ruhesystem durch die Lorentztransformation  $A$  entsteht? Dann hat der Beobachter im neuen Bezugssystem die Geschwindigkeit  $x = A\hat{x}$ . Sein Jetzt spielt sich nicht mehr in der  $t = \text{const}$  Ebene ab, sondern in  $x^\perp := \{y \in M \mid \eta(x, y) = 0\}$ . Alle Vektoren in  $x^\perp$  sind raumartig, vgl. ÜA 5. Das heißt, was der Beobachter  $x$  mit der Relativgeschwindigkeit  $v$  wahrnimmt, ist ein Teilchen mit der Geschwindigkeit:

$$z = \frac{x + v}{\sqrt{1 - \eta(v, v)}},$$

also  $v = A\hat{v}$  wegen Linearität. Wegen  $\eta(x, v) = 0$  ist  $\eta(z, x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \eta(v, v)}}$ .

---

\*vgl. ÜA 5

## I.2. Spezielle Relativitätstheorie (SRT)

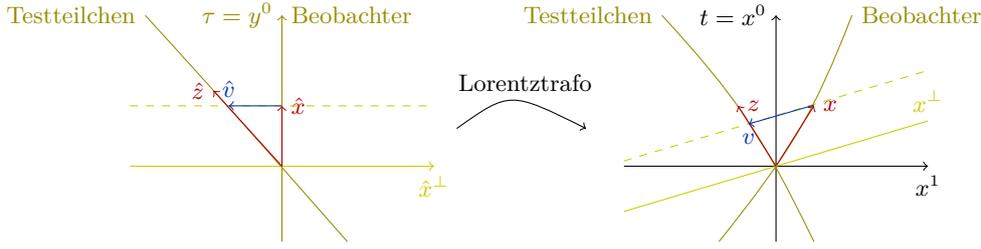


Abb. I.2.: Relativgeschwindigkeit  $v = -\frac{z}{\eta(x,z)} - x$  von  $z$  für den Beobachter mit Geschwindigkeit  $x$ . (Der Winkel von  $x$  zur  $t = 0$  Ebene ist immer der gleiche wie der der Zeitachse zur  $x^\perp$ .)

Newtonsch wird Dynamik durch Kräfte/Impulse beschrieben – Impuls = Masse  $\times$  Geschwindigkeit. Wir definieren nun analog den Impuls mit der Geschwindigkeit  $z$  des Teilchens im Minkowskiraum als  $p = m_0 z$ , wobei  $m_0$  die Ruhemasse des Teilchens ist [Ist das Teilchen in Ruhe, also  $\gamma(t) = (t, \vec{0})$ , dann ist  $p = (m_0, \vec{0})^*$ .] Der Impuls wird nun *Energie-Impuls-Vektor* genannt und oft statt als Vektor als 1-Form definiert:  $p := -m_0 \eta(z, \cdot)$ . Analog wie in der Kinematik kann der Beobachter mit Geschwindigkeit  $x$  nur in der  $x^\perp$ -Ebene beobachten. D.h. beobachtet er ein Teilchen mit Ruhemasse  $m_0$  und der Relativgeschwindigkeit  $v$ , hat das Teilchen den Impuls:

$$p = -\frac{m_0 \eta(x + v, \cdot)}{\sqrt{1 - \eta(v, v)}}$$

Ist das Teilchen relativ zum Beobachter in Ruhe, ist  $v = 0$  und damit  $E := p(x) = m_0$  ( $E$  ist die Energie, Lichtgeschwindigkeit  $c = 1$ , in der Ruhe:  $E = m_0 c^2$ ). Die Energie ist der Teil des Energie-Impuls-Vektors, der parallel zu  $x$  ist. Im Allgemeinen bewegten Zustand ist dann

$$E := p(x) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \eta(v, v)}}$$

– und damit ist die Energie abhängig von der Relativgeschwindigkeit. Der Teil des Energie-Impuls-Vektors, der in  $x^\perp$  liegt, ist der (*Dreier*)*Impuls* (= räumliche Impuls).

Bremsen wir ein Teilchen mit  $E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \eta(v, v)}}$  abrupt auf Relativgeschwindigkeit Null ab. Dann muss  $E - m_0 c^2 = E - m_0$  die 'abgegebene' (z.B. in Wärme umgewandelte) Energie sein:

$$E - m_0 = m_0 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \eta(v, v)}} \right)$$

Konsistenzcheck im Grenzfall  $\eta(v, v) \ll 1$  und im Ruhesystem  $v = (0, \vec{v})$ : Es ist  $\eta(v, v) = |\vec{v}|^2$  und

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \eta(v, v)}} = \frac{1}{2} \eta(v, v) + O(\eta(v, v)^2).$$

\*Für  $c$  nicht auf Eins gesetzt:  $\gamma(t) = (ct, \vec{0})$  und  $p = (m_0 c, \vec{0})$ .

## I. Vor der allgemeinen Relativitätstheorie

Damit ist  $\frac{1}{2}m_0|\vec{v}|^2$  der dominierende Term – also genau die kinetische Energie in der Newtonschen Theorie.\*

### I.3. Gravitation in SRT?

Bis jetzt haben wir nur SRT nur ohne Gravitationsfelder betrachtet. Es stellt sich die Frage, ob die Newtonsche Formulierung des Gravitationsgesetzes

$$\ddot{x} = -\nabla\Phi, \quad \Delta\Psi = 4\pi G\rho$$

nicht irgendwie doch mit der SRT kompatibel ist.

Das erste Problem ist, dass wir für SRT für die Bewegungsgleichung eine Formulierung mit Vierervektoren benötigen. Außerdem ist die zweite Gleichung  $\Delta\Psi = 4\pi G\rho$  nicht Lorentz-invariant, sondern: Ändert man die Dichte  $\rho$  in einer kleinen Umgebung ändert sich automatisch das Potential  $\Psi$  im ganzen Raum - instantan, also schneller als das Licht.†

---

\*Normalerweise ist Energie immer nur bis auf eine Konstante bestimmt, so dass man eigentlich die Ruheenergie einfach weglassen möchte. Aber im Relativistischen ist  $E = \frac{m_0}{\sqrt{1-\eta(v,v)}} \sim m_0 + \frac{m_0|v|^2}{2}$  für kleine Geschwindigkeiten  $v$ . Will man, dass Massen im nichtrelativistischen Limes Gravitation erzeugen, kann man die Konstante  $m_0$  nicht einfach weglassen.

†vgl. [11, §7.1] für eine erweiterte Diskussion

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

### II.1. Das Äquivalenzprinzip

Das *Äquivalenzprinzip*, wie es schon bei Galileo/Newton vorkam, vgl. (I.1), wurde von Einstein ausgenutzt, um es zur Grundlage für einen Ansatz zu machen, Gravitation kompatibel zur SRT zu beschreiben:

*In einem geschlossenen System, ohne Informationen von außen, kann man nicht entscheiden, ob die Bewegung durch eine Beschleunigung des Systems oder ein Gravitationsfeld erzeugt wird. Die träge Masse ist gleich der schweren Masse.*

#### Auswirkung des Äquivalenzprinzips auf frei fallende Teilchen

Wir betrachten ein Teilchen, auf welches ausschließlich die Gravitation wirkt. Nach dem Äquivalenzprinzip gibt es (unabhängig von der Masse des fallenden Teilchens) gibt es zu jeder Eigenzeit  $\tau = \tau_0$  des Teilchens ( $d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$ , vgl. (I.3)) lokal ein Koordinatensystem  $y = (y^0, \dots, y^n) \in V' \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , in welchem die Bewegung  $y(\tau)$  des Teilchens zur Eigenzeit  $\tau_0$ , die einer gleichförmigen Bewegung ist.\*

$$\frac{d^2 y^\alpha}{d\tau^2}(\tau_0) = 0.$$

Wir wollen uns nun anschauen, was dies für ein anderes Koordinatensystem  $x = x(y) \in V \subset \mathbb{R}^{n+1}$  † bedeutet: Dann ist  $\frac{d}{d\tau} y^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}$  und  $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} = \delta_\lambda^\mu$  ‡ (Alles mit Einsteinscher Summenkonvention, vgl. Seite 7, wobei ein oberer/unterer Index, der unterm Bruchstrich steht, insgesamt als unterer/oberer Index angesehen wird).

Wir erhalten damit (alles in  $\tau = \tau_0$  und  $x = x(y(\tau_0))$ ):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 y^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, & \left| \cdot \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \right| \sum_\alpha \\ 0 &= \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \underbrace{\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}_{=: \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x)} = \ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

\*Dieses Koordinatensystem bildet im Allgemeinen nur den freien Fall dieses Teilchens dann auf eine Gerade in diesem Koordinatensystem ab. Für ein benachbartes Teilchen braucht man im Allgemeinen ein anderes Koordinatensystem.

†Bei uns seien immer nur glatte Funktionen erlaubt.  $x \mapsto y$  soll lokal ein Diffeomorphismus sein, d.h. glatt und auch die Umkehrung  $y \mapsto x$  ist glatt.

‡Das ist die Kettenregel angewendet bei Differentiation von  $y^\alpha = y^\alpha(x(y))$  in  $y^\beta$ -Richtung.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

((II.1) gilt für jede Koordinate  $\lambda$ . Das sind also  $n + 1$  (skalare) Gleichungen.)

Auch die Eigenzeit kann in den neuen Koordinaten geschrieben werden: Es ist  $dy^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu$  und damit

$$d\tau^2 = - \underbrace{\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}}_{=: g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)} dx^\mu dx^\nu.$$

Dann ist  $g_{\mu\nu}: V \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion.

Wir werden das bald geometrisch interpretieren – die  $g_{\mu\nu}$  als *Lorentzmetrik* und (II.1) als zugehörige Geodätengleichung. Zunächst aber sammeln wir, was wir über  $g$  und  $\Gamma$  wissen?

- (i) Wie  $\eta = (\eta_{\alpha\beta})$  fassen wir die  $g_x = (g_{\mu\nu}(x))$  für jedes  $x$  als Matrix zusammen. Während  $\eta$  unabhängig vom Punkt  $x$  ist, ist das für  $g_x$  i.A. nicht der Fall. Aber wir haben eine glatte Funktion  $g: U \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n+1)$ ,  $x \mapsto g_x$ .
- (ii) Welche Matrizen  $g_x$  können auftreten? Nach Definition von  $g$  gibt es einen Basiswechsel, so dass  $g_x$  wieder die Matrix  $J = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$  ist – also  $g_x$  hat *Index* 1.
- (iii) Wie im Minkowskiraum gibt es in jedem Punkt  $x$  Vektoren  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ , die *zeit-/licht-/raumartig* sind, also für die  $g_x(v, v) < / = / > 0$  gilt. Man kann nachrechnen, dass zeitartig sein etc. nicht von den gewählten Koordinaten abhängt.
- (iv) Beziehung  $g$  und  $\Gamma$  – ÜA 9: Es gilt

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (g_{\mu\kappa,\nu} + g_{\nu\kappa,\mu} - g_{\mu\nu,\kappa}), \quad (\text{II.2})$$

wobei  $f_{,\nu} := \frac{\partial f}{\partial x^\nu}$  (also  $g_{\mu\kappa,\nu} = \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu}$ ) und  $g^{\kappa\lambda}$  die Koeffizienten der zu  $g_{\kappa\lambda}$  inversen Matrix sind (Nach Definition von Inverser und Matrixmultiplikation gilt also:  $g^{\kappa\lambda} g_{\lambda\mu} = \delta_{\mu}^{\kappa}$ ). Kennen wir in einem Punkt  $x$  alle Einträge  $g_{\mu\nu}(x)$  und  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x)$ , dann kennen wir auch die ersten Ableitungen  $g_{\mu\nu,\kappa}(x)$  in diesem Punkt.

Zurück zum freien Fall:

- (a) Was wissen wir über  $g_{\alpha\beta}(x(\tau)) \frac{dx^\alpha}{d\tau}(\tau) \frac{dx^\beta}{d\tau}(\tau)$  als Funktion von  $\tau$ ?

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left( g_{\alpha\beta}(x(\tau)) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) &= \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} \frac{dx^\beta}{d\tau} + g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} \\ &\stackrel{(\text{II.1})}{=} \left( g_{\alpha\beta,\gamma} - g_{\mu\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu - g_{\mu\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \right) \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \stackrel{(\text{II.2})}{=} 0. \end{aligned}$$

Also ist  $g_{\alpha\beta}(x(\tau)) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$  entlang des freien Falls des Testteilchens konstant. Das ist auch das, was wir nach der SRT erwartet haben. Die Konstante soll -1 sein (für Licht wäre es wieder Null).

## II.1. Das Äquivalenzprinzip

- (b) Wir wollen nun die Bahn des freien Falls durch ein Variationsprinzip interpretieren: Fällt ein Teilchen von  $A = x(s_0)$  nach  $B = x(s_1)$ , parametrisiert nach Eigenzeit, ist dabei in seiner Eigenzeit  $\Delta\tau_{AB} = s_1 - s_0$  vergangen.

Wie sieht es mit der Eigenzeit für Kurven in der Nähe der 'Freien-Fall-Kurve' aus? Wir variieren den Pfad  $x(s)$  zu  $x_\epsilon(s) = x(s) + \epsilon z(s)$  mit  $z(s_0) = z(s_1) = 0$ . Also ist  $x_\epsilon$  auch eine Kurve mit den Endpunkten  $A$  und  $B$ . Hierbei sei  $z(s)$  klein genug, dass  $x_\epsilon$  noch immer zeitartig ist. Nun ist  $x_\epsilon$  natürlich im Allgemeinen nicht mehr nach Eigenzeit parametrisiert, sondern es ist

$$\Delta\tau_{AB}(x_\epsilon) := \int_A^B d\tau = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{-g_{\alpha\beta}(x_\epsilon(s)) \frac{dx_\epsilon^\alpha}{ds}(s) \frac{dx_\epsilon^\beta}{ds}(s)} ds$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \Delta\tau_{AB}(x_\epsilon) &= - \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{2} \left( -g_{\alpha\beta}(x(s)) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \right)^{-1/2} \\ &\quad \left( g_{\alpha\beta,\gamma}(x(s)) z^\gamma(s) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} + 2g_{\alpha\beta}(x(s)) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dz^\beta}{ds} \right) ds \\ &\stackrel{(a)+\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_1} \left( g_{\alpha\beta,\gamma}(x(s)) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} - 2 \frac{d}{ds} \left( g_{\alpha\gamma}(x(s)) \frac{dx^\alpha}{ds} \right) \right) z^\gamma(s) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_1} \underbrace{\left( g_{\alpha\beta,\gamma}(x(s)) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} - 2g_{\alpha\gamma,\delta}(x(s)) \frac{dx^\delta}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds} - 2g_{\alpha\gamma}(x(s)) \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} \right)}_{= -\frac{1}{2}(g_{\delta\beta,\gamma} - g_{\beta\gamma,\delta}) \frac{dx^\delta}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}} z^\gamma(s) ds \\ &= - \int_{s_0}^{s_1} g_{\alpha\gamma}(x(s)) \left( \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\delta}^\alpha \frac{dx^\delta}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \right) z^\gamma(s) ds = 0. \end{aligned}$$

(Wir hätten auch direkt (B.1) anwenden können.)

Die Kurven des freien Fall sind also kritische Punkte der Eigenzeit (hier immer verstanden bzgl. Perturbationen  $x_\epsilon(s)$  mit festen Anfangs- und Endpunkten). Andersherum folgt analog, dass eine zeitartige Kurve  $x(s)$  ein kritischer Punkt in der Eigenzeit, nach Umparametrisierung in Eigenzeit\*, die Kurve des freien Fall eines Beobachters ist.†

- (c) Analog zum letzten Fall kann man nachrechnen, dass die Kurven des freien Falls genau die kritischen Punkte des zugehörigen *Energiefunktionals*

**Vorl. 4**

$$E(x_\epsilon) = \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(x_\epsilon(s)) \frac{dx_\epsilon^\alpha}{ds} \frac{dx_\epsilon^\beta}{ds} ds, \quad (\text{II.3})$$

$\mathcal{L}(x_\epsilon(s), \dot{x}_\epsilon(s))$

\*Ist  $x(s)$  eine Parametrisierung einer zeitartigen (differenzierbaren) Kurve, dann gibt es immer einen Diffeomorphismus  $\varphi(u) = s$ , so dass  $y(u) = x(\varphi(u))$  eine Parametrisierung der gleichen Kurve mit  $g(\partial_u y, \partial_u y) = -1$  ist.

†Schaut man nach allen kritischen Punkten der Eigenzeit, erhält man auch lichtartige Kurven.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

die zeitartig sind, ÜA 10. Insbesondere sind kritische Punkte Kurven, die automatisch proportional (d.h. bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) nach Eigenzeit parametrisiert sind. Man erhält auch kritische Punkte, die raumartige bzw. lichtartige Kurven sind. In jedem Fall ist dann  $g_{\alpha\beta}(x)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$  konstant entlang der Kurve.

Um die Gleichung (II.1) für gegebenes  $g_{\mu\nu}$  explizit zu berechnen, kann man zwar mit (II.2) direkt die  $\Gamma$  berechnen und einfach einsetzen. Vom Rechenaufwand empfiehlt sich allerdings zu nutzen, dass die Kurven des freien Falls kritische Punkte des Energiefunktionals sind und deshalb die zugehörige Differentialgleichung wie in (B.1) berechnet werden können, vgl. ÜA 10.

Hier ein einfaches Beispiel:

Im Minkowskiraum ist  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$  (mit  $\eta = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ ) und damit

$$\mathcal{L}(x(s), \dot{x}(s)) = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha(s)\dot{x}^\beta(s).$$

Die Gleichungen (B.1) sind dann

$$\frac{d}{ds}(\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha(s)) = 0.$$

Also  $\dot{x}^\alpha(s) = c^\alpha = \text{const}$  und  $x^\alpha(s) = c^\alpha s + d^\alpha$ . Die Kurven freien Falls von Teilchen sind also die zeitartigen Geraden im Minkowski (zeitartig, da  $\mathcal{L}$  genau  $-ds^2$  für  $s$  die Eigenzeit ist.).

### II.1.1. Interpretation der Raumzeit als Lorentzmannigfaltigkeit

Das Äquivalenzprinzip ist erst einmal nur ein Indiz dafür, dass man die Gravitation über Raumzeitgeometrie beschreiben kann. Wäre das nicht so, würden wir schon bei dem freien Fall im letzten Abschnitt für jedes  $m_{\text{schwer}}/m_{\text{träge}}$  ein anderes  $g_{\mu\nu}$  und damit andere  $\Gamma$  erhalten. Das wäre z.B. der Fall, wenn wir etwas ähnliches in der Elektrodynamik probieren würden. Dort würden die verschiedenen  $q/m$  Verhältnisse auftauchen.

Aber es heißt natürlich nicht, dass es funktioniert die **Gravitationstheorie als geometrische Theorie** zu modellieren. Man muss später prüfen, dass das wirklich eine *brauchbare Gravitationstheorie* ist, d.h.

- Die Newtonsche Gravitationstheorie muss im nichtrelativistischen Limes (d.h. bei Geschwindigkeiten, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind) bei schwachen Gravitationsfeldern auf dem Niveau der Vorhersagen von Beobachtungen erhalten werden.
- Gewisse physikalische Konsistenzbedingungen sollten erfüllt sein, z.B. keine lokale Propagation von Gravitationseffekten schneller als das Licht. Das muss insbesondere in den Feldgleichungen (das werden die Einsteingleichung plus die Materiegleichungen sein) implementiert sein.

## II.1. Das Äquivalenzprinzip

- Die Theorie muss durch Experimente bestätigt sein (die allerwichtigste Bedingung, die kann im Zweifel auch die beiden oberen ersetzen).

Wir interpretieren die  $g_{\mu\nu}$ , die lokal die Kurve des freien Fall des Teilchens im letzten Abschnitt bestimmt haben, als Metrik in lokalen Koordinaten. Dazu verkleben wir zuerst einmal die verschiedenen lokalen Koordinatensysteme zum unterliegenden Raum – das führt zum Begriff der Mannigfaltigkeit:\*

**Definition II.1.1.** Seien  $M$  und  $A$  Mengen. Seien  $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ ,  $U_\alpha \subset M$  Teilmengen und  $\kappa_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  bijektive Abbildungen für  $\alpha \in A$ , so dass gilt

- (i) es gibt eine abzählbare Teilmenge  $A_1 \subset A$  mit  $\cup_{\alpha \in A_1} U_\alpha = M$ ,
- (ii)  $\kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  ist offen in  $\mathbb{R}^m$  für alle  $\alpha, \beta \in A$ .
- (iii)  $\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1}: \kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \kappa_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  ist für alle  $\alpha, \beta \in A$  glatt.
- (iv) zu je zwei Punkten  $p, q \in M$  ein  $\alpha \in A$ , so dass  $p, q \in U_\alpha$  ist.†

Dann nennen wir  $M$  eine *glatte Mannigfaltigkeit* mit *glattem Atlas*  $(U_\alpha, \kappa_\alpha)_{\alpha \in A_1}$  und Dimension  $m$ .

Ist  $M$  bzgl. der glatten Atlanten  $(U_\alpha, \kappa_\alpha)_{\alpha \in A_1}$  bzw.  $(U'_\alpha, \kappa'_\alpha)_{\alpha \in A_2}$  jeweils eine glatte Mannigfaltigkeit, so dass die Vereinigung der beiden Atlanten wieder ein glatter Atlas für  $M$  ist, sagen wir, dass beide Atlanten die gleiche *glatte Struktur* für  $M$  definieren.‡

Mit der letzten Definition werden aus Koordinaten auf  $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$  mittels der *Karten*  $\kappa_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  *lokale Koordinaten* auf  $U_\alpha \subset M$  definiert. Bedingung (iii) ist dann eine 'Kartenkompatibilitätsbedingung'. Bedingung (i) und (iv) sind grob gesagt dazu da, topologische Pathologien auszuschließen.

(ii) angewendet auf  $\alpha = \beta$  impliziert insbesondere, dass  $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$  offen ist.

**Beispiel II.1.2.** (i) Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $m \leq n$ . Dann heißt  $M$  *m-dimensionale Untermannigfaltigkeit* von  $\mathbb{R}^n$ , falls es für jeden Punkt  $p \in M$  eine offene Umgebung  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$  von  $p$ , eine offene Menge  $V \subset \mathbb{R}^m$  und eine glatte Abbildung  $F: V \rightarrow \tilde{U}$  gibt, so dass gilt:

- i)  $F(V) = M \cap \tilde{U}$  und  $F: V \rightarrow M \cap \tilde{U}$  ist ein Homöomorphismus.

---

\*Wir sammeln hier jeweils nur die wichtigsten Begriffe und Intuitionen, um in der ART weiter zu kommen. Für Ausführlicheres schauen Sie in Bücher/Skripte der Differentialgeometrie oder [5]. Die Definition für glatte Mannigfaltigkeiten hier ist auch nicht die die man standardmäßig in den meisten Büchern findet, ist aber äquivalent.

†impliziert, dass die auf  $M$  induzierte Topologie Hausdorff ist. D.h. um je zwei verschiedene Punkte gibt es zwei disjunkte offene Umgebungen – man sagt 'Punkte kann man trennen'.

‡Es kann passieren, dass wenn man nur die topologischen Informationen von  $M$  behält, es dazu verschiedene glatte Strukturen geben kann, vgl. [https://en.wikipedia.org/wiki/Differential\\_structure](https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_structure) und [https://en.wikipedia.org/wiki/Exotic\\_R4](https://en.wikipedia.org/wiki/Exotic_R4). Das ist für uns hier aber nicht relevant.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

ii) Die Jacobimatrix (eine  $n \times m$  - Matrix)

$$D_x F = \left( \frac{\partial F}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x^m}(x) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x^m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x^m}(x) \end{pmatrix}$$

(wobei  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))^T$ ) hat für alle  $x = (x^1, \dots, x^m)^T \in V$  maximalen Rang, also Rang  $m$ .

Die Abbildung  $F$  heißt *lokale Parametrisierung* von  $M$ . Die Untermannigfaltigkeit  $M$  ist eine glatte  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten mit Karten gegeben durch  $\kappa := F^{-1}: U := M \cap \tilde{U} \rightarrow V$ . Um wirklich die Mannigfaltigkeitsdefinition von oben zu überprüfen, muss man noch zeigen, dass abzählbar viele dieser Karten  $M$  überdecken und man zusätzlich noch Karten wählen kann, die insbesondere Bedingung (iv) erfüllen. Die Idee für solche Karten ist: Wir wählen einen Weg zwischen  $p$  und  $q$  und verdicken diesen zu einer Menge für den Definitionsbereich der Karte. Sind  $p$  und  $q$  in verschiedenen Zusammenhangskomponenten, reicht es die Vereinigung zweier Karten um  $p$  bzw.  $q$  zu wählen.

Als Beispiel schauen wir uns  $S^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (x^1)^2 + \dots + (x^{m+1})^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$  an. Das ist eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{m+1}$ : Mögliche Karten werden durch stereographische Projektion von verschiedenen Punkten gegeben. Z.B. kann man mit drei solcher Karten alle Bedingungen aus Definition II.1.1 direkt erfüllen.

Anstatt mittels lokalen Parametrisierungen zu überprüfen, ob eine Mannigfaltigkeit eine Untermannigfaltigkeit ist, bietet sich oft an, das *Kriterium vom regulären Wert* zu nutzen: Gibt es für jeden Punkt  $p \in M$  eine Umgebung  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^{n=m+k}$  und eine glatte Funktion  $f: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ , so dass  $0 \in \mathbb{R}^k$  regulärer Wert\* und  $f^{-1}(0) = \tilde{U} \cap M$  ist, dann ist  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Dieses Kriterium hätten wir auch anwenden können, um zu sehen, dass  $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$  eine Untermannigfaltigkeit ist. Dazu verwenden wir  $f: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|^2 - 1$ . Dann ist  $f^{-1}(0) = S^m$  und  $D_x f = (2x^1, \dots, 2x^m)$ . Für alle  $x \in S^m$  hat  $D_x f$  Rang 1, also maximalen Rang.

(ii) Sind  $M_1$  und  $M_2$  glatte Mannigfaltigkeiten, dann auch  $M_1 \times M_2$ :

Ist  $(U_\alpha, \kappa_\alpha)_{\alpha \in A}$  glatter Atlas von  $M_1$  und  $(U'_\beta, \kappa'_\beta)_{\beta \in B}$  von  $M_2$ , dann ist  $(U_\alpha \times U'_\beta, \kappa_\alpha \times \kappa'_\beta)_{(\alpha, \beta) \in A \times B}$  ein glatter Atlas von  $M_1 \times M_2$ .

---

\*0 ist *regulärer Wert* von  $f: \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit  $k \leq n$ , falls für jeden Punkt  $x = (x^1, \dots, x^n) \in V$  mit  $f(x) = 0$  die Ableitung  $D_x f = (\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n})$  (eine  $k \times n$ -Matrix) maximalen Rang hat.)

**Bemerkung II.1.3.** Grobe Daumenregel bei der Definition von Begriffen ist: Man überlegt sich zuerst, was das ganze auf Untermannigfaltigkeiten\* ist oder sein sollte (das ist i.A. anschaulicher) und versucht das zu verallgemeinern. Man muss nur aufpassen, dass für diese Verallgemeinerung der Begriff nicht von der Einbettung  $M \subset \mathbb{R}^n$  abhängen darf.

Für eine Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$ , wie  $S^m$  oben, ist es leicht, zu sagen, was ein Tangentialvektor, ein Tangentialraum ist: Der Tangentialraum  $T_p M$  an  $M$  im Punkt  $p$  besteht aus allen Vektoren  $v \in \mathbb{R}^n$ , für die es eine Kurve  $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = v$  gibt. Ein solches  $v$  heißt *Tangentialvektor* in  $p$ . Die Differentiation  $\dot{c}$  wird hier im umliegenden Raum  $\mathbb{R}^n$  durchgeführt, in dem man  $c$  als Abbildung in  $\mathbb{R}^n$  auffasst. Haben wir keinen umliegenden Raum, geht das nicht, aber wir können die Kurven  $c$  benutzen, um Tangentialvektoren zu definieren. Dabei müssen wir aber beachten, dass verschiedene  $c$  den gleichen Tangentialvektor beschreiben können.

**Definition II.1.4.** Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Ein *Tangentialvektor* an  $M$  im Punkt  $p$  ist eine Äquivalenzklasse von glatten Kurven  $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  mit  $\epsilon > 0$  und  $c(0) = p$ , wobei zwei solcher Kurven  $c_1$  und  $c_2$  äquivalent heißen, falls für eine Karte  $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  mit  $p \in U$  gilt:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa \circ c_1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa \circ c_2).$$

Für die Äquivalenzklasse von  $c$  schreiben wir  $[c]_p$ . Die Menge

$$T_p M := \{[c]_p \mid c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \kappa \circ c \text{ glatt}, c(0) = p\}$$

heißt *Tangentialraum* von  $M$  im Punkt  $p$ .

**Bemerkung II.1.5.**

- (i) Die Definition des Tangentialvektors in  $p \in M$  hängt nicht von der gewählten Karte ab: Sei  $\kappa': U' \subset M \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^m$ ,  $p \in U'$ , eine zweite Karte um  $p$ , s. Abbildung II.1. Dann ist<sup>†</sup>

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa' \circ c) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}((\kappa' \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ c)) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} D_{\kappa(p)}(\kappa' \circ \kappa^{-1}) \left( \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa \circ c) \right).$$

Da der Kartenwechsel  $\kappa' \circ \kappa^{-1}$  ein Diffeomorphismus ist, ist  $D_{\kappa(p)}(\kappa' \circ \kappa^{-1})$  bijektiv. Also ist  $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa' \circ c_1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa' \circ c_2)$  genau dann, wenn  $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa \circ c_1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa \circ c_2)$  gilt.

\*Für jede glatte Mannigfaltigkeit  $M$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  und eine injektive glatte Abbildung  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass das Bild von  $M$  Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^n$  ist. Das ist der Satz von Whitney [5, Satz I.3.31]. In der ART wird die Raumzeit aber nicht als Untermannigfaltigkeit in einem umliegenden Raum betrachtet, weil der keine Bedeutung hätte.

<sup>†</sup>Wir verwenden manchmal  $D$  statt  $d$ , um zu unterstreichen, dass es sich um eine Abbildung zwischen euklidischen Räumen und damit um eine 'Standardrichtungsableitung'/Jacobimatrix handelt. Vgl. auch ÜA 14

II. Allgemeine Relativitätstheorie

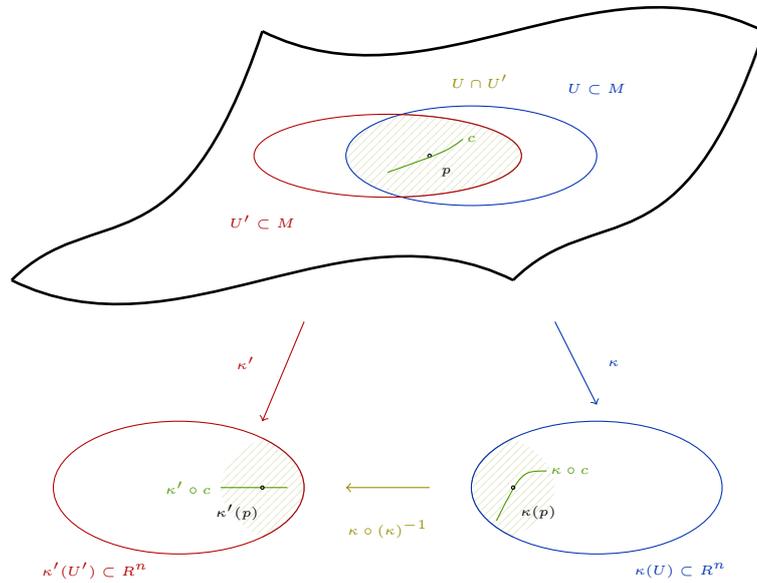


Abb. II.1.: Kartenwechsel

(ii) Die Abbildung

$$d_p \kappa: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m, [c]_p \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\kappa \circ c)$$

ist wohldefiniert und bijektiv [5, Lemma I.3.12]. Mittels  $d_p \kappa$  kann man  $T_p M$  die Struktur eines Vektorraumes verleihen, die auch wiederum unabhängig von der Karte ist, vgl. [5, Def I.3.13 und darunter]. Insbesondere ist  $d_p \kappa$  dann auch eine lineare Abbildung. In Anlehnung an die Notation im  $\mathbb{R}^m$  schreiben wir für  $[c]_p$  in Zukunft zumeist  $\dot{c}(0)$ . Analog  $\dot{c}(t) := [c \circ (\cdot + t)]_{c(t)}$ .

Wir werden aber sowieso zumeist in Karten und lokalen Koordinaten rechnen. D.h. für uns ist der wichtige Punkt hier, dass eine Basis von  $\mathbb{R}^m$  durch  $(d_p \kappa)^{-1}$  auf eine Basis von  $T_p M$  abgebildet wird. I.A. nutzen wir die Standardbasis  $e_i$  vom  $\mathbb{R}^m$  zu den Standardkoordinaten  $x^i$  und erhalten so mit\*

$$\partial_{x^i} \Big|_p := \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p := (d_p \kappa)^{-1}(e_i)$$

eine Basis von  $T_p M$ .

---

\*Das wir hier die gleiche Notation für Vektoren in Koordinatenrichtung verwenden wie bei der partiellen Ableitung, hängt damit zusammen das alles sehr verwandt und verwoben ist: Die Richtungsableitung einer Funktion in Richtung des Vektors einer Koordinatenrichtung ist genau die partielle Ableitung in diese Richtung.

- (iii) Ein *glattes Vektorfeld*  $X$  auf  $M$  ordnet jedem  $p \in M$  ein Element  $X(p) \in T_p M$  derart zu, dass für jede Karte  $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  von  $M$  das Vektorfeld auf  $U$  als  $X(p) = X^i(\kappa(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} |_p$  mit glatten Funktionen  $X^i: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  dargestellt werden kann. Es reicht, diese Darstellung für Karten zu überprüfen, die  $M$  überdecken, vgl. ÜA 11. Die Menge der glatten Vektorfelder auf  $M$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{X}(M)$ .

Oft wird zwischen  $p \in M$  und  $x = \kappa(p) \in \mathbb{R}^m$  nicht explizit unterschieden, da  $\kappa$  ja sowieso ein Diffeomorphismus ist und man schreibt kurz  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

- (iv) Seien  $M$  und  $N$  zwei glatte Mannigfaltigkeiten und  $f: M \rightarrow N$ . Wir sagen  $f$  ist *stetig/glatt* in  $p \in M$ , falls für eine Karte  $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  um  $p$  (d.h.  $p \in U$ ) und eine Karte  $\tilde{\kappa}: \tilde{U} \subset N \rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$  um  $f(p)$  die Abbildung

$$\tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1}: V \rightarrow \tilde{V}$$

stetig/glatt in  $\kappa(p)$  ist. Der Begriff ist unabhängig von der Wahl der Karten, vgl. ÜA 11. Dann nennen wir  $d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  gegeben durch  $d_p f([c]_p) = [f \circ c]_{f(p)}$  die *Tangentialabbildung* von  $f$  in  $p \in M$ . Diese Abbildung ist linear und kompatibel mit der Differentiation in den Karten, im Sinne, dass  $d_{f(p)} \tilde{\kappa} [f \circ c]_{f(p)} = D_{\kappa(p)} (\tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1})(d_p \kappa([c]_p))$ , vgl. ÜA 13.i.

Vorl. 5

**Bemerkung II.1.6.** Als nächstes wollen wir eine Struktur einführen mit der wir Längen von Vektoren bestimmen können und die im Spezialfall das Minkowskiprodukt auf dem Minkowskiraum bzw. das euklidische Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$  mit einschließt.

Für Untermannigfaltigkeit kriegen wir diese Struktur durch das euklidische Skalarprodukt des umliegenden Raum geschenkt: Wir schränken in jedem Punkt  $p$  der Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  das Skalarprodukt auf den Untervektorraum  $T_p M \subset \mathbb{R}^n$  ein und erhalten das, was in der elementaren Differentialgeometrie ('Kurven un Flächen') die *erste Fundamentalform*  $I_p(X, Y) := \langle X, Y \rangle$  für  $X, Y \in T_p M$  genannt wird. Die erste Fundamentalform ist in jedem Punkt der Untermannigfaltigkeit eine positiv definite symmetrische Bilinearform und hängt glatt vom Punkt ab, siehe die folgende Definition.

Schränkt man analog das Minkowskiprodukt auf eine Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ein, ist die Einschränkung noch immer eine symmetrische Bilinearform, die glatt vom Punkt abhängt, die aber sowohl positiv definit (z.B. für  $M = \{x^0 = 0\}$ ), nichtentartet vom Index\* 1 (z.B. für  $M = \{x^1 = 0\}$ ) aber auch entartet sein kann (z.B. ist die induzierte Bilinearform für  $M = \{t(1, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in \mathbb{R}\}$  konstant Null).

Wir wollen angelehnt an das euklidische Skalarprodukt und das Minkowskiprodukt, nun allgemein ein solches Produkt für Mannigfaltigkeiten definieren.

**Definition II.1.7.** Eine *semi-Riemannsche Metrik*  $g$  ist eine Abbildung, die jedem Punkt von  $M$  eine nichtentartete symmetrische Bilinearform  $g_p$  auf  $T_p M$  zuordnet, so

---

\*Index einer nichtentarteten Bilinearform = Anzahl der negativen Eigenwerte

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

dass diese Zuordnung glatt vom Basispunkt abhängt, d.h. für jede Karte  $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  um  $p$  ist die Abbildung

$$g_{ij}: V \rightarrow \mathbb{R}, g_{ij}(v) := g_{\kappa^{-1}(v)} \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\kappa^{-1}(v)}, \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_{\kappa^{-1}(v)} \right)$$

glatt.

Ist der Index von  $g$  Null (Also Null für  $g_p$  und alle  $p$ ), nennen wir die Metrik *Riemannsch* und  $(M, g)$  eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit*. Ist der Index von  $g$  Eins, nennen wir  $g$  eine *Lorentzmetrik* und  $(M, g)$  eine *Lorentz-Mannigfaltigkeit*.

Es ist also  $(g_{ij}(v \in V))_{ij}$  die Matrixdarstellung der Bilinearform  $g_{\kappa^{-1}(v)}$  in lokalen Koordinaten.

**Bemerkung II.1.8.** (i) Index 1 heißt, dass es in jedem Punkt eine Basis  $e_0, \dots, e_n$  von  $T_x M \cong \mathbb{R}^{n+1}$  gibt, so dass  $g_x = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$  ist.

(ii) In Analogie zum Minkowskiraum nennt man einen Vektor  $v \in T_p M$  *zeit-/licht-/raumartig*, falls  $g_p(v, v) < / = / > 0$  ist. Der *Lichtkegel* im Punkt  $p \in M$  besteht dann aus der Menge der lichtartigen Vektoren in  $T_p M$ .

(iii) Wie die letzte Definition – in einem Punkt mittels Lineare Algebra und bei Variation des Punktes glatte Abhängigkeit – werden viele Größen in der ART/Diffgeo definiert und so dann auch mit ihnen gearbeitet.

**Beispiel II.1.9** (Beispiele für Metriken).

- (i) Minkowskiraum mit Minkowskiprodukt ist eine Lorentzmannigfaltigkeit
- (ii) Ist  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit, dann erhalten wir durch einschränken des Skalarproduktes in jedem  $p \in M$  auf den Tangentialraum  $T_p M$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$ , vgl. auch Bemerkung II.1.6. Diese Metrik nennen wir auch *induzierte Metrik*. Für ein explizites Beispiel siehe auch Beispiel II.1.13.
- (iii) Sei  $(\Sigma, h)$  eine  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  ein Intervall, eine glatte positive Funktion. Dann ist das *verzerrte Produkt (warped product)*  $M := I \times \Sigma$ ,  $g = -dt^2 + f(t)^2 h$ , eine Lorentzmannigfaltigkeit. Hierbei lesen wir die Metrikdefinition wie folgt: Für  $p = (s, q) \in I \times \Sigma$  ist  $T_p M \cong T_s I \times T_q \Sigma$ , ÜA 20(i), und für  $v = (v^1, v^2), w = (w^1, w^2) \in T_p M$  ist  $g_p(v, w) = -v^1 w^1 + f(t)^2 h_p(v, w)$ . Ist  $f \equiv 1$ , nennen wir  $g$  *Produktmetrik*.
- (iv) *de-Sitter Raum* = einschaliges Hyperboloid mit Metrik induziert vom Minkowskiraum:  $S_1^m(r) := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \eta(x, x) = r^2\}$  gibt eine Lorentzmetrik, ÜA 12.
- (v) *Anti-de-Sitter Raum*  $H_1^m(r) = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid -(x^0)^2 - (x^1)^2 + \sum_{i=2}^m (x^i)^2 = -r^2\}$  mit Metrik induziert durch  $g(x, y) = -(x^0)^2 - (x^1)^2 + \sum_{i=2}^m (x^i)^2$ , ÜA 12.

### II.1.2. Kovarianzprinzip - Tensoren

In der allgemeinen Relativitätstheorie postulieren wir noch immer das Relativitätsprinzip – allerdings in verallgemeinerter Form: In allen Koordinatensystemen (also für alle Beobachter) sollen physikalische Gesetze die gleiche Form haben. Das wird im Allgemeinen als *Kovarianzprinzip* ausgedrückt:

*Damit eine Gleichung in einem allgemeinen Gravitationsfeld gilt, muss mindestens gelten:*

- (i) *dass wenn in einem Koordinatensystem in einem Punkt, wo  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$  ist und die  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  von  $g_{\alpha\beta}$  verschwinden, die Gleichung mit den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie vereinbar ist.*
- (ii) *dass die Gleichung kovariant ist, das heißt, sie behält ihre Form unter Wechsel des Koordinatensystems.*

Bevor wir das mathematisch mit Hilfe von Tensoren formulieren, schauen wir zurück auf unsere Kurven des freien Falls:

Das Beispiel des freien Falls hatte uns bereits gezeigt, dass  $\frac{d}{d\tau}\dot{x}(\tau) = 0$  keine Gleichung ist, die dieses Kovarianzprinzip erfüllt. Aber, wie in (II.1) gesehen, erfüllt  $(\ddot{x}^\alpha(t) + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x(t))\dot{x}^\beta(t)\dot{x}^\gamma(t))\partial_{x^\alpha} = 0$  mit  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  wie in (II.2) (i) und Bedingung (ii) kann man direkt nachrechnen (eher etwas aufwändiger oder s.unten). Deshalb definieren wir

$$\nabla_{\dot{x}(t)}\dot{x}(t) := (\ddot{x}^\alpha(t) + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x(t))\dot{x}^\beta(t)\dot{x}^\gamma(t))\partial_{x^\alpha}$$

als neue Ableitung, die *kovariante Ableitung*, von  $\dot{x}(t)$  in Richtung von  $\dot{x}(t)$ . Für ein Vektorfeld  $Y$ , in lokalen Koordinaten gegeben durch  $Y(p = \kappa^{-1}(x)) = Y^\beta(x)\partial_{x^\beta}|_p$ , vgl. Bemerkung II.1.5(iii), analysiert man analog die Ableitung von  $Y$  in Richtung einer Koordinaten:  $\partial_{x^\alpha}(Y^\beta\partial_{x^\beta})$ . Dann sieht man, dass auch dieser Ausdruck nicht das Kovarianzprinzip erfüllt, aber man zur allgemeinen Definition der kovarianten Ableitung des Vektorfeldes  $Y$  in Richtung eines Vektorfeldes  $X = X^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$  kommt:

$$\nabla_X Y := X^\alpha \left( Y^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \partial_\alpha Y^\gamma \right) \partial_{x^\gamma}. \quad (\text{II.4})$$

Aufgrund der Kovarianzeigenschaft der Geodätengleichung definiert  $\nabla$  automatisch eine Abbildung  $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  auf der gesamten Mannigfaltigkeit – der sogenannte *Levi-Civita-Zusammenhang*. Die  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  heißen *Christoffelsymbole* von  $g$ .

Die kovariante Ableitung hat folgende Eigenschaften, die man leicht in lokalen Koordinaten nachrechnen kann – vgl. auch ÜA 13:

**Lemma II.1.10.** *Sei  $(M^m, g)$  eine glatte Riemannsche oder Lorentzsche Mannigfaltigkeit. Sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt, und seien  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  glatte Vektorfelder. Dann gilt*

- (i)  *$\nabla$  ist linear in beiden Argumenten.*
- (ii) *(Tensoriell in der ersten Komponente)  $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$  (also  $(\nabla_{fX} Y)(p) = f(p)(\nabla_X Y)(p)$ ).*

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

(iii) (Derivativ in der zweiten Komponente)

$$\nabla_X(fY) = df(X)Y + f\nabla_X Y, \text{ also } (\nabla_X(fY))_p = d_p f(X(p))Y(p) + f(p)(\nabla_X Y)_p.$$

$$\text{(Hier ist } d_p f(X(p)) = [c]_p \stackrel{\text{Bem. II.1.5}}{=} [f \circ c]_{c(p)} \stackrel{\text{Abb. nach } \mathbb{R}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(c(t)).)$$

(iv) (Metrisch (= kompatibel mit der Metrik)) Für alle glatten Vektorfelder  $X, Y, Z$  auf  $M$  gilt:

$$Z.g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

wobei  $Z.f := Z(f) := df(Z): M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto d_p f(Z(p))$  für eine glatte Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  ist (Hier ist  $f = g(X, Y): p \in M \mapsto g_p(X(p), Y(p))$ ).

(v) (Torsionsfrei) Für alle Karten  $\kappa: U \rightarrow V$  und Koordinaten  $x^\alpha$  auf  $V$  gilt

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\beta}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

für alle  $\alpha$  und  $\beta$ .

(II.4) ist die einzige Abbildung  $\nabla$ , die die obigen Eigenschaften hat.

Man kann  $\nabla$  auch einführen, indem man die Eigenschaften (i)-(v) im letzten Lemma als Definition nimmt und zeigt, dass es genau eine solche Abbildung gibt; [15, Thm. 2.2.2], [5, Satz II.2.8]. Dann sieht man durch nachrechnen, dass dieses  $\nabla$  lokal die Form (II.4) hat.

### Vorl. 6

Um zu verstehen, welche Gleichungen überhaupt invariant unter beliebigen Koordinatentransformationen sein können, müssen wir zuerst das Transformationsverhalten verschiedener Größen kennen. Insbesondere ist die Frage, welche 'Art von Größen' so auftauchen:

**Vektorfelder.** (z.B. Strömungsvektorfelder) Für die Definition eines (glatten) Vektorfeld siehe Bemerkung II.1.5(iii). In lokalen Koordinaten  $x^\alpha$  einer Karte  $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  hat ein Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  die Form  $X(p) = X^\alpha(\kappa(p)) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Big|_p$  mit  $X^\alpha$  eine glatte reellwertige Funktion auf  $V$ . Oft wird zwischen  $p \in M$  und  $x = \kappa(p) \in \mathbb{R}^m$  nicht explizit unterschieden, da  $\kappa$  ja sowieso ein Diffeomorphismus ist und man schreibt kurz  $X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ . In anderen lokalen Koordinaten  $y^\alpha$  einer Karte  $\tilde{\kappa}: U \rightarrow \tilde{V}$  gilt dann

$$X = X^\alpha \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \quad \left( \text{expliziter: } X(p) = \underbrace{X^\alpha(\kappa(p)) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} \Big|_{\kappa(p)}}_{=: \tilde{X}^\beta(\tilde{\kappa}(p))} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \Big|_p \right).$$

Hierbei ist dann  $\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} \Big|_{x=\kappa(p)}$  die Matrixdarstellung von  $D_x(\tilde{\kappa} \circ \kappa^{-1})$  des Differential des Koordinatenwechsels von  $x$  nach  $y$  ( $y = y(x)$ ).

\*Wie schon bei der lokalen Darstellung von Vektorfeldern, vgl. Bemerkung II.1.5.iii, identifizieren wir  $p$  mit seinen Koordinaten und unterdrücken, deshalb  $\kappa \circ \tilde{\kappa}^{-1}$  bei den Koeffizientenfunktionen  $X^\alpha$ , weil die Formeln sonst sehr schnell extrem lang und unübersichtlich werden.

## II.1. Das Äquivalenzprinzip

**Einsformen.** (z.B. den Impuls in der SRT haben wir als Einsform aufgefasst) In einem festen Punkt  $p \in M$  ist eine *Einsform* einfach nur das Dual eines Tangentialvektors in  $T_p M$ , also ein Element  $\omega_p \in T_p^* M := (T_p M)^*$  – im *Kotangentialraum* in  $p \in M$  –, also eine lineare Abbildung  $\omega_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ . In lokalen Koordinaten  $x^\alpha$  um  $p$  ist  $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}|_p$  eine Basis vom  $T_p M$ . Die zugehörige duale Basis bezeichnen wir mit  $dx^\alpha|_p$ , d.h.  $dx^\alpha|_p \in T_p^* M$  und  $dx^\alpha|_p(\frac{\partial}{\partial x^\beta}|_p) = \delta_\beta^\alpha$ . Also haben wir in lokalen Koordinaten die Darstellung  $\omega_p = \omega_\alpha(\kappa(p))dx^\alpha|_p$  mit  $\omega_\alpha(\kappa(p)) \in \mathbb{R}$  für alle  $\alpha$ .

Wie bei glatten Vektorfeldern wollen wir, dass unsere Einsform auf  $M$  glatt vom Punkt abhängt:

**Definition II.1.11.** Eine *glatte Einsform*  $\omega$  auf  $M$  ist eine glatte Familie  $(\omega_p \in T_p^* M)_{p \in M}$ , d.h. in lokalen Koordinaten  $x$  einer Karte  $\kappa: U \rightarrow V$  um  $p$  ist  $\omega_p = \omega_\alpha(\kappa(p))dx^\alpha|_p$  und  $\omega_\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}$  ist glatt. Die Menge der Einsformen auf  $M$  bezeichnen wir mit  $\Omega^1(M)$ .

Analog wie bei Vektorfeldern kann man nachrechnen, dass diese Glattheitseigenschaft nicht von der Wahl der Karten abhängt. Weiterhin schreiben wir für die lokale Darstellung oft kurz  $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$ .

Insbesondere gibt ein  $\omega \in \Omega^1(M)$  damit eine Abbildung

$$\omega: \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad X \mapsto (p \in M \mapsto \omega_p(X(p))).$$

Die Linearität der Einsform in jedem Punkt führt zu einer  $C^\infty(M)$ -Linearität für  $\omega \in \Omega^1(M)$ : Sei  $f \in C^\infty(M)$  und  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Dann ist

$$\omega(fX) = f\omega(X) \in C^\infty(M).$$

Ändern wir wieder die lokalen Koordinaten  $y = y(x)$  (Die zugehörige Karte heiße  $\tilde{\kappa}$ ): Sei  $\omega = \tilde{\omega}_\beta dy^\beta$  die lokale Darstellung in Koordinaten  $y$ . Dann muss für alle Vektorfelder  $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$(\tilde{\omega}_\beta dy^\beta)(X) = (\omega_\alpha dx^\alpha)(X)$$

sein. Wie wir ein Vektorfeld in verschiedenen Koordinaten darstellen, wissen wir aber schon, also muss gelten

$$\begin{aligned} & (\tilde{\omega}_\beta dy^\beta) \left( X^\delta \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\delta} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \right) = (\omega_\alpha dx^\alpha) \left( X^\delta \frac{\partial}{\partial x^\delta} \right) \\ C^\infty(M)\text{-linear :} \quad & \tilde{\omega}_\beta X^\delta \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\delta} dy^\beta \left( \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \right) = \omega_\alpha X^\delta dx^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^\delta} \right) \\ \text{Da es für alle } X \text{ gilt:} \quad & \tilde{\omega}_\beta \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\delta} = \omega_\delta \quad \Big| \cdot \frac{\partial x^\delta}{\partial y^\alpha} \\ & \tilde{\omega}_\alpha = \omega_\delta \frac{\partial x^\delta}{\partial y^\alpha}. \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\omega = \omega_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} dy^\beta \quad \left( \text{expliziter: } \omega(p) = \omega_\alpha(\kappa(\tilde{\kappa}^{-1}(p))) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \Big|_{\tilde{\kappa}^{-1}(p)} dy^\beta \Big|_p \right). \quad (\text{II.5})$$

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

**Bilinearformen und  $(0, s)$ -Tensoren.** (z.B. die Lorentzmetrik  $g$ )

In einem Punkt  $p \in M$  ist ein  $(0, s)$ -Tensor eine multilineare Abbildung

$$\varphi: \underbrace{V \times \dots \times V}_{s\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$$

(Für  $V = T_p M$  und  $s = 1$  ist dies der Fall der Einsform von oben. Für  $V = T_p M$  und  $s = 2$  ist dies der Fall der Bilinearform). Diese Multilinearformen bilden einen Vektorraum, den wir mit  $T_s^0(V)$  bezeichnen.

Für  $\varphi \in T_{s_1}^0(V)$  und  $\psi \in T_{s_2}^0(V)$  definiert man das *Tensorprodukt*  $\varphi \otimes \psi \in T_{s_1+s_2}^0(V)$  durch

$$\varphi \otimes \psi(v_1, \dots, v_{s_1+s_2}) := \varphi(v_1, \dots, v_{s_1})\psi(v_{s_1+1}, \dots, v_{s_1+s_2}).$$

Das Tensorprodukt  $T_{s_1}^0(V) \otimes T_{s_2}^0(V)$  definieren wir als den linearen Span aller  $\varphi \otimes \psi$  mit  $\varphi \in T_{s_1}^0(V)$  und  $\psi \in T_{s_2}^0(V)$ , wobei Elemente  $\sum_k \varphi_1^k \otimes \psi_1^k$  und  $\sum_j \varphi_2^j \otimes \psi_2^j$  als identisch betrachtet werden, wenn sie als multilineare Abbildungen gleich sind.

Z.B. können wir eine Bilinearform als Tensorprodukt von Einsformen auffassen: In lokalen Koordinaten  $x^\alpha$  haben wir für eine Lorentzmetrik  $g$  im Punkt  $p \in M$

$$g_p = g_{\alpha\beta}(p) dx^\alpha|_p \otimes dx^\beta|_p \quad (\text{II.6})$$

Denn für  $X, Y \in T_p M$  ist  $g_p(X, Y) = X^\alpha Y^\beta g_p(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}|_p, \frac{\partial}{\partial x^\beta}|_p) =: X^\alpha Y^\beta g_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta}(p) (dx^\alpha|_p \otimes dx^\beta|_p)(X, Y)$ . (Metriken sind nicht irgendwelche  $(0, 2)$ -Tensoren, sondern insbesondere symmetrisch – also  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ . Deshalb schreibt man hier auch kurz  $g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$  und  $(dx^\alpha)^2 := dx^\alpha dx^\alpha$ . Also für die Euklidische Metrik in euklidischen Koordinaten  $\sum_i (dx^i)^2$  – daher auch die Notation der verzerrten Metrik in Beispiel II.1.9.iii).

Also bildet  $dx^\alpha|_p \otimes dx^\beta|_p$  eine Basis von  $T_2^0(T_p M)$ . Analog sieht man, dass  $dx^{\alpha_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_s}|_p$  eine Basis von  $T_s^0(T_p M)$  bildet. Es ist also per Definition schon  $T_{s_1}^0(V) \otimes T_{s_2}^0(V) \subset T_{s_1+s_2}^0(V)$ , aber es gilt sogar  $T_{s_1}^0(V) \otimes T_{s_2}^0(V) \cong T_{s_1+s_2}^0(V)$  (folgt aus Auswertung auf Basiselementen).

**Definition II.1.12.** Ein *glatter  $(0, s)$ -Tensor*  $\varphi$  auf  $M$  ist eine glatte Familie  $(\varphi_p \in T_s^0(T_p M))_{p \in M}$ , d.h. in lokalen Koordinaten  $x$  einer Karte  $\kappa: U \rightarrow V$  um  $p$  ist

$$\varphi_p = \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(\kappa(p)) dx^{\alpha_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_s}|_p$$

und  $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}: V \rightarrow \mathbb{R}$  ist glatt. Die Menge der glatten  $(0, s)$ -Tensoren auf  $M$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{T}_s^0 M$ .

Oft schreiben wir kurz:  $\varphi = \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} dx^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_s}$ . Im Falle, dass die  $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$  invariant unter Permutation der Indizes sind schreibt man sogar  $\varphi = \varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_s} dx^{\alpha_1} \dots dx^{\alpha_s}$ . Die letzte Schreibweise hatten wir z.B. für die formale Notation der Eigenzeit  $d\tau^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$  genutzt. Eigentlich ist das auch hier das Tensorprodukt und benutzt, dass  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$  ist und es deshalb auf die Reihenfolge der  $dx^\alpha$  nicht ankommt.

Transformationsverhalten  $y = y(x)$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} dx^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_s} \\ &\stackrel{\text{(II.5)+multilin.}}{=} \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_s}}{\partial y^{\beta_s}} dy^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dy^{\beta_s}. \end{aligned}$$

**Beispiel II.1.13.** Induzierte Metrik auf  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ : Die euklidische Metrik in euklidischen Koordinaten  $(x, y, z)$  ist als  $g = dx^2 + dy^2 + dz^2 := dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz^*$  gegeben. Rechnet man diese in sphärische Koordinaten  $(r, \varphi, \theta)$  mit  $x = r \sin \varphi \cos \theta$ ,  $y = r \cos \varphi \cos \theta$  und  $z = r \sin \theta$  um erhält man

$$g = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2).$$

Für  $r = 1$  ergeben sich lokalen Koordinaten  $\varphi, \theta$  auf  $S^2$  und damit die induzierte Metrik

$$g|_{S^2} = d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2.$$

**$(r, s)$ -Tensoren.** Da ein Vektorraum  $V$  kanonisch isomorph zu seinem Bidual  $V^{**} = (V^*)^*$  ist, kann ein Vektor  $v \in V$  auch als lineare Abbildung  $v: V^* \rightarrow \mathbb{R}$  aufgefasst werden, also als Element in  $T_1^0(V^*)$ .

In diesem Sinne, definieren wir einen  $(r, s)$ -Tensor als eine multilineare Abbildung

$$\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wie oben bilden diese Tensoren einen Vektorraum, den wir nun mit  $T_s^r(V)$  bezeichnen. Wir können analog das Tensorprodukt für  $\varphi \in T_{s_1}^{r_1}(V)$  und  $\psi \in T_{s_2}^{r_2}(V)$  als  $\varphi \otimes \psi \in T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$  durch

$$\begin{aligned} &\varphi \otimes \psi(u^1, \dots, u^{r_1+r_2}, v_1, \dots, v_{s_1+s_2}) \\ &:= \varphi(u^1, \dots, u^{r_1}, v_1, \dots, v_{s_1}) \psi(u^{r_1+1}, \dots, u^{r_1+r_2}, v_{s_1+1}, \dots, v_{s_1+s_2}) \end{aligned}$$

definieren sowie den Vektorraum  $T_{s_1}^{r_1}(V) \otimes T_{s_2}^{r_2}(V)$  als Span aller solcher  $\varphi \otimes \psi$  einführen.

**Bemerkung II.1.14.** (i)  $T_1^0(V) = V^*$ ,  $T_0^1(V) \cong V$ , Z.B. ist die Dualitätspaarung  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein  $(1, 1)$ -Tensor.

(ii) Analog zu den  $(0, s)$ -Tensoren folgt: Ist  $e_1, \dots, e_m$  eine Basis von  $V$  und  $\epsilon^i$  die zugehörige Dualbasis, dann ist

$$\{e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r} \otimes \epsilon^{k_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{k_s} \mid 1 \leq j_i, k_i \leq m\}$$

eine Basis von  $T_s^r(V)$ . Damit ist  $\dim T_s^r(V) = m^{r+s}$ .

---

\*Sieht man direkt, wenn man Vektoren einsetzt.

II. Allgemeine Relativitätstheorie

(iii) Die obige Definition von  $\varphi \otimes \psi$  induziert eine lineare Abbildung  $T_{s_1}^{r_1}(V) \otimes T_{s_2}^{r_2}(V) \rightarrow T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$ . Das ist ein Isomorphismus. Insbesondere kann man so  $T_s^r(V)$  mit

$$V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s} := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$$

identifizieren.

(iv) Der Vollständigkeit halber betrachtet man ein Element in  $\mathbb{R}$  als einen  $(0, 0)$ -Tensor.

Wenden wir das wieder auf  $V = T_p M$  mit variierendem  $p$  an:

**Definition II.1.15.** Ein *glatter*  $(r, s)$ -Tensor ist eine glatte Familie von  $(r, s)$ -Tensoren  $\varphi_p \in T_s^r(T_p M)$ , d.h. in lokalen Koordinaten  $x^\alpha$  einer Karte  $\kappa: U \rightarrow V$  um  $p$  ist

$$\varphi_p = \varphi_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(\kappa(p)) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_r}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_s}$$

und  $\varphi_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}: V \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Den Vektorraum aller  $(r, s)$ -Tensoren bezeichnen wir mit  $\mathcal{T}_s^r M$ .

**Vorl. 7**

Insbesondere ist ein glatter  $(0, 0)$ -Tensor ein Element in  $C^\infty(M)$ .

**Bemerkung II.1.16.** Operationen, die man von Vektoren kennt, vererben sich mittels punktweiser Anwendung zuerst auf Vektorfelder und dann mittels Dualität und Multilinearität auf  $(r, s)$ -Tensorfelder:

- (i) Addition:  $\mathcal{T}_s^r M \times \mathcal{T}_s^r M \rightarrow \mathcal{T}_s^r M$ ,  $(T + S)(p) := T(p) + S(p)$
- (ii) Multiplikation mit glatten (reellwertigen) Funktionen:  $C^\infty(M) \times \mathcal{T}_s^r M \rightarrow \mathcal{T}_s^r M$ ,  $(f, T) \mapsto fT$  mit  $fT(p) := f(p)T(p)$ . Es gilt  $f_1(f_2T) = (f_1 f_2)T$  und  $(f_1 + f_2)T = f_1T + f_2T$ .

Das macht  $\mathcal{T}_s^r M$  zu einem  $C^\infty(M)$ -Modul.

Es kommt nun noch die Operation des *Tensorprodukts* hinzu  $\mathcal{T}_{s_1}^{r_1} M \otimes \mathcal{T}_{s_2}^{r_2} M \rightarrow \mathcal{T}_{s_1+s_2}^{r_1+r_2} M$ ,  $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \otimes \psi$ .

Insbesondere Eigenschaft (ii) kann als bestimmende Eigenschaft von Tensoren gesehen werden: Die Multilinearität in jedem Punkt impliziert die  $C^\infty(M)$ -Linearität des Tensors:

**Bemerkung II.1.17.** ('Tensoriell'- Charakterisierung von Tensoren) Vgl. ÜA 15: Eine multilineare Abbildung

$$T: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{s\text{-mal}} \rightarrow \underbrace{\mathfrak{X}(M) \otimes \dots \otimes \mathfrak{X}(M)}_{r\text{-mal}},$$

## II.1. Das Äquivalenzprinzip

die  $T(f_1 X_1, \dots, f_s X_s) = f_1 \dots f_s T(X_1, \dots, X_s)$  für alle  $f_i \in C^\infty(M)$  und  $X_i \in \mathfrak{X}(M)$  erfüllt, definiert einen  $(r, s)$ -Tensor durch

$$\tilde{T}(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) := \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r (T(X_1, \dots, X_s)), *$$

Man sagt  $T$  ist *tensoriell* bzw.  $C^\infty(M)$ -linear in den  $r$ -Einträgen. wobei  $T(X_1, \dots, X_s) = \sum_{k=1}^{\ell} Y_{k1} \otimes \dots \otimes Y_{kr}$  für geeignete Vektorfelder  $Y_{ki} \in \mathfrak{X}(M)$  ist und damit  $\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r (T(X_1, \dots, X_s)) = \sum_{k=1}^{\ell} \prod_{i=1}^r \omega^i(Y_{ki})$  ist. Andersherum ergibt jeder glatte  $(r, s)$  Tensor  $\tilde{T}$  eine Abbildung  $T$  mit obigen Eigenschaften.

**Beispiel II.1.18.** Aus den Eigenschaften vom Levi-Civita Zusammenhang  $\nabla$  aus Lemma II.1.10 oder der lokalen Darstellung (II.4) folgt direkt, dass der Wert von  $\nabla_X Y$  im Punkt  $p$  nur von  $X$  im Punkt  $p$  abhängt. Da  $Y$  jedoch differenziert wird, hängt dieser Ausdruck nicht nur von  $Y$  im Punkt  $p$  ab, sondern nur von  $Y$  entlang einer Kurve ausgehend von  $p$  mit Anfangsvektor  $X(p)$ .<sup>†</sup>

Damit kann man  $\nabla Y: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ ,  $X \mapsto \nabla_X Y$  für festes  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  als  $(1, 1)$ -Tensor auffassen:  $(\nabla Y)_p: T_p^* M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\nabla Y)_p(\omega_p, X_p) := \omega_p((\nabla_X Y)_p)$ . Deshalb nennt man Eigenschaft (ii) aus Lemma II.1.10 auch *tensoriell*. Die Abbildung  $\nabla_X: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ ,  $Y \mapsto \nabla_X Y$ , ergibt hingegen keinen Tensor, da  $\nabla$  derivativ in der zweiten Komponente ist.

**Bemerkung II.1.19.**  $(\mathfrak{X}(M) \leftrightarrow \Omega^1(M)$  mit Hilfe von  $g$ ) Der Vektorraum  $V$  und sein Dual sind zwar isomorph, aber es gibt keinen natürlichen Isomorphismus zwischen beiden (anders als bei  $V$  und  $V^{**}$ ). Haben wir auf unserer Mannigfaltigkeit allerdings eine (semi-)Riemannsche Metrik, können wir mit dieser Zusatzstruktur einen solchen Isomorphismus zwischen  $T_p M$  und  $T_p^* M$  mittels  $T_p M \rightarrow T_p^* M$ ,  $v \mapsto v^b := g_p(\cdot, v)$  auszeichnen und damit auch einen zwischen Vektorfelder und 1-Formen:

$$b: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M), \quad X \mapsto X^b := g(X, \cdot).$$

Man muss sich noch überlegen, dass dies wirklich ein Isomorphismus ist. Das folgt lokal mittels einer Abbildung der Basen (definiert über Koordinaten) aufeinander abgebildet werden. In lokalen Koordinaten  $x^\alpha$  auf  $U \subset M$  ist die Abbildung  $\mathfrak{X}(U) \rightarrow \Omega^1(U)$  durch

$$X^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \mapsto g(X^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma}, \cdot) = g_{\alpha\beta} (dx^\alpha \otimes dx^\beta) \left( X^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma}, \cdot \right) = X^\alpha g_{\alpha\beta} dx^\beta$$

gegeben.<sup>‡</sup>

\*Achtung: Hier sind die Indizes bei  $X_j$  und  $\omega^j$  nur Indizes für verschiedene Vektorfelder bzw. Einsformen und nicht die Indizes für die Komponentenfunktionen in lokalen Koordinaten. Deshalb wird hier auch für die  $X_i/\omega^i$  der untere/obere Index verwendet, um das zu unterscheiden.

†Deshalb ist für eine Kurve  $c$  die Geodätengleichung auch in der Schreibweise  $\nabla_{\dot{c}} \dot{c}$  ein wohldefinierter Ausdruck, obwohl  $\dot{c}$  erst einmal kein Vektorfeld auf  $M$  ist sondern nur auf  $c$  lebt. Lokal in  $t$  kann  $\dot{c}$  aber immer zu einem Vektorfeld auf  $M$  erweitert werden. (Nur lokal, da die Spur(=das Bild) von  $c$  in  $M$  Selbstschnitte haben kann.)

‡Auch  $X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \mapsto \sum_{\alpha} X^\alpha dx^\alpha$  ist lokal ein Isomorphismus. Er ist aber keine gute Wahl, weil er stark von den gewählten Koordinaten abhängt - er hat nicht das nötige Transformationsverhalten, um in neuen Koordinaten ganz analog definiert zu sein. Das auf der rechten Seite das  $\alpha$  beides mal als oberer Index auftaucht, ist das Indiz dafür.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

Da aus dem oberen Index der Koordinatenschreibweise  $X^\alpha$  so ein Objekt mit resultierendem (Da über  $\alpha$  summiert wird, bleibt nur  $\beta$ .) unterem Index  $\beta$  in  $X^\alpha g_{\alpha\beta}$  wird, sagt man dazu auch *Runterziehen eines Index mittels  $g$* .

Die inverse Abbildung zu  $\flat$  wird mit  $\sharp$  bezeichnet, d.h.  $\omega \in \Omega^1(M) \mapsto \omega^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$  – dann ist  $\omega_\alpha dx^\alpha \mapsto \omega_\alpha g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ . Wir sagen dazu, dass wir *einen Index mittels  $g$  Hochziehen*.\*

Im Spezialfall für eine glatte Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  erhalten wir so aus der 1-Form  $df = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$  das Vektorfeld

$$\text{grad}_g f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad (\text{II.7})$$

– der *Gradient von  $f$  bzgl. der Metrik  $g$* .

Ganz analog kann man die (semi-)Riemannsche Metrik  $g$  nutzen, um Tensoren aus  $\mathcal{T}_s^r(M)$  mit solchen aus  $\mathcal{T}_{s'}^{r'}(M)$  mit  $r + s = r' + s'$  zu identifizieren. Man muss dann nur dazu sagen, welcher Index jeweils nach oben oder unten gezogen wird. In lokalen Koordinaten wird so z.B. aus einem  $(2, 0)$ -Tensor  $f^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\beta}$  ein  $(1, 1)$ -Tensor  $f^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes dx^\gamma$ .

Da für die ART die Lorentzmetrik die Gravitation bestimmen soll, wollen wir nun schauen, welche Tensoren man sonst so aus der Lorentzmetrik bauen kann. Insbesondere brauchen wir bald für die ART als echte physikalische Theorie noch Bewegungsgleichungen/Feldgleichungen für die Lorentzmetrik. Analog zu  $\Delta\Psi = 4\pi G\rho$  den Feldgleichungen für das Gravitationsfeld  $\Psi$  im Newtonschen, vgl. Abschnitt 1.1, suchen wir was mit zweiten Ableitungen von  $g$ . Wie bei den Gleichungen für den freien Fall, ändert sich aber die Form des Ausdrucks  $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}(x) := \frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} g_{\alpha\beta}(x)$  bei Koordinatenwechsel. Das sagt uns (nach dem Kovarianzprinzip), dass wir in den Feldgleichungen nicht nur  $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}(x)$  alleine erwarten, sondern einen Tensor, der solche Ableitungen enthält.

**Welche Tensoren kann man aus der Lorentzmetrik bauen?**  $\nabla X$  haben wir schon gesehen. Mit der obigen Konstruktion des Hoch-/Runterziehen von Indizes erhalten wir weiterhin den  $(2, 0)$ -Tensor

$$g^*: \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad g^*(\omega, \eta) := g(\omega^\sharp, \eta^\sharp), \quad (\text{II.8})$$

der in lokalen Koordinaten dann einfach durch

$$g^*(\omega, \eta) = g_{\alpha\beta} (\omega^\sharp)^\alpha (\eta^\sharp)^\beta = g_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} \omega_\gamma g^{\beta\delta} \eta_\delta = g^{\gamma\delta} \omega_\gamma \eta_\delta$$

gegeben ist. Da  $g$  nichtentartet ist, ist auch  $g^*$  nichtentartet und bildet ein inneres Produkt für Einsformen  $\Omega^1(M)$ . Der Kürze halber wird auch  $g^*$  oft mit  $g$  bezeichnet. Zum Vergleich auf Vektorfeldern war  $g(X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, Y^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}) = X^\alpha Y^\beta g_{\alpha\beta}$ .

---

\*Deshalb auch die Notation mit den musischen Operatoren  $\sharp$  bzw.  $\flat$ , die auch die Töne in der Musik Hoch- bzw. Runterziehen.

## II.1. Das Äquivalenzprinzip

Ähnlich baut man sich ein inneres Produkt auf  $(r, s)$ -Tensoren durch Setzen von

$$\begin{aligned}
 & g\left(\varphi_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_r}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_s}, \right. \\
 & \quad \left. \psi_{\delta_1 \dots \delta_s}^{\gamma_1 \dots \gamma_r} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\gamma_r}} \otimes dx^{\delta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\delta_s}\right) \\
 & := g^{\beta_1 \delta_1} \dots g^{\beta_s \delta_s} g_{\alpha_1 \gamma_1} \dots g_{\alpha_r \gamma_r} \varphi_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \psi_{\delta_1 \dots \delta_s}^{\gamma_1 \dots \gamma_r}
 \end{aligned} \tag{II.9}$$

und Erweitern auf allgemeine Tensoren durch Forderung nach Bilinearität.

War  $g$  Riemannsch, so sind auch die induzierten  $g$  auf den Tensoren positiv definit.

Einen weiteren sehr wichtigen Tensor erhalten wir als:

**Definition II.1.20.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche/Lorentzsche Mannigfaltigkeit. Die Abbildung  $R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  mit

$$(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} Z$$

heißt (*Riemannscher*) *Krümmungstensor* von  $(M, g)$ .

**Satz II.1.21.** Für  $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(M)$ ,  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  gilt

- (i) (*Tensoriell in den drei Komponenten*)  $R(f_1 X, f_2 Y)(f_3 Z) = f_1 f_2 f_3 R(X, Y)Z$  und  $R$  ist linear in den drei Komponenten und damit ein (glatter)  $(1, 3)$ -Tensor.
- (ii) (*Symmetrien*)  $R(X, X)Z = 0$  und  $g(R(X, Y)Z, Z) = 0$  und  $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$
- (iii) (*Bianchi-Identität*)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
- (iv) In lokalen Koordinaten gilt\*

$$\begin{aligned}
 R\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}, \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\right) &= R_{\gamma\alpha\beta}^\delta \frac{\partial}{\partial x^\delta} \\
 &= \left(\frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\delta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\alpha\rho}^\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\rho - \Gamma_{\beta\rho}^\delta \Gamma_{\alpha\gamma}^\rho\right) \frac{\partial}{\partial x^\delta}
 \end{aligned}$$

*Beweis.* Nachrechnen. □

Dass  $R(f_1 X, f_2 Y)(f_3 Z) = f_1 f_2 f_3 R(X, Y)Z$  zusammen mit der Multilinearität impliziert, dass  $R$  ein glatter  $(1, 3)$ -Tensor ist, folgt aus Bemerkung II.1.17/ÜA 15.

---

\*Die Reihenfolge, in welcher die unteren Indizes für  $R$  geschrieben werden, ist Konventionssache. Je nach Buch findet man z.B. auch  $R_{\alpha\beta\gamma}^\delta \frac{\partial}{\partial x^\delta}$ . Wir verwenden die gleiche Konvention wie [11] und das Python-Paket einsteinpy.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

**Bemerkung II.1.22.** (i) (Interpretation) Die Krümmung misst den 'Fehlerterm des Satzes von Schwarz für kovariante Ableitungen':  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\nu}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\nu}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} = R\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)$ .<sup>†</sup> Man darf bei Krümmung nicht direkt an 'externe Krümmung' denken – in folgendem Sinne: Die Erdkugel/ $S^2$  ist im Weltall/ $\mathbb{R}^3$  gekrümmt, der Zylinder in  $\mathbb{R}^3$  allerdings auch. Hingegen ist  $R$  vom Zylinder Null von der  $S^2$  hingegen nicht (beides für die vom  $\mathbb{R}^3$  induzierte Metrik) (siehe [sphere.py](#) und [cylinder.py](#)). Der Krümmungstensor ist eine 'interne' Eigenschaft von  $(M, g)$  und hängt nicht davon ab, wie und ob  $M$  in einem  $\mathbb{R}^N$  eingebettet ist. Diese 'eingebettete' Krümmungsanschauung liefert andere Krümmungsbegriffe (z.B. mittlere Krümmung, vgl. Definition II.6.6).

(ii) Auf dem Minkowskiraum bzw. euklidischen Raum sind die kovarianten Ableitungen in Richtung der Standardkoordinaten gerade die Ableitungen in Koordinaten. Für diese gilt der Satz von Schwarz. Deshalb ist für den Minkowski- und für den euklidischen Raum  $R \equiv 0$ . (In anderen Koordinaten auf dem Minkowskiraum/euklidischen Raum sind die kovarianten Ableitungen i.A. nicht mehr nur die Ableitungen in Koordinatenrichtungen, sondern es tauchen nichtverschwindende Christoffelsymbole auf, vgl. ÜA 18. Da  $R$  jedoch ein Tensor ist und somit das Tensortransformationsverhalten unter Koordinatenwechsel gilt, sind auch alle Tensorkomponenten in diesen Koordinaten gleich Null.)

(iii) Die Terme von  $R$  die in lokalen Koordinaten zweite Ableitungen von  $g_{\alpha\beta}$  erhalten sind

$$R_{\gamma\alpha\beta}^\delta = \frac{1}{2} g^{\delta\kappa} (+g_{\beta\kappa, \alpha\gamma} - g_{\beta\gamma, \kappa\alpha} - g_{\alpha\kappa, \beta\gamma} + g_{\alpha\gamma, \kappa\beta}) + \text{Terme in } g_{\alpha\beta} \text{ und erste Abl..}$$

$$\text{(Hier ist } g_{\alpha\beta, \kappa\gamma} = \frac{\partial^2}{\partial x^\kappa \partial x^\gamma} g_{\alpha\beta}.)$$

(iv)  $g(R(\cdot, \cdot), \cdot, \cdot)$  ist ein  $(0, 4)$ -Tensor – lokal  $g_{\alpha\beta} R_{\gamma\delta\epsilon}^\beta =: R_{\alpha\gamma\delta\epsilon}$ .

Um weitere Tensoren zu erhalten, schauen wir uns als nächstes allgemeine Operationen auf Tensoren an. Neben Linearkombinationen von  $(r, s)$ -Tensoren, Tensorprodukte von Tensoren, Hoch- und Runterziehen von Indizes mittels  $g$  haben wir:

**Kontraktion von Tensoren.** Die  $(1, 1)$ -Kontraktion ist die eindeutige  $C^\infty(M)$ -lineare Abbildung  $C: \mathcal{T}_1^1 M \rightarrow C^\infty(M)$  mit  $C(X \otimes \omega) = \omega(X)$  für alle  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und  $\omega \in \Omega^1(M)$ . Das induziert eine Kontraktion  $C_j^i: \mathcal{T}_s^r M \rightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r-1} M$  durch

$$C_j^i(S)(\omega^1, \dots, \omega^{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1}) := C(S(\omega^1, \dots, \omega^{i-1}, \underbrace{\omega^i, \dots, \omega^{r-1}, X_1, \dots, X_{j-1}, \omega^j, \dots, X_{s-1}}_{\in \mathcal{T}_1^1 M})).$$

\*In lokalen Koordinaten gilt  $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} f = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} f$  für alle  $f \in C^\infty(M)$ .

<sup>†</sup>Für eine geometrischere Interpretation mittels Paralleltransports, siehe [6, S. 28 unten].

Name	Riemannsche Krg	Ricci-Krg	Skalarkrg
Formel	$R_{\gamma\alpha\beta}^{\delta}$	$\text{Ric}_{\gamma\beta} = R_{\gamma\delta\beta}^{\delta}$	$\text{scal} = g^{\gamma\beta} R_{\gamma\delta\beta}^{\delta}$

Abb. II.2.: (Abgeleitete) Krümmungsgrößen

**Beispiel II.1.23.** (Ricci-Krümmung) Die *Ricci-Krümmung* ist definiert als  $\text{Ric} = C_1^1(R)$ . Da  $R = R_{\beta\alpha\delta}^{\gamma} \partial_{\gamma} \otimes dx^{\alpha} \otimes dx^{\delta} \otimes dx^{\beta}$  ist, ist  $\text{Ric} = R_{\beta\gamma\delta}^{\gamma} dx^{\delta} \otimes dx^{\beta}$  – ein  $(0, 2)$ -Tensor. Aus den Symmetrien von  $R$  in Satz II.1.21 folgt  $\text{Ric}_{\alpha\beta} = \text{Ric}_{\beta\alpha}$ .

**Bemerkung II.1.24.** (Zum Hoch-/Runterziehen von Indizes mittels  $g$ ) Durch Hochziehen eines Index mittels  $g$  können wir daraus einen  $(1, 1)$ -Tensor machen:

$\text{Ric} = g^{\alpha\gamma} \text{Ric}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \otimes dx^{\beta} = g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\delta\beta}^{\delta} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \otimes dx^{\beta}$ . Wir setzen  $\text{Ric}_{\beta}^{\gamma} := g^{\alpha\gamma} \text{Ric}_{\alpha\beta}$  – man hat den Index  $\beta$  mittels  $g$  hochgezogen. A priori ist das eine schlechte Notation, da aus der Schreibweise nicht hervorgeht, ob der erste oder der zweite Index hochgezogen werden. Da aber sowohl  $\text{Ric}$  als auch  $g$  symmetrische Bilinearformen sind, spielt das hier keine Rolle. Für allgemeine  $(r, s)$ -Tensoren ist das nicht so.\* Allgemein kann man das Hochziehen des  $i$ -ten unteren Index eines Tensors  $T$  als  $C_i^1(g^* \otimes T)$  (Hier ist  $g^*$  der von  $g$  induzierte  $(2, 0)$ -Tensor aus (II.8).) auffassen (Runterziehen analog als  $C_1^i(g \otimes T)$ ).

**Beispiel II.1.25.** Die *Skalarkrümmung*  $\text{scal} = C_1^1(\text{Ric}) = \text{Ric}_{\alpha}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} \text{Ric}_{\alpha\beta}$  ist ein  $(0, 0)$ -Tensor, also eine glatte Funktion auf  $M$ . Der *Einsteintensor* ist ein  $(0, 2)$ -Tensor definiert als

$$G = \text{Ric} - \frac{\text{scal}}{2} g.$$

Es gilt  $g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \text{Ric}_{\mu\nu} - \frac{\text{scal}}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = (1 - \frac{m}{2}) \text{scal}$ , wobei  $m = \dim M$  ist. D.h. ist  $G \equiv 0$ , dann ist schon  $\text{scal} \equiv 0$  und damit auch  $\text{Ric} \equiv 0$ . Insgesamt ist  $G$  also genau dann Null, wenn  $\text{Ric}$  verschwindet.

**Ableiten von Tensoren.** Da Vektorfelder  $(1, 0)$ -Tensoren sind, gibt der Levi-Civita-Zusammenhang  $\nabla$  eine Möglichkeit  $(1, 0)$ -Tensoren in Richtung eines Vektorfeldes abzuleiten. Nun wollen wir  $\nabla$  zu Ableitungen von  $(r, s)$ -Tensoren derart verallgemeinern, dass es kompatibel mit der Dualitätspaarung von Vektorfelder/ $(1, 0)$ -Tensoren und Einsformen/ $(0, 1)$ -Tensoren und kompatibel mit dem Tensorprodukt ist.

Vorl. 8

Eine Erweiterung dieses Zusammenhang auf Tensoren sollte also:

- (a) auf Vektorfelder mit dem ursprünglichen  $\nabla$  übereinstimmen;
- (b) Für  $X \in \mathfrak{X}(M)$  sollte  $\nabla_X$  eine Abbildung von  $\mathcal{T}_s^r M$  in sich selbst sein;
- (c) die Leibnizregel erfüllen:

$$\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X S;$$

---

\*Oft wird als Notation vom Hochziehen folgendes verwendet  $T_{\alpha}^{\beta\delta} := g^{\beta\eta} g^{\delta\zeta} T_{\alpha\eta\gamma\zeta}$  – durch die ‘Leerstellen’ merkt man sich, welcher Index hoch- bzw. runtergezogen wurde.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

(d) Für  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  ist  $\omega(Y) \in C^\infty(M)$  ( $\omega_p \in T_p^*M$ ). Funktionen können wir in  $X$ -Richtung ableiten. Also fordern wir

$$X(\omega(Y)) = (\nabla_X \omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y). \quad (\text{II.10})$$

(Funktionen kann man als  $(0,0)$ -Tensor betrachten. Dann wäre  $\nabla$  auf  $(0,0)$ -Tensoren gegeben durch  $\nabla_X(f) = X(f) = df(X)$ .)

Wir setzen für alle  $X, Y_i \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\omega^i \in \Omega^1(M)$  und

$$(\nabla_X S)(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) := (\nabla S)(\omega^1, \dots, \omega^r, X, Y_1, \dots, Y_s),$$

Mit diesen Forderungen und Konventionen ist die Erweiterung schon auf alle Tensoren eindeutig bestimmt und wir haben z.B.

**Satz II.1.26.** *Es gibt genau eine Abbildung  $\nabla: \mathcal{T}_s^r M \rightarrow \mathcal{T}_{s+1}^r M$ ,  $S \mapsto \nabla S$ , für die Bedingung (a)-(d) erfüllt sind. Diese Abbildung ist für alle  $X, Y_i \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\omega^i \in \Omega^1(M)$  gegeben durch*

$$\begin{aligned} (\nabla_X S)(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) &= X(\underbrace{S(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s)}_{\in C^\infty(M)}) \\ &- \sum_{i=1}^s S(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_s) - \sum_{j=1}^r S(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^j, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s). \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

In lokalen Koordinaten gilt für die Komponentenfunktionen von  $\nabla S$ :

$$(\nabla S)_{\gamma\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = \partial_\gamma S_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} - \sum_{i=1}^s S_{\beta_1 \dots \beta_{i-1} \delta \beta_{i+1} \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \Gamma_{\gamma\beta_i}^\delta + \sum_{i=1}^r S_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \delta \alpha_{i+1} \dots \alpha_r} \Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha_i}$$

*Beweis.* Nachrechnen □

**Lemma II.1.27.** *Für den Levi-Civita Zusammenhang einer (semi-)Riemannschen Metrik  $g$  gilt  $\nabla g = 0$  (d.h.  $\nabla_X g = 0$  für alle  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ).*

*Beweis.*  $(\nabla_X g)(Y_1, Y_2) = X(g(Y_1, Y_2)) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2) = 0$  wegen Metrizität von  $\nabla$ , vgl. Lemma II.1.10.iv. □

**Lemma II.1.28.** *Es gilt  $[C, \nabla] = 0$  im Sinne von: Ist  $T \in \mathcal{T}_s^r M$  mit  $r, s \geq 1$ ,  $1 \leq i \leq r$  und  $1 \leq j \leq s$ , dann gilt  $C_j^i(\nabla_X T) = \nabla_X(C_j^i T)$  für alle  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Weiterhin kommutiert  $\nabla$  mit dem Hoch-/Runterziehen von Indizes mit  $g$ .*

*Beweis.* Wegen Linearität reicht es die Gleichheit auf Elementartensoren zu überprüfen. Wir wählen Tensoren der Form  $S \otimes Y \otimes \omega \otimes T$  mit  $S \in \mathcal{T}_0^{r-1} M$ ,  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\omega \in \Omega^1(M)$

## II.1. Das Äquivalenzprinzip

und  $T \in \mathcal{T}_{s-1}^0 M$ . Die Wahl der  $i$  und  $j$  spielt keine Rolle, sei o.B.d.A.  $i = r$  und  $j = 1$ :

$$\begin{aligned}
& C_1^r(\nabla_X(S \otimes Y \otimes \omega \otimes T)) \\
& \stackrel{(b)}{=} C_1^r(\nabla_X S \otimes Y \otimes \omega \otimes T + S \otimes \nabla_X Y \otimes \omega \otimes T \\
& \quad + S \otimes Y \otimes \nabla_X \omega \otimes T + S \otimes Y \otimes \omega \otimes \nabla_X T) \\
& = \omega(Y) \nabla_X S \otimes T + (\omega(\nabla_X Y) + (\nabla_X \omega)(Y)) S \otimes T + \omega(Y) S \otimes \nabla_X T \\
& \stackrel{(b)^+(d)}{=} \omega(Y) \nabla_X(S \otimes T) + X(\omega(Y)) S \otimes T \\
& = \nabla_X(\omega(Y) S \otimes T) = \nabla_X(C_1^r(S \otimes Y \otimes \omega \otimes T)).
\end{aligned}$$

Das Kommutieren von  $\nabla$  mit dem Runterziehen von Indizes folgt, da das Runterziehen als  $C_1^i(g \otimes T)$  geschrieben werden kann,  $\nabla$  mit  $C$  kommutiert und  $\nabla g = 0$  ist. Analog sieht man die Aussage für das Hochziehen, da auch  $\nabla g^* = 0$  ist, vgl. ÜA 16.  $\square$

**Lemma II.1.29.** (2. Bianchi-Identität) Es gilt

$$(\nabla_U R)(X, Y) + (\nabla_X R)(Y, U) + (\nabla_Y R)(U, X) = 0,$$

wobei  $(\nabla_U R)(X, Y): \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  durch  $Z \mapsto (\omega \in \Omega^1(M) \mapsto (\nabla_U R)(\omega, X, Y, Z))$  definiert ist.

*Beweis.* ÜA 17 (Wegen der Tensoreigenschaft reicht es zum Beispiel, die Formel auf Koordinatenvektorfelder zu überprüfen.)  $\square$

Die (ii) Aussage im Kovarianzprinzip von Seite 25 formuliert man oft als:

(ii)' Die Gleichungen eines physikalischen Gesetzes nehmen in allen Koordinatensystemen die gleiche Form an und sind gewöhnlich in Tensoren ausgedrückt.

### II.1.3. Korrespondenzprinzip

Das Kovarianzprinzip ist eher als Minimalforderung oder Ausschlusskriterium zu verstehen, welche Gleichungen für physikalische Gesetze überhaupt in Frage kommen. Formuliert man es etwas anders (oft *Korrespondenzprinzip* genannt) gibt es einen ad-hoc Formalismus, wie aus Gleichungen der SRT Gleichungen der ART werden könnten:

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu} & \mapsto g_{\mu\nu} \\
\frac{\partial}{\partial x^\mu} & \mapsto \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}
\end{aligned}$$

Das gibt (ähnlich wie Quantisierung in der Quantenmechanik) eine ad-hoc Methode, die nicht zwingend zum richtigen Ergebnis führen muss. Ein offensichtlicher Grund ist, dass die 'Umkehrabbildung' nicht injektiv ist. Es gibt Größen die im Minkowskiraum Null sind, z.B. die Krümmung  $R$ , aber nicht auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten. Das ist z.B. bei zweiten Ableitungen relevant – wie wir bei den Gezeitenkräften im

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

nächsten Abschnitt sehen werden. Für die Feldgleichungen der ART selbst wird das Korrespondenzprinzip auch keinen ersten Anhaltspunkt geben, da in der SRT gar keine Gravitation vorkommt. Da werden wir uns mit der klassischen Theorie (Newton) und dem Kovarianzprinzip begnügen müssen. Aber die SRT wird uns helfen, den 'richtigen Tensor' für den Ersatz der Masseverteilung  $\rho$  in  $\Delta\Psi = 4\pi G\rho$  zu erhalten, vgl. Abschnitt II.2.

### II.1.4. Gezeitenkräfte

**Was sind Gezeiten?** Man hat verschiedene Testkörper, die sich im freien Fall im Gravitationsfeld, befinden. Dabei ändert sich i.A. der Abstand dieser Teilchen.

**Was bedeutet dies auf dem Level der Geodätischen (der Kurven freien Falls)?\*** Wir wollen dazu das Verhalten von Geodätischen mit 'nah beieinander liegenden' Anfangswerten untersuchen – also fragen: 'Streben die Geodätischen dann eher voneinander weg oder aufeinander zu'?

Geodätische  $c$  waren Kurven, die die Gleichung  $\nabla_c \dot{c} = 0$  erfüllen, was in lokalen Koordinaten<sup>†</sup> die Form

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0 \quad \forall \alpha \quad (\text{II.12})$$

für  $x(u) = \kappa(c(u))$ , einer Karte  $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  um  $p = c(u_0) = \kappa^{-1}(x_0)$  mit lokalen Koordinaten  $x^\alpha$  hat. Der Punkt über  $c$  bzw.  $x$  steht hier für die Ableitung bzgl. des Parameters  $u$ .<sup>‡</sup>

Die Anfangsbedingungen  $c(u_0) = p$  und  $\dot{c}(u_0) = Y \in T_p M$  sind in lokalen Koordinaten dann  $x^\alpha(u_0) = x_0^\alpha$  und  $\dot{x}^\alpha(u_0) = Y^\alpha$ . Nach dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es bei gegebenen Anfangswerten eine eindeutige Lösung von (II.12) auf einem maximalen Intervall um  $u_0$  und die Lösung hängt glatt von den Anfangswerten ab.

Da die Geodätengleichung nichtlinear ist, ist die Frage, ob nahe beieinander startende Geodätische aufeinander zu oder voneinander weg streben, a priori nicht leicht zu beantworten. Deshalb schauen wir uns nur die Effekte erster Ordnung an, d.h. wir werden die Geodätengleichung linearisieren<sup>§</sup> Um das zu formalisieren, definieren wir

---

\*Als Geodätische bezeichnet man im Allgemeinen nicht nur die Kurven des freien Falls, also zeitartige Kurven die in lokalen Koordinaten die Gleichungen  $\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0$  für alle  $\alpha$  erfüllen. In Abschnitt II.1 hatten wir gesehen, dass alle zeitartigen Lösungen dieser Gleichung Kurven freien Falls von Testteilchen sind. Analog sind alle lichtartigen Lösungen Kurven freien Falls von Lichtteilchen. Es gibt auch raumartige Lösungen, die allerdings keine solche Interpretation haben, aber alle Lösungen werden *Geodätische* genannt.

<sup>†</sup>vgl. auch † auf Seite 31

<sup>‡</sup>Im Riemannschen wird der Parameter  $u$  oft als Zeit interpretiert und als  $t$  gewählt. Da wir in Lorentzmannigfaltigkeiten manchmal eine global/lokal gewählte Zeitfunktion verwenden werden und das  $u$  hier der davon i.A. verschiedenen Eigenzeit ist, benutzen wir hier lieber  $u$ .

<sup>§</sup>Bei den allermeisten Beschreibungen physikalischer Effekte wird linearisiert. Ausnahmen sind z.B. Entwicklungen um Gleichgewichte/kritische Punkte (deshalb kommt der harmonische Oszillator überall so oft vor).

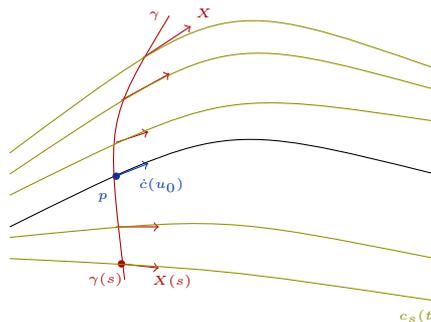
## II.1. Das Äquivalenzprinzip

**Definition II.1.30.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche oder Lorentzsche Mannigfaltigkeit. Eine glatte Abbildung  $c: (-\epsilon, \epsilon) \times I \rightarrow M$  heißt *geodätische Variation längs der Kurve*  $c(u) := c(0, u)$ , falls für jedes  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$  die Kurve  $c_s: u \mapsto c(s, u)$  eine Geodätische ist.

**Bemerkung II.1.31.** Sei  $c: [a, b] \rightarrow M$  eine Geodätische,  $u_0 \in [a, b]$ ,  $p = c(u_0)$ . Sei  $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  eine glatte Kurve mit  $p = \gamma(0)$  und sei  $X$  ein glattes Vektorfeld längs  $\gamma$ , d.h.  $X: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM = \bigsqcup_{q \in M} T_q M$  und  $X(s) \in T_{\gamma(s)} M$ , so dass  $X$  glatt von  $s$  abhängt. Sei  $X(0) = \dot{c}(u_0)$ . Hier repräsentiert  $\gamma(s)$  für jeden Parameter  $s$  einen Testkörper und  $X(s)$  die Anfangsgeschwindigkeit dieses Testkörpers.

Für diese Interpretation mit den Testkörpern sollte  $g_{\gamma(s)}(X(s), X(s)) = -1$  sein. Ist aber für die folgenden Gleichungen unwichtig – diese gelten für alle Wahlen von  $X$ .

Sei dann  $c_s(u)$  die eindeutige Geodätische mit  $c_s(u_0) = p$  und  $\dot{c}_s(u_0) = X(s)$ . Wir setzen  $c(s, u) := c_s(u)$ .



Wegen glatter Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten ist  $c(s, u)$  von oben glatt als Abbildung  $c: (-\epsilon, \epsilon) \times I \rightarrow M$ . Es ist also  $c$  eine geodätische Variation. Zur Frage des maximalen Existenzintervall für Geodätischen kommen wir später, vgl. Seite 95.

Sei  $J(u) := \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} c(s, u) \in T_{c(u)} M$  das *Variationsvektorfeld* zu einer geodätischen Variation  $c(s, u)$ . Dann gilt

$$\nabla_{\dot{c}(u)} J(u) = \nabla_{\dot{c}(u)} (\partial_s c(s, u)|_{s=0}) = (\nabla_{\partial_s c(s, u)} \partial_u c(s, u)) \Big|_{s=0}.$$

Die letzte Gleichheit folgt am Ende aus der Torsionsfreiheit (also der Symmetrie der Christoffelsymbole in den unteren beiden Indizes), da lokal gilt, dass (verwendet (II.2) zusammen mit  $\dot{c} = \dot{c}^\alpha \partial_{x^\alpha}$  und  $\partial_s \dot{c} = \partial_s c^\alpha \partial_{x^\alpha}$ )

$$\nabla_{\frac{\partial c}{\partial u}} \frac{\partial c}{\partial s} = \left( \frac{\partial^2 c^\alpha}{\partial u \partial s} + \frac{\partial c^\beta}{\partial u} \frac{\partial c^\gamma}{\partial s} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \right) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \nabla_{\frac{\partial c}{\partial s}} \frac{\partial c}{\partial u}. \quad (\text{II.13})$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{c}(u)}^2 J(u) &= \nabla_{\dot{c}(u)} \nabla_{\dot{c}(u)} \frac{\partial}{\partial s} c(s, u) \Big|_{s=0} = \left( \nabla_{\partial_u c(s, u)} \nabla_{\partial_s c(s, u)} \frac{\partial}{\partial u} c(s, u) \right) \Big|_{s=0} \\ &\stackrel{\text{Def. von } R}{=} \left( \nabla_{\partial_s c(s, u)} \underbrace{\nabla_{\partial_u c(s, u)} \frac{\partial}{\partial u} c(s, u)}_{=0 \text{ da alle } c_s \text{ Geod.}} \right) \Big|_{s=0} + R \left( \frac{\partial}{\partial u} c(0, u), \frac{\partial}{\partial s} c(0, u) \right) \frac{\partial}{\partial u} c(0, u) \\ &= R(\dot{c}(u), J(u)) \dot{c}(u). \end{aligned}$$

Dass wir in der zweiten Zeile der letzten Gleichung  $s = 0$  direkt auf die Vektoren in  $R$  anwenden können, benutzt insbesondere, dass  $R$  ein Tensor ist.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

**Definition II.1.32.** Sei  $c: I \rightarrow M$  Geodätische. Die Gleichung

$$\nabla_{\dot{c}(u)}^2 J(u) = R(\dot{c}(u), J(u))\dot{c}(u)$$

heißt *Jacobigleichung* (in der Differentialgeometrie) bzw. *Deviationsgleichung* (in der ART) und deren Lösungen heißen *Jacobifelder längs  $c$* .

Wir haben also vorhin nachgerechnet, dass jedes Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation ein Jacobifeld ist. Umgekehrt ist auch (haben wir hier nicht nachgerechnet) jedes Jacobifeld längs  $c$  ein Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation von  $c$ .

**Interpretation II.1.33** (Was machen Gezeitenkräfte?). Statt entlang der Geodäten  $c(u)$  fällt ein Teilchen in der Nähe dank der Gezeitenkräfte entlang  $c(u) + \eta(u)$  (alles hier und folgend in Koordinaten gedacht, da sonst Addition von Punkten in  $M$  keinen Sinn macht). Wären wir in der Minkowskimetrik, wäre  $\ddot{c} = 0$  und  $\ddot{\eta}$  die 'Gezeitenkraftbeschleunigung' – Gezeitenkraft pro Masse.

Wir haben gerade ausgerechnet: Für  $c(s, u) = c(u) + sJ(u) + O(s^2)$  ist  $\nabla_{\dot{c}}^2 J = R(\dot{c}, J)\dot{c}$ . Also ist  $R(\dot{c}, J)\dot{c}$  die Gezeitenkraftänderungsrate pro Masse (..rate, da die Gleichung für  $J$  und nicht für  $sJ$  da steht).

## II.2. Feldgleichungen

Vorl. 9

Wir wollen nun zu den Feldgleichungen der ART kommen - also Gleichungen, die das Gravitationsfeld, also  $g_{\mu\nu}$  bestimmen. Im Newtonschen war das  $\Delta\Psi = 4\pi G\rho$  – das Gravitationspotential  $\Psi$  wurde also durch die Masseverteilung  $\rho$  bestimmt.

### Wie kann die rechte Seite für die 'analogen' Feldgleichungen in der ART aussehen?

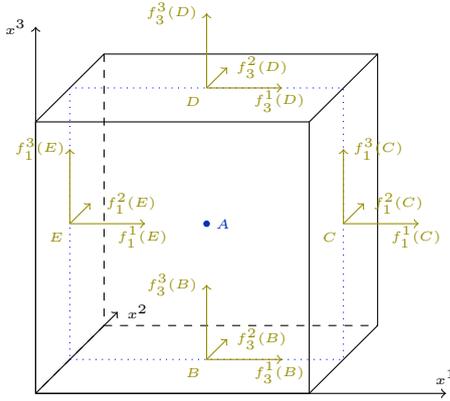
Schon in der SRT haben wir gesehen, dass die Masse im (Vierer-)Impuls geschwindigkeitsabhängig ist und dort nicht nur die Ruhemasse vorkommt. Auch ist nur die Ruhemasse alleine nicht das gute Konzept, da Masse auch zum größten Teil einfach Bindungsenergie ist. D.h. das Gravitationsfeld sollte durch Energie-/Impulsverteilung bestimmt werden. Dazu müssen wir zuerst wenigstens etwas zu Kontinuumsphysik sagen, denn die ART ist per Konstruktion eine Kontinuumstheorie.\*

Dazu kommen wir zuerst zu Kräften im 'Inneren' des Kontinuums (des Festkörpers/der Flüssigkeit/...): Wir schauen uns das in einer Approximation an – ein kleines Volumenelement – ein Würfel der Kantenlänge  $2\epsilon$  um den Mittelpunkt  $A$ .

---

\*Newton eigentlich auch - fiel bloß nicht so auf, weil wir in den Anwendungen meist nur Punktteilchen betrachtet haben...

## II.2. Feldgleichungen



Die Kraft auf das  $i$ -te Flächenelement (im jeweiligen Flächenelement) sei  $f_i = f_i^j \partial_j$ . Der Anteil  $f_i^i$  ist der Kraftanteil der linear 'durchgeht', die anderen sind die Scherkräfte auf das Flächenelement. Schon im Newtonschen ist  $(f_j^i)$  ein Tensor<sup>†</sup> – der *Spannungstensor*. Damit haben wir in jedem Punkt des Kontinuums einen Spannungstensor.

Bevor wir zu den Impulsdichten kommen, überlegen wir uns, dass der Spannungstensor symmetrisch ist. Dazu schauen wir uns die  $(x^1 - x^3)$ -Fläche des obigen Würfels durch den Würfelmittelpunkt  $A$  an:

Dann ist\*

$$\begin{aligned} & \epsilon(f_3^1(B) - f_1^3(C) + f_3^3(D) - f_1^3(E)) \\ &= \text{Drehmoment(flächen)dichte um } x^2\text{-Achse} \\ &= \epsilon \cdot \text{Trägheits(volumen)dichte bei Rotation um } x^2\text{-Achse} \cdot \text{Winkelbeschleunigung} \\ &= \epsilon \cdot \text{Massen(volumen)dichte} \cdot (2\epsilon)^2 \cdot \text{Winkelbeschleunigung.} \end{aligned}$$

Teilen durch  $\epsilon$  und dann Limes für  $\epsilon \rightarrow 0$  ergibt

$$2(f_3^1(A) - f_1^3(A)) = \text{Massendichte} \cdot 0 \cdot \text{Winkelbeschleunigung} = 0.$$

Damit ist  $f_3^1 = f_1^3$  und analog für die anderen Richtungen – der Spannungstensor ist also symmetrisch.

Nun zum Impuls: Die Impulserhaltung sagt zeitliche Impulsänderung ist gleich Kraft. In der Kontinuumsversion haben wir (für  $e_i$  den Einheitsvektor in  $x^i$ -Richtung und  $A$  als Nullpunkt):

$$\begin{aligned} & \partial_t(\text{Impulsdichte in } x^1\text{-Richtung}) \cdot 2\epsilon \\ &= f_1^1(\epsilon e_1) - f_1^1(-\epsilon e_1) + f_2^1(\epsilon e_2) - f_2^1(-\epsilon e_2) + f_3^1(\epsilon e_3) - f_3^1(-\epsilon e_3) + O(\epsilon^2) \\ &= \underbrace{f_1^1(\epsilon e_1) - f_1^1(0) - f_1^1(-\epsilon e_1) + f_1^1(0)}_{=\epsilon \partial_1 f_1^1(0) + O(\epsilon^2)} + f_2^1(\epsilon e_2) - f_2^1(-\epsilon e_2) + f_3^1(\epsilon e_3) - f_3^1(-\epsilon e_3) + O(\epsilon^2) \\ &= 2\epsilon \text{div}(f_j^1 \partial_j)(A) + O(\epsilon^2) \stackrel{f_j^1 = f_1^j}{=} 2\epsilon \text{div}(f_1^j \partial_j)(A) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

<sup>†</sup> das kann man mittels des Transformationsverhalten überprüfen

\* Jeweils ohne '.dichte':

$$\vec{M} \text{Drehmoment} = \vec{r} \text{Hebellänge} \times \vec{F} \text{Kraft}, \quad \vec{L} \text{Drehimpuls} = J \text{Trägheitsmoment} \vec{\omega} \text{Winkelgeschwindigkeit}, \quad \dot{\vec{L}} = \vec{M}$$

$$J \text{Trägheitsmoment} = \int_{\text{Körper}} \rho \text{Massendichte} (d_A \text{Abstand zur Rotationsachse})^2 d\text{vol}$$

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

Bezeichnen wir die Impulsdichte in  $x^i$ -Richtung mit  $p_i$  haben wir damit

$$\dot{p}_i = \operatorname{div} (f_i^j \partial_j).$$

Da wir eine Beschreibung kompatibel mit der SRT suchen, ist es sinnvoll die  $p_i$  mit zu dem Spannungstensor zu schreiben. Dann haben wir bis jetzt eine  $3 \times 4$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} p_1 & f_1^1 & f_1^2 & f_1^3 \\ p_2 & f_2^1 & f_2^2 & f_2^3 \\ p_3 & f_3^1 & f_3^2 & f_3^3 \end{pmatrix}$$

für die jede Zeile bzgl. der Minkowskimetrik divergenzfrei ist. (Allgemein ist in der Lorentz-/Riemannschen Metrik die Divergenz eines Vektorfeldes  $\operatorname{div} X = \operatorname{Spur}(Y \mapsto \nabla_Y X)$  – in lokalen Koordinaten:  $(\nabla_\gamma X)^\gamma$ \*, also in Minkowski  $\operatorname{div} X = -\partial_{x^0} X^0 + \partial_{x^i} X^i$ .)

In der SRT haben wir aber schon gesehen, dass der 'Dreierimpuls' selber kein gutes Transformationsverhalten hat, und wir deshalb  $p = (p_0, p_i)$  mit  $p_0$  der Energiedichte†  $p_0$  betrachten sollten. Deshalb setzen wir obige  $3 \times 4$ -Matrix durch

$$T := \begin{pmatrix} p_0 & ? & ? & ? \\ p_1 & f_1^1 & f_1^2 & f_1^3 \\ p_2 & f_2^1 & f_2^2 & f_2^3 \\ p_3 & f_3^1 & f_3^2 & f_3^3 \end{pmatrix}$$

fort – allerdings fehlen uns zu einer  $4 \times 4$ -Matrix noch 3 Einträge: Will man analog auch eine divergenzfreie 1. Zeile, erwartet man für die fehlenden Einträge einen Vektor der  $\partial_t p_0 = \operatorname{div}_{\mathbb{R}^3} X$  erfüllt (Energieerhaltung). Solch ein  $X$  nennt man *Energiestromdichte*.

Für die gängigen Modelle (z.B. Teilchen (Staub/Gas) bestehend aus relativistischen Teilchen oder im Elektromagnetismus), in denen man  $T$  aus einem Modell ableitet, sind die Energiestromdichten gleich den Impulsdichten. Damit ist das resultierende  $T$  symmetrisch. Wir werden später noch Beispiele sehen, vgl. Abschnitt II.4.3.

Damit erhalten wir einen Tensor  $T$ . Im Moment ist es ein  $(1,1)$ -Tensor, der aus Vektorfeldern wieder Vektorfelder macht. I.A. betrachtet man den (durch Runterziehen eines Index mittels der Minkowskimetrik) den zugehörigen symmetrischen  $(0,2)$ -Tensor  $T = T_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  – der *Energie-Impuls-Tensor*.

Dieses  $T$  soll ein SRT-Analogon für die rechte Seite der Feldgleichungen der ART sein. Es ist deshalb plausibel, dass der Energie-Impuls-Tensor in der ART auch ein

\* Die Divergenz hängt von der Metrik ab! Weiterhin haben wir ganz analog zum Euklidischen einen Divergenzsatz für Riemannsche Mannigfaltigkeiten: Sei  $\Omega \subset M$  ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und  $\nu$  in jedem Punkt von  $\partial\Omega$  der äußere Einheitsnormalenvektor. Dann gilt der Divergenzsatz:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X \operatorname{dvol}_g = \int_{\partial\Omega} g(X, \nu) \operatorname{dvol}_{g_{\partial\Omega}}.$$

†Eigentlich Energiedichte durch Lichtgeschwindigkeit, aber wir setzen hier  $c = 1$  und kümmern uns erst mal nicht um Einheiten.

symmetrischer  $(0, 2)$ -Tensor sein soll. Es bleibt die Frage, wie wir die Bedingung der Divergenzfreiheiten der Spalten, ersetzen. Das ist nötig, da die Forderung der Divergenzfreiheit aller  $(0, 1)$ -Tensoren  $S_\nu := T_{\mu\nu}$  koordinatenabhängig ist. In allgemeinen Koordinatensystemen ist die Energie- bzw. der Impuls- nicht wie oben erhalten. Statt dessen brauchen wir die Verallgemeinerung auf symmetrische  $(0, 2)$ -Tensoren. Wir werden vom Energie-Impuls-Tensor dann verlangen, dass diese Divergenz verschwindet.

### Divergenz eines symmetrischen $(0, 2)$ -Tensors.

**Definition II.2.1.** Sei  $S$  ein symmetrischer  $(0, 2)$ -Tensor. Dann ist  $\text{div}(S)$  ein  $(0, 1)$ -Tensor und in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$(\text{div } S)_\alpha = g^{\beta\gamma} (\nabla_{\partial_\gamma} S)_{\alpha\beta}.$$

**Beispiel II.2.2.** Sei  $(M, g)$  eine (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(i)  $\text{div } g = 0$ , da schon  $\nabla g = 0$ , s. Lemma II.1.27.

(ii) Für  $f \in C^\infty(M)$  ist  $\text{div}(fg) = df$ :

$$\begin{aligned} \text{div}(fg) &= (\text{div}(fg))_\gamma dx^\gamma = g^{\alpha\beta} (\nabla_{\partial_\alpha} (fg))_{\gamma\beta} dx^\gamma \\ &\stackrel{\nabla g=0}{=} g^{\alpha\beta} g_{\gamma\beta} \partial_\alpha f dx^\gamma = \partial_\alpha f dx^\alpha = df. \end{aligned}$$

(iii) Wir wollen die Divergenz der Riccikrümmung und des Einsteintensors bestimmen: Dazu verwenden wir die zweite Bianchi-Identität (vgl. Lemma II.1.29)

$$(\nabla_U R)(\omega, X, Y, Z) + (\nabla_X R)(\omega, Y, U, Z) + (\nabla_Y R)(\omega, U, X, Z) = 0$$

Wir betrachten die linke Seite für festes  $U = \partial_\alpha := \partial_{x^\alpha}, Y = \partial_\beta, Z = \partial_\gamma$  und  $\omega = dx^\beta$  und  $X = \partial_\epsilon$ . Dann ist

$$(\nabla_\alpha R)_{\gamma\epsilon\beta}^\delta - (\nabla_\epsilon R)_{\gamma\beta\alpha}^\delta + (\nabla_\beta R)_{\gamma\alpha\epsilon}^\delta = 0.$$

Kontrahieren wir  $\omega = dx^\beta$  und  $X = \partial_\epsilon$  und verwenden, dass Kontraktion und  $\nabla$  kommutieren, Lemma II.1.28, sowie die Symmetrien von  $R$ , erhalten wir damit

$$(\nabla_\alpha \text{Ric})_{\gamma\beta} - (\nabla_\delta R)_{\gamma\beta\alpha}^\delta - (\nabla_\beta \text{Ric})_{\gamma\alpha} = 0.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\beta\gamma} (\nabla_\alpha \text{Ric})_{\beta\gamma} - g^{\beta\gamma} (\nabla_\beta \text{Ric})_{\alpha\gamma} - g^{\beta\gamma} (\nabla_\delta R)_{\gamma\alpha\beta}^\delta \\ &= \nabla_\alpha \text{scal} - g^{\beta\gamma} (\nabla_\beta \text{Ric})_{\alpha\gamma} - g^{\beta\gamma} g^{\delta\eta} (\nabla_\delta R)_{\eta\gamma\alpha\beta} \\ &= \nabla_\alpha \text{scal} - g^{\beta\gamma} (\nabla_\beta \text{Ric})_{\alpha\gamma} - g^{\beta\gamma} g^{\delta\eta} (\nabla_\delta R)_{\beta\alpha\gamma\eta} \\ &= \partial_\alpha \text{scal} - g^{\beta\gamma} (\nabla_\beta \text{Ric})_{\alpha\gamma} - g^{\delta\eta} (\nabla_\delta R)_{\alpha\gamma\eta}^\gamma \\ &= \partial_\alpha \text{scal} - 2g^{\beta\gamma} (\nabla_\beta \text{Ric})_{\alpha\gamma}, \end{aligned}$$

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

wobei die zweite Zeile im ersten Summanden verwendet, dass auch Hochziehen von Indizes mit  $\nabla$  kommutiert, Lemma II.1.28, und im letzten Summanden, dass  $\nabla_\delta R$  die Symmetrien (Satz II.1.21.ii) von  $R$  erbt.

Also ist  $\operatorname{div} \operatorname{Ric} = \frac{1}{2} \partial_\alpha \operatorname{scal} dx^\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{div}(\operatorname{scal}g)$  und damit  $\operatorname{div} G = 0$ . Der Einstein-tensor ist damit ein divergenzfreier  $(0, 2)$ -Tensor.

**Bemerkung II.2.3.** !! Es gibt im Allgemeinen kein Analogon für den Divergenz-satz von Vektorfeldern für symmetrische  $(0, 2)$ -Tensoren auf Mannigfaltigkeiten. Wenn es jedoch genügend Symmetrien gibt, kann man aus der Divergenzfreiheit von  $T$  trotzdem Erhaltungsgrößen erhalten, vgl. Satz II.4.7.

Bis jetzt haben wir uns plausibel gemacht, dass ein symmetrischer  $(0, 2)$ -Tensor, der divergenzfrei ist, ein guter Ansatz für die rechte Seite unserer Feldgleichungen wäre. Wie dieser Tensor dann genau aussieht, wird vom Materiemodell abhängen.

Doch erst einmal benötigen wir eine linke Seite (also einen Ersatz für  $\Delta\Psi$ ): Wegen Gleichheit zu  $T$  erwarten wir auch dort einen symmetrischen divergenzfreien  $(0, 2)$ -Tensor. Dieser soll irgendwie aus der Lorentzmetrik entstehen, da diese unsere Gravitation beschreiben soll ('also  $\Psi \rightsquigarrow g$ '). Im Newtonschen stehen in Bewegungsgleichungen immer die Beschleunigungen – also zweite Ableitungen. Versuchen wir das auch: Wir suchen also einen symmetrischen divergenzfreien  $(0, 2)$ -Tensor, der nur von  $g$  abhängt und in dem höchstens zweite Ableitungen von  $g$  vorkommen.

Einen solchen Tensor haben wir schon gesehen – den Energie-Impulstensor  $G$ . Aber auch  $G + cg$  für ein konstantes  $c$  erfüllt diese Bedingungen, da  $g$  ein symmetrischer  $(0, 2)$ -Tensor mit  $\nabla g = 0$  ist. Aber gibt es noch mehr?

**Satz II.2.4.** [10] Sei  $(M, g)$  eine vierdimensionale Lorentzmannigfaltigkeit und  $A$  ein divergenzfreier symmetrischer  $(0, 2)$ -Tensor, der in lokalen Koordinaten nur von  $g_{\alpha\beta}$ ,  $g_{\alpha\beta,\gamma}$  und  $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$  abhängt. Dann ist  $A_{\mu\nu} = aG_{\mu\nu} + bg_{\mu\nu}$  für Konstanten  $a, b$ .

Deshalb definieren wir:

**Definition II.2.5.** Die *Einsteingleichungen* sind  $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$  für einen Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$  und einer Konstante  $\Lambda$  – die sogenannte *kosmologische Konstante*. Ist  $T \equiv 0$ , nennt man Lösungen der Einsteingleichung *Vakuumlösungen*.

Zur Interpretation der kosmologischen Konstanten später, vgl. Seite 79. Einstein hat die Gleichung am Anfang auch nur für  $\Lambda = 0$  hingeschrieben und hat dann später ein  $\Lambda$  eingeführt, um auch ultrastatische Lösungen der Form  $M = \mathbb{R} \times N$ ,  $g = -dt^2 + h$  der Einsteingleichungen (mit Materiemodell Staub) zu finden, wo  $(N, h)$  nicht automatisch Ricci-flach (d.h.  $\operatorname{Ric} \equiv 0$ ) sein muss, vgl. ÜA 21.

Wir haben schon oben bemerkt, dass der Energie-Impuls-Tensor von der Energie- und Impulsverteilung der Materie kommt und sein genaues Aussehen, vom Materiemodell abhängt. Andererseits sagen die Einsteingleichungen, dass der Tensor  $T_{\mu\nu}$  ein Gravitationsfeld erzeugt. Dieses wird dann wieder Auswirkungen auf die Materie-/Energie-/Impulsverteilung haben und wiederum den Energie-Impuls-Tensor beeinflussen.

In Wirklichkeit muss man also die Einsteingleichungen selbst bei gegebenem Modell nie alleine lösen, sondern sie sind immer mit Materiegleichungen gekoppelt, die heuristisch gesehen angeben, wie die Materieverteilung sich ändert.

Wir werden noch später ein Beispiel dafür sehen, aber uns jetzt erst mal auf Vakuumlösungen beschränken. Denn dort ist  $T \equiv 0$ . Dann gibt es keine zusätzlichen Materiegleichungen – es reicht also  $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$  zu lösen.

Das volle Problem der ART wäre auch nicht nur die Einsteingleichung mit Materiegleichungen (für ein gegebenes Modell) zu lösen, sondern gleichzeitig die Topologie der unterliegende Mannigfaltigkeit zu finden. Denn diese ist ja nicht schon von vornherein bekannt.

Wir werden allerdings beim einfacheren Problem bleiben: Topologie Mannigfaltigkeit gegeben bzw. wir suchen sowieso nur einer Karte. Später werden wir darüber reden, welche Bedingungen wir aus physikalischer Sicht an die Mannigfaltigkeit stellen wollen. Das sind Fragen wie: Spricht etwas physikalisch gegen Zeitschleifen?

## II.3. Die Schwarzschildlösung

Die Schwarzschildlösung war historisch betrachtet die erste exakte nichttriviale\* Lösung der Einsteingleichungen.

Vorl. 10

Wir betrachten einen isolierten rotationssymmetrischen Stern im  $\mathbb{R}^4$  (räumlich dreidimensional) und suchen eine (räumlich) sphärisch symmetrische Lösung der Einsteingleichungen. Da wir uns erst einmal nicht um das Sternenmodell kümmern wollen (mit dem wir einen Ausdruck für den Energie-Impuls-Tensor und zugehörige Materiegleichung erhalten würden), suchen wir nur Lösungen weg von der Sternoberfläche. Da wir den Stern als isoliert annehmen<sup>†</sup>, ist weg vom Stern der Energie-Impuls-Tensor Null. Des Weiteren sei  $\Lambda = 0$ . Damit suchen wir (jeweils weg vom räumlichen Ursprung) eine sphärisch symmetrische Lösung von  $G = 0$ , also nach Beispiel II.1.25  $\text{Ric} = 0$ .

Als ersten Schritt suchen wir eine statische (= bezüglich eines bestimmten Koordinatensystem sind alle Metrikkoeffizienten zeitunabhängig<sup>‡</sup>) Raumzeit (Signatur =  $(-, +, +, +)$ ) auf dem  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus B_r(0))$ , die invariant unter räumlichen Rotationen ist und die Einsteinvakuungleichungen ( $\text{Ric}=0$ ) erfüllt.

Für (räumlich) sphärisch symmetrischen statische Raumzeiten hat die Lorentzmetrik per Definition<sup>§</sup> in Koordinaten  $(t, x^1, x^2, x^3)$  die Form  $-f_1(r)^2 dt^2 + h$  mit  $h$  eine sphärisch symmetrische Metrik auf  $\mathbb{R}^3 \setminus B_r(0)$ . Sphärisch symmetrische Metrik auf  $\mathbb{R}^3$  heißt, dass räumliche Rotationen  $f: \mathbb{R}^3 \setminus B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus B_r(0)$  eine *Isometrie* für  $(\mathbb{R}^3 \setminus B_r(0), h)$  sind:

\*Triviale Lösung wäre Minkowskiraum mit  $T \equiv 0$ .

<sup>†</sup>Genauer: Unser Stern sei ungeladen (sonst gebe es außerhalb des Sterns noch ein elektrisches Feld, was zu einem nicht verschwindenden Energie-Impuls-Tensor führt) – die zugehörige rotationssymmetrische Lösung ist die *Reissner-Nordström Raumzeit*, II.3.6.2.

<sup>‡</sup>Das ist so keine gute Definition, da abhängig von der Wahl des Zeitparameters. Mehr dazu später in Definition II.4.25 und.

<sup>§</sup>allgemeine Definition, siehe ??

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

**Definition II.3.1.** Eine surjektive Abbildung  $f: M \rightarrow M$  einer Riemannschen/Lorentzischen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  heißt *Isometrie*, falls für alle  $p \in M$  und  $v, w \in T_p M$  gilt:

$$g_p(v, w) = g_{f(p)}(d_p f(v), d_p f(w)).$$

Wählen wir auf  $\mathbb{R}^3$  Kugelkoordinaten  $(r, \varphi, \theta)$ , hat die sphärisch symmetrische Metrik  $h$  die Form  $h = f_2(r)^2 dr^2 + r^2(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2)$ , vgl. ÜA 22. Hier ist  $d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2$  die Standardmetrik auf der  $S^2$ , siehe Beispiel II.1.13. Dass diese mit  $r^2$  und nicht mit einer positiven Funktion in  $r$  multipliziert wird, entspricht einer Wahl der Skala für  $r$ .

Jetzt müssen wir nur noch herausfinden, für welche positiven glatten Funktionen  $f_1, f_2$  die resultierende Lorentzmetrik  $-f_1^2(r)dt^2 + h$  Ricci-flach ist. Das ist in der Datei [schwarzschild.py](#) ausgerechnet. Wir erhalten eine Einparameterfamilie von Lösungen

$$g_{\text{Schw}} = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \underbrace{(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2)}_{=: d\Omega^2} \quad (\text{II.14})$$

in der Menge  $\{r_S > r\} \subset \mathbb{R}^4$ .

### Bemerkung II.3.2.

- (i) Der Parameter  $r_S$  heißt *Schwarzschildradius*.
- (ii) Für  $r_S = 0$  ist  $g_{\text{Schw}}$  wieder die Minkowskimetrik. Das entspricht dem Fall, in dem es gar keinen Stern gibt.
- (iii) Wenn wir uns später ein Sternenmodell anschauen werden, werden wir sehen, dass  $r_S$  dort positiv ist und sich dort aus der (relativistischen) Masse/Energie des Sterns berechnet. Dort ist der Sternradius größer als  $r_S$ .
- (iv) Der Parameter  $r_S$  in der Schwarzschildlösung kann aber rein von der Rechnung her auch negativ sein (oder äquivalent  $r_S$  positive aber  $r$  negativ).

**Eigenzeit versus dem globalem Zeitparameter  $t$ .** Befinden wir uns bezüglich des Koordinatensystems von Schwarzschild in Ruhe bei Radius  $r_0$ , dann ist unsere Eigenzeit  $d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r_0}\right) dt^2$ . Das heißt insbesondere, dass der globale Zeitparameter für uns nur asymptotisch für große  $t$  unserer Eigenzeit entspricht. Für  $r$  nahe  $r_S$  hingegen ist das Verhältnis  $\left|\frac{d\tau}{dt}\right|$  beliebig groß.

**Bedeutung von Schwarzschild für unser Sonnensystem.** Schwarzschild ist eine gute erste Näherung für die Metrik weg von der Sonne. Zwar ist dort nicht ausschließlich Vakuum, sondern es befinden sich Planeten etc. darin. Allerdings sind diese verglichen zur Sonne sehr sehr klein und man nimmt als Näherung an, dass sie sich als ideale Punktteilchen auf Geodätische in der Hintergrundmetrik (hier Schwarzschild) bewegen und in erster Näherung nicht wechselwirken. Mit diesen Annahmen kann man die Bewegung von Licht/Planeten/Satelliten analysieren. Das führte zu den 'klassischen Tests' der ART, vgl. Abschnitt II.3.4.1 und folgende.

### II.3.1. Geodätengleichung und Erhaltungsgrößen

Wir berechnen die Geodätischen  $x(s) := (t(s), r(s), \varphi(s), \theta(s))$  mittels

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(x) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

(die Ableitungspunkte stehen hier für die Ableitung nach  $s$ ) und erhalten:

$$\begin{aligned} \alpha=0 \quad (x^0=t): \quad & \frac{d}{ds} \left( - \left( 1 - \frac{r_S}{r} \right) \dot{t} \right) = 0 \\ & \implies \left( 1 - \frac{r_S}{r} \right) \dot{t} = \text{const} =: E, \\ \alpha=1 \quad (x^1=r): \quad & \frac{d}{ds} \left( \left( 1 - \frac{r_S}{r} \right)^{-1} \dot{r} \right) = - \frac{r_S}{2r^2} \dot{t}^2 - \frac{r_S}{2r^2} \left( 1 - \frac{r_S}{r} \right)^{-2} \dot{r}^2 + r(\dot{\theta}^2 + \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2), \\ \alpha=2 \quad (x^2=\theta): \quad & \frac{d}{ds} (r^2 \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2) = -r^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\varphi}^2, \\ \alpha=3 \quad (x^3=\varphi): \quad & \frac{d}{ds} (r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}) = 0 \\ & \implies r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi} = \text{const} =: \ell. \end{aligned}$$

**Wir betrachten zunächst den Fall  $\theta(0) = 0$  und  $\dot{\theta}(0) = 0$ .** Dann löst  $\theta \equiv 0$  die Gleichung für  $x^2 = \theta$  und beliebiges  $r$ . Da Geodätische immer proportional zur Bogenlänge bzw. in Eigenzeit parametrisiert sind, gilt dann

$$\begin{aligned} \epsilon := \text{const} &= - \left( 1 - \frac{r_S}{r} \right) \dot{t}^2 + \left( 1 - \frac{r_S}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \\ &= \left( 1 - \frac{r_S}{r} \right)^{-1} (r^2 - E^2) + r^{-2} \ell^2. \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Bei uns ist für einen Beobachter immer  $\epsilon = -1$ , für Licht  $\epsilon = 0$  und raumartige Geodätische normieren wir auf  $\epsilon = 1$ .

Bis jetzt haben wir also 3 Erhaltungsgrößen  $\ell = r^2 \dot{\varphi}$ ,  $E = \left( 1 - \frac{r_S}{r} \right) \dot{t}$  und  $\epsilon$  (wobei  $\epsilon$  nur diskrete Werte annehmen kann). Da sie in der Eigenzeit  $\tau$  erhalten, sind diese Erhaltungsgrößen schon durch die Anfangswerte der Geodätischen bestimmt. Das  $\ell$  ist der *Drehimpuls* der Geodätischen, das  $\epsilon$  entspräche im Newtonschen der *Energieerhaltung*, das  $E$  kommt daher, dass die Zeittranslation (für die Schwarzschildzeit  $t$  gemeint) eine Isometrie ist. Mehr zu Erhaltungsgrößen und Isometrien in Abschnitt II.4.1, vgl. insbesondere Bemerkung II.4.4.ii und Beispiel II.4.6.

Aus der verbleibenden Gleichung für  $x^1 = r$  wird dann

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \left( \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \dot{r} \right) &= -\frac{r_S}{2r^2} \dot{t}^2 - \frac{r_S}{2r^2} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-2} \dot{r}^2 + r\dot{\varphi}^2 \\
 &= -\frac{r_S}{2r^2} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-2} (E^2 + \dot{r}^2) + \frac{\ell^2}{r^3} \\
 0 &= \ddot{r} + \frac{r_S}{2r^2} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} (E^2 - \dot{r}^2) - \frac{\ell^2}{r^3} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \\
 &= \ddot{r} + \frac{r_S}{2r^2} \left(\frac{\ell^2}{r^2} - \epsilon\right) - \frac{\ell^2}{r^3} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \tag{II.16}
 \end{aligned}$$

also eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für  $r$  in  $s$ .

**Was ist mit der Annahme  $\theta(0) = 0$  und  $\dot{\theta}(0) = 0$  von oben?** Wegen Rotationsinvarianz der Metrik können wir immer  $\theta(0) = 0$  annehmen, sowie dass die Ableitung der Geodäte zum Parameter Null auch  $\theta$ -Koordinate 0 hat. Die Schwarzschild-Metrik ist symmetrisch bezüglich  $\theta \mapsto -\theta$ . Die Geodäten durch ihre Anfangswerte eindeutig bestimmt sind muss eine Geodäte mit obigen Anfangswerten immer  $\theta$ -Koordinate 0 haben.

### II.3.2. Qualitatives Verhalten der Geodätischen

Auch wenn die Geodätischen durch die obigen Differentialgleichungen vollständig bestimmt sind, können wir diese i.A. nicht explizit lösen. Um aber ein Verständnis vom Schwarzschildraum zu erzielen, ist es hilfreich sich das qualitative Verhalten der Geodäten anzuschauen. Das ist für allgemeine Metriken schwierig. Durch die verschiedenen Erhaltungsgrößen in Schwarzschild konnten wir aber schon im letzten Abschnitt alles auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduzieren, deren Lösungen man qualitativ leicht analysieren kann.

Gegebene Anfangswerte ( $t_0, r_0, \varphi_0 = 0, \theta_0 = 0, \dot{t}(0), \dot{r}(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0) = 0$ ) bestimmen  $\epsilon$ ,  $E$  und  $\ell$ . Wir schauen uns (II.15) an:

$$E^2 = \dot{r}^2 + \underbrace{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \left(\frac{\ell^2}{r^2} - \epsilon\right)}_{=: 2V_{\text{eff}}(r)}. \tag{II.17}$$

Hier wird  $V_{\text{eff}}(r)$  wieder das effektive Potential genannt, da erneutes Ableiten dieser Gleichung nach  $s$ , ergibt  $\ddot{r} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}$ , vgl. Newton/ÜA 3.\*

---

\*An effektiven Potentialen lassen sich leicht qualitativ die möglichen Bewegungen ablesen: Gelte für die Bahn irgendwo  $\dot{r} = 0$ , sagen wir bei  $r = r_0$ . Dann ist dort  $E^2 = 2V_{\text{eff}}(r_0)$ . Da  $E$  eine Erhaltungsgröße ist, muss sich die gesamte Bewegung auf Radien mit  $V_{\text{eff}}(r) \leq E^2/2$  abspielen. Aus der Stetigkeit der Radiuskoordinate und der Tatsache, dass sich die Monotonie der  $r$ -Koordinate, nur in Punkten mit  $\dot{r} = 0$ , und damit in Punkten mit  $E^2 = 2V_{\text{eff}}(r)$ , ändern kann, folgt das qualitative Verhalten.

### II.3. Die Schwarzschildlösung

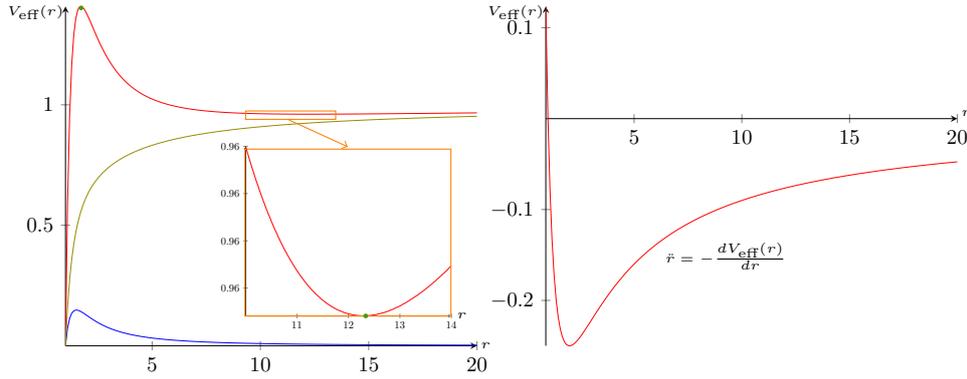


Abb. II.3.: Links:  $V_{\text{eff}}$  in blau für Licht mit  $\ell^2 > 0$ , in olive für Testteilchen mit kleinem  $\ell^2 \leq 3r_S^2$  (Die  $r$ -Achse startet bei  $r_S$  – hier im Bild  $r_S = 1$ ), in rot für Testteilchen mit  $\ell^2 \geq 3r_S^2$  (hat ein Maximum und ein Minimum – in grün). Da man das Minimum nicht so gut sieht, ist dieser Ausschnitt der roten Kurve noch mal in kleinerem Diagramm dargestellt.  
 Rechts:  $V_{\text{eff}}$  für Testteilchen in Newton mit  $\ell^2 > 0$ .

Damit erhalten wir direkt eine Ungleichung für  $r$  in Abhängigkeit von  $E$ ,  $\ell$ , (und  $r_S$ ), dass  $E^2 \geq \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \left(\frac{\ell^2}{r^2} - \epsilon\right)$  gilt.

Wir schauen nun, ob wir gebundene Zustände haben können, d.h. Geodäten, die für alle  $s$  in einem Anulus  $[a, b] \subset (r_S, \infty)$  bleiben: Für gebundene Zustände muss entweder  $\dot{r} \equiv 0$  sein (ein Kreisorbit mit  $r = r_0$ ) oder es muss mindestens zwei Punkte  $r = a$  und  $r = b$  mit  $\dot{r} = 0$  geben, vgl. die Argumentation in ÜA 3. In solchen Punkten ist dann  $E^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \left(\frac{\ell^2}{r^2} - \epsilon\right)$ . Bei gegebenen  $E$ ,  $\ell$ ,  $r_S$  und  $\epsilon$  ist das äquivalent zu einem Polynom dritten Grades in  $r$ .

- Für Licht,  $\epsilon = 0$ , ist  $V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \frac{\ell^2}{r^2}$ , vgl. blaue Kurve in Abbildung II.3. Diese hat nur einen kritischen Punkt – ein Maximum bei  $r = \frac{3}{2}r_S$ . D.h. es kann als gebundenen Zustand nur eine Kreisbahn bei  $r = \frac{3}{2}r_S$  geben. Da das Potential dort ein Maximum hat, ist diese Kreisbahn allerdings *instabil*\* ist. Diese räumliche Kugel mit  $r = \frac{3}{2}r_S$  heißt *Photonensphäre*.† Ist Licht einmal tangential zu dieser Sphäre, bleibt es für alle Zeiten darauf.

Insbesondere gibt es keine stabilen gebundenen Zustände für Licht.

\*Eine Lösung ist *stabil*, wenn es ein  $c > 0$  gibt, so dass auch für genügend kleine Änderungen der Anfangswerte die neuen Lösungen immer im Abstand höchstens  $c$  der Ausgangslösung bleiben. Nicht stabile Lösungen heißen *instabil*.

†Für Sterne ist der Sternradius um Größenordnungen über seinem Schwarzschildradius. D.h. für Sterne (Sonne, Planeten) tritt dieser Effekt nicht auf, da unser Ansatz für die Metrik nur außerhalb des Sterns galt.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

- Für Testteilchen,  $\epsilon = -1$ , ist  $V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \left(\frac{\ell^2}{r^2} + 1\right)$ . Für gebundene Zustände muss  $\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr} = \frac{\ell^2}{r^3} \left(\frac{3r_S}{r} - 2\right) + \frac{r_S}{r^2}$  mindestens eine Nullstelle haben. Die Nullstellen dieser Ableitung sind  $r_0 = r_{\pm} := \frac{\ell^2}{r_S} \pm \ell \sqrt{\frac{\ell^2}{r_S^2} - 3}$  und sind nur für  $\ell^2 \geq 3r_S^2$  reell. D.h. für kleine  $\ell$  ist  $V_{\text{eff}}(r)$  monoton steigend – keine gebundenen Zustände. Erst für  $\ell^2 \geq 3r_S^2$  hat  $\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr}$  mindestens eine Nullstelle.
  - Kreisorbiten von Testteilchen:  $r = \text{const} = r_0$ ,  $\ddot{r} \equiv 0$ , also  $0 = \frac{dV_{\text{eff}}}{dr}(r_0)$ . Dann ist  $r_0 = r_{\pm}$  und  $E^2 = V_{\text{eff}}(r_0)$ . Ist  $\ell^2 = 3r_S^2$ , ist  $r_+ = r_-$  und wir sind in einem Sattelpunkt – also eine instabile Kreisbahn. Sei nun  $\ell^2 > 3r_S^2$ : Für  $r_-$  befinden wir uns im Maximum von  $V_{\text{eff}}$  – diese Lösung ist auch instabil. Für  $r_+$  sind wir im Minimum und haben einen stabilen Kreisorbit mit  $E^2 < 1$  und  $\ell^2 > 3r_S^2$ . Das heißt für einen stabilen Kreisorbit ist insbesondere  $r_0 \geq \frac{\ell^2}{r_S} > 3r_S$ .
  - Allgemeine gebundene Bahn für  $\ell^2 > 3r_S^2$ : Bewege sich  $r$  für diese Bahn zwischen  $[r_1, r_2]$ . Nach obiger Diskussion muss  $r_- < r_1 < r_2 < r_+$  sein. Damit ist  $\min_{[r_1, r_2]} V_{\text{eff}}(r) < E^2 < \min\{1, \max_{[r_1, r_2]} V_{\text{eff}}(r)\}$ . Mehr zu solchen Bahnen in Abschnitt II.3.4.2.

Man kann analog zu oben nachrechnen, dass es für  $a \leq 2r_S$  keine stabilen Orbits gibt.

**Was ist anders als bei Newton?** Bei Newton gibt es für Testteilchen für alle  $\ell^2 > 0$  gebundene Zustände und die gebundenen (stabilen) Zustände können beliebig kleine Radien haben. Das liegt daran, dass das Potential  $V_{\text{eff}}^{\text{Newton}}(r) = \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}$ , vgl. ÜA 3, immer die Form rechts in Abbildung II.3 hat, und das Minimum  $r = \frac{M}{\ell}$  für  $\ell \rightarrow \infty$  beliebig nahe an  $r = 0$  sein kann.

### II.3.2.1. Spur der Geodätischen

Im Deutschen macht man (im Gegensatz zum Englischen) oft die Unterscheidung von Geodäten und Geodätischen. Geodätische sind Lösungen der Geodätengleichung und damit parametrisierte Kurven auf der Mannigfaltigkeit. *Geodäten* sind die Spuren der Geodätischen. Die Geodätengleichung hatten wir für die Schwarzschildmetrik schon berechnet. Nun wollen wir die Spuren untersuchen.

Dazu betrachten wir  $r$  als Funktion von  $\varphi$ :  $r(\varphi) = r(s(\varphi))$ . Damit ergibt sich (Hier ist ' Differentiation nach  $\varphi$ ):

$$\dot{r} = r' \dot{\varphi} = r' \frac{\ell}{r^2}.$$

Einsetzen in (II.15) ergibt

$$\epsilon = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\ell^2}{r^4} r'^2 - E^2\right) + \frac{\ell^2}{r^2}$$

### II.3. Die Schwarzschildlösung

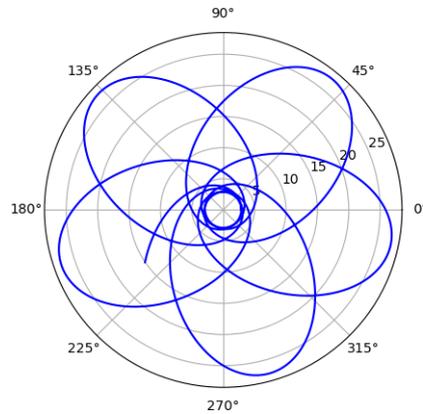


Abb. II.4.: Spur einer gebundenen zeitartigen Geodäte in der  $(r, \varphi)$ -Ebene, [Plot mit Python](#)

und damit

$$r'^2 = r^4 \left( \frac{E^2}{\ell^2} - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\epsilon}{\ell^2}\right) \right). \quad (\text{II.18})$$

Oft ist es geschickter  $u = \frac{r_S}{r}$  zu betrachten und  $\lambda = \frac{\ell}{r_S}$  zu setzen (Dann sind  $u$  und  $\lambda$  beides dimensionslose Größen, und für gebundene Testteilchen ist dann  $\lambda^2 \geq 3$ ). Wegen  $u' = -\frac{u^2}{r_S} r'$  folgt

$$u'^2 = \frac{E^2}{\lambda^2} - \underbrace{(1-u)\left(u^2 - \frac{\epsilon}{\lambda^2}\right)}_{=: 2W_{\text{eff}}(u)}. \quad (\text{II.19})$$

( $W_{\text{eff}}(u)$  steht natürlich in Beziehung zu  $V_{\text{eff}}(r)$ . Aber es ist nicht einfach das gleiche, da in  $u''$  neben  $r''$  auch erste Ableitungen wieder vorkommen.)

Da  $u'$  i.A. das Vorzeichen wechselt, ist es für das Zeichnen der Kurven besser die Gleichung für die zweite Ableitung

$$u'' = -\frac{dW_{\text{eff}}}{du} = \frac{3}{2}u^2 - u - \frac{\epsilon}{2\lambda^2}.$$

zu benutzen, vgl. Abbildung II.4. Die zugehörigen Anfangswerte sind dann  $u(0) = \frac{r_S}{r(0)}$  und  $u'(0) = -u^2(0) \frac{r'(0)}{r_S}$ .

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

### II.3.3. Newtonsch im Limes?

Vorl. 11

Für Testteilchen ( $\epsilon = -1$ ) hatten wir im letzten Abschnitt als Gleichung für die Spur  $r = r(\varphi)$

$$u'' = \frac{3}{2}u^2 - u + \frac{1}{2\lambda^2} \text{ mit } u = \frac{r_S}{r} \text{ und } \lambda = \frac{\ell}{r_S}.$$

Im Limes  $r \rightarrow \infty$  ist  $u$  klein, d.h.  $u$  dominiert  $u^2$ . Die Vermutung ist dann, dass für große  $r$  wir dann nahe an Lösungen von

$$u'' + u - \frac{r_S^2}{2\ell^2} = 0.$$

Dies ist Gleichung (I.2) für die Spuren der Bahnen in der Newtonschen Gravitation (Dort für  $u = 1/r$  und  $r_S = 2M^*$ ). Die Frage ist jetzt natürlich in welchem Sinne ist diese Vermutung richtig? Das klingt wie ein Perturbationsproblem, jedoch müssen wir entscheiden, was der Parameter sein soll. Da  $u$  klein sein soll, betrachten wir einen Parameter  $\delta$  im Anfangswert  $u(0) = \delta u_0$ . Nun zur Anfangsgeschwindigkeit: Diese sollten wir nicht beliebig wählen, da wir Aussagen über die Bahn für möglichst große Zeiten machen wollen und deshalb verhindern müssen, dass die Radiuskoordinate der Bahn zu klein (also  $u$  zu groß wird). Außerdem wählen wir  $u'(0) = 0$ ; d.h. wir starten die Bahn in einem kritischen Punkt von  $u = u(\varphi)$ , z.B. im nächsten Punkt zum Ursprung. (Das kann man auch anders machen, ist aber so am einfachsten.)

D.h. wir betrachten

$$u'' = \frac{3}{2}u^2 - u + \frac{r_S^2}{2\ell^2} \text{ mit } u(0) = \delta u_0, u'(0) = 0.$$

Wir setzen  $\tilde{u} = \delta^{-1}u$ . Dann ist  $\tilde{u}'' = \delta \frac{3}{2}\tilde{u}^2 - \tilde{u} + \frac{r_S^2}{\delta \ell^2}$  mit  $\tilde{u}(0) = u_0$  und  $\tilde{u}'(0) = 0$ . Allerdings war  $\ell = r_0^2 \dot{\varphi}_0$ , d.h. auch  $\ell$  sollten wir mit der Skalierung von  $u$  irgendwie skalieren. Am einfachsten finden wir die Skalierung von  $\ell$ , wenn wir schauen, was bzgl. der Newtonschen Gleichung  $u'' + u - \frac{r_S^2}{2\ell^2} = 0$  passiert. Sei  $u_{N,\ell,u_0}$  eine Lösung dieser Gleichung zum Drehimpuls  $\ell$  und obigen Anfangswerten  $u(0) = u_0$  und  $u'(0) = 0$ . Setzen wir  $\tilde{\ell} = \delta^{-\frac{1}{2}}\ell$ , dann ist  $u_{N,\ell,u_0} = \delta u_{N,\tilde{\ell},\delta u_0}$ .

Damit haben wir

$$\tilde{u}'' = \delta \frac{3}{2}\tilde{u}^2 - \tilde{u} + \frac{r_S^2}{2\tilde{\ell}^2} \text{ mit } \tilde{u}(0) = u_0, \tilde{u}'(0) = 0.$$

Standardtheorie der gewöhnlichen Differentialgleichung gibt uns eine stetige Abhängigkeit der Lösung vom Parameter  $\delta$ : Für alle  $s_0 > 0$  und  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta_0 > 0$ , so dass  $|\tilde{u}(s) - u_{N,\tilde{\ell},u_0}(s)| < \epsilon$  für alle  $|s| < s_0$ .

Also  $\tilde{u} = u_{N,\tilde{\ell},u_0} + v$  und damit  $u = u_{N,\ell,\delta u_0} + \delta v$ . Insbesondere haben wir so auch gesehen, dass  $2r_S$  die Rolle der Masse im Newtonschen hat.

\*Mit Einheiten und  $c$  und  $G$  nicht auf 1 gesetzt:  $r_S = \frac{2GM}{c^2}$

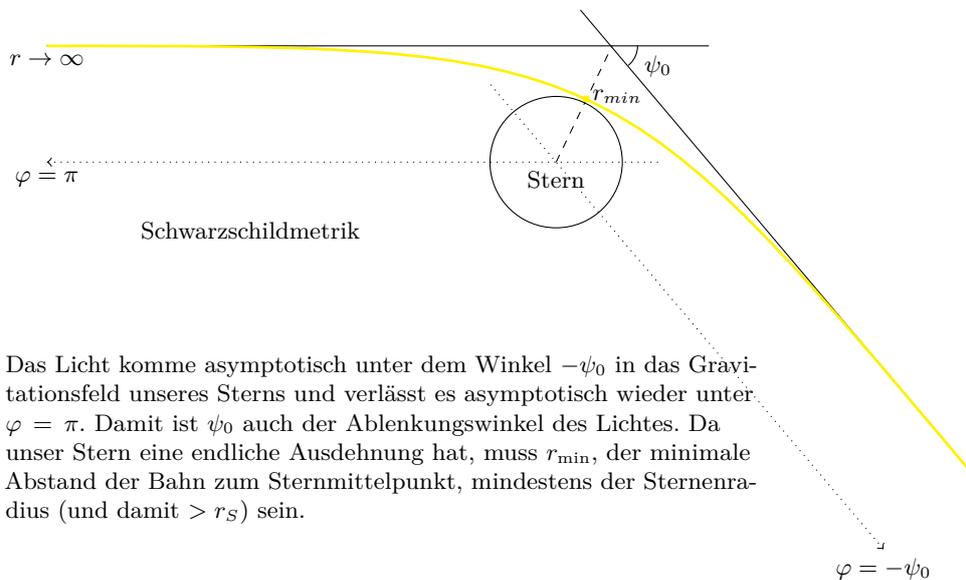
### II.3.4. Klassische Tests der ART

Einstein hat 1916 drei Tests für seine ART vorgeschlagen

- (i) die Periheldrehung des Merkur, vgl. Abschnitt II.3.4.2
- (ii) Lichtablenkung durch die Sonne, vgl. Abschnitt II.3.4.1
- (iii) gravitative Rotverschiebung des Lichts, vgl. Abschnitt II.4.5

Es gibt auch moderne Tests\*, auf welche wir hier aber nicht eingehen.

#### II.3.4.1. Lichtablenkung



Das Licht komme asymptotisch unter dem Winkel  $-\psi_0$  in das Gravitationsfeld unseres Sterns und verlässt es asymptotisch wieder unter  $\varphi = \pi$ . Damit ist  $\psi_0$  auch der Ablenkungswinkel des Lichtes. Da unser Stern eine endliche Ausdehnung hat, muss  $r_{\min}$ , der minimale Abstand der Bahn zum Sternmittelpunkt, mindestens der Sternradius (und damit  $> r_S$ ) sein.

Ziel ist es den (räumlichen) Verlauf des Lichtes, also  $r(\varphi)$  zu finden – für einen Lichtstrahl, der gerade so die Sonne passiert, also für den  $r_{\min}$  gleich dem Sonnenradius ist, und damit  $\psi_0$  zu bestimmen:

Dazu verwenden wir (II.18) (mit  $\epsilon = 0$ ), was uns nach Trennung der Variablen und integriert

$$\varphi(r) - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{\ell}{y^2} \frac{1}{\sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{r_S}{y}\right) \frac{\ell^2}{y^2}}} dy$$

liefert. Im Punkt mit geringstem Abstand zum Stern seien unsere Anfangswerte gegeben, d.h.  $r_0 = r_{\min}$ ,  $\dot{r}(0) = 0$ ,  $\varphi_0 = \frac{\pi - \psi_0}{2}$ . Dann ist wegen (II.17)  $\frac{E^2}{\ell^2} = \left(1 - \frac{r_S}{r_{\min}}\right) \frac{1}{r_{\min}^2}$ . Mit  $\varphi(r) \rightarrow \pi$  für  $r \rightarrow \infty$  folgt

\*[https://de.wikipedia.org/wiki/Tests\\_der\\_allgemeinen\\_Relativit%C3%A4tstheorie](https://de.wikipedia.org/wiki/Tests_der_allgemeinen_Relativit%C3%A4tstheorie)

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

$$\frac{\pi + \psi_0}{2} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{r_s}{r_{\min}}\right) \frac{1}{r_{\min}^2} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{1}{r^2}}} dr.$$

Wir arbeiten mit den dimensionslosen Größen  $a := \frac{r_s}{r_{\min}}$  und  $x := \frac{r_{\min}}{r}$  und erhalten

$$\frac{\pi + \psi_0}{2} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - a - x^2 + ax^3}} dx.$$

Damit haben wir  $\psi_0$  durch ein elliptisches Integral\* vollständig bestimmt. Um eine Näherungslösung für  $\psi_0$  zu erhalten, verwenden wir, dass i.A. (z.B. bei der Sonne) der Sternradius sehr viel größer als der Schwarzschildradius des Sterns und damit  $a$  klein ist. Deshalb entwickeln wir in  $a$ :

$$\begin{aligned} \frac{\pi + \psi_0}{2} &= \int_0^1 \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1 - a - x^2 + ax^3}}_{=(x-1)(ax^2 + (a-1)x + a-1)}} dx \\ &\quad \underbrace{= a(x-x_0)(x-x_1) =: -f(a)} \\ &\stackrel{\text{entwickeln in } a}{=} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \left( \frac{1}{\sqrt{1+x}} + a \frac{x^2+x+1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} a^2 f''(\xi_a) \right) dx \end{aligned}$$

mit  $f''(\xi_a) = \frac{3}{4} \frac{(x^2+x+1)^2}{(-\xi_a x^2 - (\xi_a - 1)x + 1 - \xi_a)^{\frac{5}{2}}}$  mit  $\xi_a = \xi_a(x) \in [0, a]$ . Da der Nenner von  $f''$  für  $x, \xi_a \in [0, 1]$  keine Nullstellen hat, gilt  $|f''(\xi_a)| \leq C$ , und wir haben

$$\begin{aligned} \frac{\pi + \psi_0}{2} &= \frac{\pi}{2} + a \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{x^2+x+1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} dx + O(a^2) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{a}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left( x + \frac{1}{1+x} \right) dx + O(a^2) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{a}{2} \left( -\sqrt{1-x^2} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \Big|_0^1 + O(a^2) \\ &= \frac{\pi + 2a}{2} + O(a^2). \end{aligned}$$

Also ist  $\psi_0 \sim \frac{2r_s}{r_{\min}}$ . Für die Sonne<sup>†</sup> ist der Sonnenradius (695 700 km) viel größer als der Schwarzschildradius der Sonne ( $r_s = 2,95$  km). Unter Verwendung der Daten für die Sonne ergibt sich (unter Verwendung der richtigen Naturkonstanten (wir haben in unserer Schwarzschildmetrik z.B. die Lichtgeschwindigkeit auf 1 gesetzt)) für Licht, welches nahe an unserer Sonne vorbeigeht, eine Ablenkung um  $\sim 1,75$  Bogensekunden

\*[https://de.wikipedia.org/wiki/Elliptisches\\_Integral](https://de.wikipedia.org/wiki/Elliptisches_Integral)

†<https://de.wikipedia.org/wiki/Sonne>,

(Zum Vergleich: Der scheinbare Monddurchmesser ist 31 Bogenminuten und der der Sonne 32 Bogenminuten.).

Schon in der Newtonschen Theorie haben Henry Cavendish (1784) und Johann Georg von Soldner (1804) vorausgesagt, dass es in der Newtonschen Gravitation auch schon die Ablenkung von Licht nahe massiver Objekte gibt. Das klingt erst einmal seltsam, da Licht selbst keine Masse hat und deshalb die Gravitation darauf nicht wirken sollte. Aber Licht hat einen Impuls und man kann alternativ diesen benutzen um Licht eine 'Masse' zuzuordnen und damit zu rechnen. Da das Äquivalenzprinzip sowieso sagt, dass die Bewegung unabhängig von der Masse des Testkörpers ist (solange er eine hat), ist auch egal, welchen Wert man der Masse gibt. Man muss nur einmal mit der Annahme reingehen, dass auch in der Newtonschen Gravitation, Licht gravitativ beeinflusst wird. Die Werte, die man mit diesem Ansatz für Lichtablenkung nahe der Sonne erhält, sind aber wohl nur ungefähr die Hälfte vom korrektem Wert.

### II.3.4.2. Planetenbewegung und Periheldrehung

Für die Planetenbewegung interessieren wir uns für die Spur der zeitartigen gebundenen Geodäten, also  $\epsilon = -1$ . Beim Merkur (z.B.) wurde eine Periheldrehung beobachtet, d.h. dass der Perihel (der sonnennächste Punkt) nach einer Umdrehung nicht genau am gleichen Punkt ist, sondern insgesamt ein Winkel  $> 2\pi$  überstrichen wurde.

Da es gebundene Zustände werden sollen, können wir  $\dot{r}(0) = 0$  wählen. Sei  $r(0) = r_0 = u_0^{-1}$  und  $\varphi(0) = \varphi_0$ . Dann ist  $E^2 = (1 - \frac{r_S}{r_0})(\frac{\ell^2}{r_0^2} + 1)$  und damit  $\frac{E^2}{\ell^2} = (1 - u_0)(\frac{1}{\ell^2} + \frac{u_0^2}{r_S^2})$ , vgl. Abschnitt II.3.2. Wir interessieren uns nur für gebundene Zustände, die keine Kreisbahn sind, da bei Kreisbahnen es keine Periheldrehung geben kann.

Wir starten bei (II.19)

$$u'^2 = \underbrace{\frac{E^2}{\lambda^2} - (1 - u)(u^2 + \frac{1}{\lambda^2})}_{=: P(u)}$$

mit  $\lambda^2 = \frac{\ell^2}{r_S^2} \geq 3$  und  $E^2 < 1$  (da gebundener Zustand, vgl. Abschnitt II.3.2) und damit  $\varphi(r) - \varphi_0 = \int_{u_0}^{r_S/r} \frac{du}{\sqrt{P(u)}}$  mit  $P(u)$  das obige Polynom dritten Grades. Wir skizzieren hier nur das Vorgehen, Ausführung ist ÜA 23:

- Man zeigt, dass dann (wegen gebundener Zustand und nicht Kreisbahn!)  $P(u)$  drei reelle Nullstellen  $0 < u_1 < u_2 < u_3$  haben muss und sich der Planet zwischen  $[u_1, u_2]$  bewegen muss. Dadurch kann man das elliptische Integral auf Standardform reduzieren.
- Wir suchen die Differenz in  $\varphi$ , wenn der Planet in  $r_1 = \frac{r_S}{u_1}$  startet, einmal über  $r_2 = \frac{r_S}{u_2}$  geht und wieder zu  $r_1$  zurückkehrt, also

$$\varphi = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{P(u)}}.$$

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

Wäre die Bahn eine Ellipse, müsste dort  $2\pi$  rauskommen. Hier wird der Wert größer sein, die Differenz zu  $2\pi$  nennt man *Periheldrehung* bzw. *Präzession des Perihels*. Weil wir zwischen zwei Nullstellen integrieren erhalten wir hier ein vollständiges elliptisches Integral erster Art:  $\varphi = 2\mu K(m)$ , wobei  $\mu$  und  $m$  von den Nullstellen und damit von  $E$  und  $\lambda$  abhängen.\*

- Wollen wir nun einen Näherungswert für Planeten erhalten, müssen wir geeignet entwickeln. Die Frage ist, in was entwickeln und um was entwickeln wir?

Es ist  $\ell = r^2\dot{\varphi}$  mit  $r \gg r_S$ . Der Merkur hat eine Umlaufzeit um die Sonne von  $T = 88$  Tagen bei einem (max. Abstand zur Sonne) von  $r_{max} \sim 70 \cdot 10^6$  km und einem (min. Abstand zur Sonne) von  $r_{min} \sim 46 \cdot 10^6$  km. Der Schwarzschildradius der Sonne ist 2,95 km. Also sind  $u_1 = \frac{r_S}{r_{max}}$  und  $u_2 = \frac{r_S}{r_{min}}$  nahezu Null und  $r_S \ll r_{min}$ . Wir wollen  $r_{min}$  und  $r_{max}$  fest lassen und  $\varphi$  in  $r_S$  entwickeln, also  $\varphi = 2\pi + \varphi_{per} + O(r_S^2)$ . Hier ist  $\varphi_{per}$  ungefähr die Differenz nach einer Umdrehung.

In ÜA 23 werden wir nachrechnen, dass  $\varphi_{per} = \frac{3\pi r_S}{2} \left( \frac{1}{r_{min}} + \frac{1}{r_{max}} \right)$  gilt.

Im Allgemeinen wird die Periheldrehung als Bogensekunden pro Jahrhundert angegeben, also

$$\varphi_{per} \cdot (\text{Anzahl Umdrehungen pro Jahr}) = \varphi_{per} \cdot \frac{1}{\text{Umlaufzeit in Jahren}}$$

Der dominierende Effekt für die Periheldrehung unseres Sonnensystems, ist allerdings der 'störende' Einfluss der anderen Planeten. Hier die Zahlenwerte für den Merkur<sup>†</sup>:

Effekt	Voraussage in Bogensek/Jahrh.	
Newton (nur Merkur und Sonne)	0	reines Zweikörperproblem, exakt lösbar, vgl. Bem 1.1.2 und ÜA 3.
Newton (Sonne/mehrere Planeten) zw. je zwei Körpern,	532	Ansatz: Summe gravitat. Pot. nicht exakt lösbar, Störungstheorie
Schwarzschild (Merkur/Sonne)	43.13	wie oben
Lense-Thirring Effekt	-0.0020	Differenz zum Effekt von Schwarzschild für einen rotierenden Stern
Quadrupolmoment der Sonne	0.0286	
ges. Voraussage beobachtet	575 574.10 ± 0.65	

\*Das ist im gleichen Sinne dann ein expliziter Ausdruck für die Periheldrehung, wie  $\arcsin \mu$  ein expliziter Ausdruck wäre.

<sup>†</sup>aus [https://en.wikipedia.org/wiki/Tests\\_of\\_general\\_relativity#Classical\\_tests](https://en.wikipedia.org/wiki/Tests_of_general_relativity#Classical_tests)

### II.3.5. $r = r_S$ - eine echte Singularität? Nein!

In  $r \rightarrow r_S > 0$  explodiert der Koeffizient vor  $dr^2$  in der Metrikdarstellung (II.14). Wir wollen nun sehen, was das bedeutet. Dazu schauen wir uns zwei einfache Beispiele an, wo dieser Effekt auch auftritt, aber verschiedene 'Gründe' hat.

**Beispiel II.3.3.** Betrachten wir  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x > 0\}$  mit der Metrik  $g = -\frac{1}{x^4}dx^2 + dy^2$ . Es explodiert der Koeffizient vor  $dx^2$  für  $x \rightarrow 0$ . Führen wir neue Koordinaten ein:  $\tilde{x} = \frac{1}{x}$ . Dann ist  $g = -d\tilde{x}^2 + dy^2$  für  $\tilde{x} \in (0, \infty)$ . Hier sehen wir, dass diese Metrik auf  $\tilde{x} = 0$  auch wohldefiniert ist. Das bedeutet, dass  $x \rightarrow 0$ , was ursprünglich wie eine Art Singularität aussah, in Wirklichkeit das 'Unendliche' der Mannigfaltigkeit war – also einen Bereich den eine zeitartige/raumartige Kurve nicht in endlicher Eigenzeit erreichen kann.

Auf der anderen Seite sehen wir, dass  $x \rightarrow \infty$  in endlicher Eigenzeit erreicht wird. Solche Singularitäten, die in endlicher Eigenzeit (durch nicht lichtartige Kurven) erreicht werden, aber für die es ein anderes Koordinatensystem gibt, in dem wir die Metrik dahin erweitern können, nennen wir *Koordinatensingularitäten*.

Andererseits gibt es Metriken, wo für, sagen wir  $x \rightarrow 0$  die Skalar Krümmung explodiert aber es zeitartige Kurven gibt, die  $x = 0$  in endlicher Eigenzeit erreichen. Dann kann es kein anderes Koordinatensystem geben, in dem man die Metrik auf  $x = 0$  erweitern kann, da die Skalar Krümmung unabhängig vom gewählten Koordinatensystem ist.

Eine solche Singularität, in der ein Krümmungsskalar explodiert, nennt man *gravitative Singularität*.

Ein *Krümmungsskalar* ist eine reellwertige glatte Funktion, die koordinateninvariant aus dem Krümmungstensor gewonnen wird und die Dimension  $m^2$  hat. Das sind z.B. die Skalar Krümmung,  $|Ric|_g^2 = g(Ric, Ric) = g^{\alpha_1\alpha_2}g^{\beta_1\beta_2}Ric_{\alpha_1\beta_1}Ric_{\alpha_2\beta_2}$ , vgl (II.9), und der *Kretschmann-Skalar*

$$|R|_g^2 = g^{\alpha_1\alpha_2}g^{\beta_1\beta_2}g^{\gamma_1\gamma_2}g_{\delta_1\delta_2}R_{\alpha_1\beta_1\gamma_1}^{\delta_1}R_{\alpha_2\beta_2\gamma_2}^{\delta_2}.$$

Für ein Beispiel einer solchen gravitativen Singularität siehe die Diskussion zu Erweiterungen von Schwarzschild unten.

Im Allgemeinen ist es schwierig eine Singularität zu erkennen bzw. ihre Art zu bestimmen – nur weil kein Krümmungsskalar explodiert, muss es noch vielleicht trotzdem keine Koordinatensingularität sein. Wir werden noch allgemeiner zu Singularitäten in allgemeinen Raumzeiten kommen, vgl. Abschnitt II.6. Aber hier werden wir erst einmal direkt Schwarzschild untersuchen:

Man kann nachrechnen, dass ein Beobachter, der sich auf  $r = r_S$  hinzu bewegt, diesen Wert in endlicher Zeit erreicht (ÜA 25). Andererseits ist der Kretschmannskalar für Schwarzschild gleich  $\frac{12r_S^2}{r^6}$ . Es scheint also keine gravitative Singularität zu sein (aber theoretisch könnten noch andere Krümmungskalare explodieren). Wir werden jedoch sehen, dass es eine Koordinatensingularität ist.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

Es gibt keinen immer funktionierenden Algorithmus Koordinatensingularitäten zu erkennen. Aber 'oft' funktioniert es, als Ansatz eine Familie von Geodätischen zu betrachten, die gegen die Singularität streben, und dann den Parameter der Geodätischen als neue Koordinate zu nehmen:

Nehmen wir für Schwarzschild lichtartige Geodätische mit  $\varphi$  und  $\theta$  konstant, dann folgt aus lichtartig  $0 = -(1 - \frac{r_S}{r})\dot{t}^2 + (1 - \frac{r_S}{r})^{-1}\dot{r}^2$ . Betrachten wir  $t$  als Funktion von  $r$ , dann haben wir

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-2}$$

und damit

$$t(r) = \pm \underbrace{\left(r + r_S \ln \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right| \right)}_{=: r_*} + \text{konst}, \quad (\text{II.20})$$

wobei  $r_*$  'Reege-Wheeler Schildkrötenkoordinate'\* genannt wird ( $r_*(r_S) = r_S$ ). Benutzen wir  $(v := t + r_*, r, \varphi, \theta)$  als neue Koordinaten – die *Eddington-Finkelstein-Koordinaten*:

Mit  $dr_* = (1 - \frac{r_S}{r})^{-1} dr$  und  $dv = dt + dr_*$  erhalten wir dann

$$g_{\text{Schw}} = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dv^2 + (dr \otimes dv + dv \otimes dr) + r^2 d\Omega^2.$$

Für  $(t, r) \in \mathbb{R} \times (r_S, \infty)$  haben wir  $(v, r) \in \mathbb{R} \times (r_S, \infty)$ . Aber in  $r = r_S$  ist die Metrik nicht mehr entartet. Wir sehen also so schon, dass  $r = r_S$  nur eine Koordinatensingularität ist, und wir die Metrik darauf fortsetzen können (und zwar sogar glatt).

Allerdings ist unsere Schwarzschildmetrik in den ursprünglichen Schwarzschildkoordinaten nicht nur für  $r \in (r_S, \infty)$  – der *Schwarzschildaußenraum* – wohldefiniert sondern auch für  $r \in (0, r_S)$  – der *Schwarzschildinnenraum*. Auch dieser ist eine rotationsymmetrische Ricci-flache Lösung der Einsteinvakuumgleichung. Unsere obige Transformation ist auch für  $r \in (0, r_S)$  definiert. Deshalb sind die  $(v, r) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$  Koordinaten für den gesamten Schwarzschildraum.

### Vorl. 12

*Kann man die Lösung auch noch darüber hinaus erweitern?*

Da ein Beobachter  $r = 0$  in endlicher Zeit erreichen kann, vgl. ÜA 25 und dabei der Kretschmannskalar explodiert, sehen wir, dass  $r = 0$  eine gravitative Singularität ist. D.h. über  $r = 0$  hinaus ist die Lösung nicht erweiterbar.

Aber wir werden sehen, dass sie über  $r = \infty$  hinaus erweiterbar ist:

Starten wir wieder bei den Schwarzschildkoordinaten und definieren wir Lichtkegelkoordinaten  $u = t - r_*$  und  $v = t + r_*$ . Dann ist

$$\begin{aligned} g_{\text{Schw}} &= - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) (du \otimes dv + dv \otimes du) + r^2 d\Omega^2 \\ &= - \frac{r_S}{r} e^{\frac{v-u-2r}{2r_S}} (du \otimes dv + dv \otimes du) + r^2 d\Omega^2, \end{aligned}$$

---

\*Lösen Sie ÜA 25, um zu sehen warum.

### II.3. Die Schwarzschildlösung

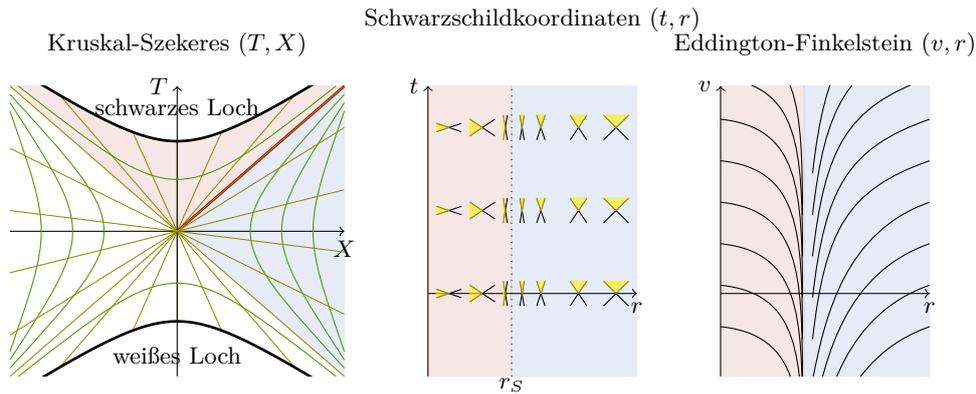


Abb. II.5.: In allen drei Koordinatensystemen ist der Schwarzschildaußenraum blau unterlegt und der Schwarzschildinnenraum rot. Die Kurven in den Eddington-Finkelstein Koordinaten sind Kurven mit  $t = \text{konst.}$  In den Kruskal-Szekeres Koordinaten sind die grünen Kurven  $r = \text{konst.}$  Kurven (Nur  $r = r_S$  ist in rot und  $r = 0$  sind die Hyperbeln oben und unten.) Die oliven Kurven sind die  $t = \text{konst.}$  Kurven.

In Schwarzschildkoordinaten sind zusätzlich Lichtkegel abgebildet, der zukunftsgerichtete innere Teil ist gelb (zukunftsgerichtet  $\sim$  die zu einem solchem Vektor gehörige zeitartige Kurve hat im Schwarzschildaußenraum einen positiven Anteil in  $\partial_t$ . Mehr in Abschnitt II.5.). Die lichtartigen Vektoren  $(a, b)$  im Punkt  $(t, r)$  erfüllen  $-a^2 \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) + b^2 \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} = 0$ . Es sind also Geraden mit Anstieg  $\pm \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}$ . D.h. für  $r \rightarrow \infty$  gehen die Anstiege gegen  $\pm 1$ . Für  $r \rightarrow r_S \pm 0$  degenerieren die Lichtkegel zur  $t$ -Achse - allerdings ist nun für  $r < r_S$ ,  $\partial_t$  raumartig und  $\partial_r$  zeitartig! Für  $r \rightarrow 0$  gehen die Anstiege gegen Null.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

wobei  $r = r(u, v)$  mittels  $r_* = \frac{v-u}{2}$  implizit bestimmt ist. Wir machen eine weitere Koordinatentransformation  $T = \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{u}{2r_S}} + e^{\frac{v}{2r_S}} \right)$  und  $X = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{v}{2r_S}} - e^{-\frac{u}{2r_S}} \right)$ . Dann ist

$$g_{\text{Schw}} = \frac{4r_S^3}{r} e^{-\frac{r}{r_S}} (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2.$$

Hier wird der Schwarzschildraum  $(t, r)$  auf den roten und blauen Bereich im rechten Teil der Abbildung II.5 abgebildet. Wir sehen hier auch, dass die Metrik auf den gesamten Bereich im Bild (solange  $r \neq 0$ ) erweitert werden kann. Auch dort erfüllt sie noch  $\text{Ric} = 0$ , denn der weiße Bereich ist isometrisch zu Schwarzschild mittels  $X \mapsto -X$ ,  $T \mapsto -T$ .

Diese Erweiterung ist nun *maximal* im Sinne, dass es keine zusammenhängende vierdimensionale Lorentzmannigfaltigkeit  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  mit  $M \subsetneq \tilde{M}$  und  $\tilde{g}|_M = g$  gibt. Dazu muss man sich überlegen, dass die einzigen zeit- oder raumartigen Geodätischen  $\gamma: [0, a) \rightarrow M$ , die nicht in einer kompakten Teilmenge enthalten sind, an die obere oder untere Hyperbel (also  $r = 0$ ) streben, wo der Kretschmannskalar explodiert.

Wir sehen auch, dass  $\frac{\partial}{\partial T}$  ein globales zeitartiges Vektorfeld ist, da  $g_{\text{Schw}}(\partial_T, \partial_T) < 0$ . Nutzen wir das, um global einen Begriff von Zukunft zu definieren: Ein Vektor  $v \in T_p M$  sei *zukunftsgerichtet*, falls  $g_{\text{Schw}}(v, \frac{\partial}{\partial T}|_p) < 0$  gilt. Das *Innere des Vorwärtslichtkegel* in einem Punkt  $p \in M$  besteht dann aus allen zukunftsgerichteten zeitartigen Vektoren in  $T_p M$ . Bildet man diese Vorwärtslichtkegel wieder zurück in Schwarzschildkoordinaten ab, sieht man die Lichtkegel in Abbildung II.5.

*Was sagen uns die Lichtkegel in Abbildung II.5?* ‘Eine zeitartige Geodätische, die im Schwarzschildaußenraum startet, kann  $r = r_S$  in endlicher Eigenzeit erreichen. Auch Lichtstrahlen können auf  $r = r_S$  treffen. Andererseits kann weder ein zeitartiger Beobachter noch Licht den Schwarzschildinnenraum wieder verlassen. (Verlassen/Erreichen bezieht sich hier auf zukunftsgerichteten Kurven. Natürlich kann man in der Geodätischen  $\gamma(s)$  immer zum negativen Parameter  $\gamma(-s)$  übergehen und hat noch immer eine Geodätische. Allerdings entspricht das einer Zeitumkehr – das Gehen in die Vergangenheit.) Deshalb nennt man den Bereich  $r \in (0, r_S)$  auch *schwarzes Loch* und  $r = r_S$  den *Ereignishorizont* des schwarzen Loches.

Der ‘neue Teil’ in Kruskal-Szekeres Koordinaten kann als Schwarzschildraum mit Zeitumkehr interpretiert werden. Dann streben alle zukunftsgerichteten zeitartigen Kurven vom Ereignishorizont des *weißen Loches* weg. Da zukunftsgerichtete zeitartige Vektoren auf der  $(T = -X)$ -Geraden immer in Richtung des ursprünglichen Schwarzschildraumes zeigen, gibt es zwar raumartige zukunftsgerichtete Kurven, die in endlicher Eigenzeit, z.B. vom blauen Schwarzschildaußenraum, in Richtung des ‘weißen Bereiches’ kommen, aber keine solchen zukunftsgerichteten zeitartigen Kurven. In diesem Sinne ist der ‘weiße Bereich’, gesehen vom originalen Schwarzschildteil, eher unphysikalisch.

*Gravitational lensing.*\* Wie wir am Beispiel von Schwarzschild schon gesehen haben,

\*[https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational\\_lens](https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_lens)

wir Licht durch Energie- und Impulsverteilung abgelenkt. Dies wird i.A. als Gravitationslinseneffekt bezeichnet in Analogie zu optischen Linsen, vgl. auch Einsteinring\*.

### II.3.6. Andere Lösungen

I.A. wird ein schwarzes Loch als eine Region in der Raumzeit beschrieben, in welcher die Gravitation so stark ist, dass nicht (auch nicht Licht/ elektromagnetische Wellen dieser entkommen können. Es gibt neben der Schwarzschildlösung noch andere 'hochsymmetrische' Lösungen der Einsteingleichungen für schwarze Löcher.

#### II.3.6.1. Kerr-Lösung

Die Kerr-Lösung ist auch eine Vakuumlösung der Einsteingleichung (für  $\Lambda = 0$ ). Sie modelliert die Umgebung eines ideellen (ungeladenen) rotierenden Stern bzw. ein (ungeladenes) schwarzes Loch.

Wir betrachten wieder die Koordinaten  $(t, r, \varphi, \theta)$  auf  $\mathbb{R}^4$  (wie bei Schwarzschild). Der Stern solle in der  $(r, \varphi)$ -Ebene (also um die  $\theta$ -Achse). Außerdem suchen wir eine stationäre Lösung (d.h. hier alle Metrikoeffizienten zeitunabhängig). Ähnlich wie bei rotationssymmetrisch, vgl. ÜA 22.ii, kann man sich überlegen (benutze z.B. Invarianz unter  $t \mapsto -t$  und  $\varphi \mapsto -\varphi$ ), dass die Metrik die Form

$$g = -g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{t\varphi}dtd\varphi$$

haben muss (es wird also im Gegensatz zu rotationssymmetrisch einen gemischten Term  $dtd\varphi$  geben). Löst man mit diesem Ansatz  $\text{Ric} = 0$  erhält man die Kerr-Lösung.

In Boyer-Lindquist Koordinaten ist die Metrik der Kerr-Lösung gegeben als

$$g_{\text{Kerr}} = -dt^2 + \rho^2 \left( \frac{dr^2}{D(r)} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \cos^2 \theta d\varphi^2 + \frac{rSr}{\rho^2} (a \cos^2 \theta d\varphi - dt)^2$$

mit  $\rho^2 = r^2 + a^2 \sin^2 \theta$  und  $D(r) = r^2 - r_S r + a^2$ .

Man sieht, dass für  $a = 0$  das genau die Schwarzschildmetrik in Schwarzschildkoordinaten ist.

*Interpretation von  $a$ :* Drehimpuls (pro Masse)

'Horizonte': Der Metrikoeffizient vor  $dr^2$  wird für  $r^2 - r_S r + a^2 = 0$  singulär, also bei  $r_{\pm}^H = \frac{r_S}{2} \pm \sqrt{\frac{r_S^2}{4} - a^2}$ .  $r = r_+^H$  heißt wieder Ereignishorizont. Der Metrikoeffizient vor  $dt^2$  ist im Gegensatz zu Schwarzschild nicht das Inverse zu  $g_{rr}$ , sondern  $1 - \frac{r_S r}{\rho^2}$ , und wird bei  $r_{\pm}^E = \frac{r_S}{2} \pm \sqrt{\frac{r_S^2}{4} - a^2 \cos^2 \theta}$  Null. Für  $\frac{r_S}{2} > a \neq 0$  ist  $r_E^+ > r_H^+ > r_H^- > r_E^-$ , vgl. <https://en.wikipedia.org/wiki/File:Kerr-surfaces.png>.  $r = r_E^+$  heißt Ergosphäre. Zwischen  $r_E^+$  und  $r_E^-$  ist  $\partial_t$  nun ein raumartiger Vektor.

\*<https://de.wikipedia.org/wiki/Einsteinring>

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

Es treten neue Effekte auf, z.B. der Lense-Thirring-Effekt (auch frame-dragging-Effekt genannt und gibt es auch bei den folgenden Lösungen), der beschreibt den Einfluss einer rotierenden Masse auf das lokale Inertialsystem\*.

### II.3.6.2. Reissner-Nordström-Lösung

Das ist eine statische Lösung der Einsteingleichung, die den Außenraum einer geladenen sphärisch symmetrischen Masse  $M$  mit Ladung  $Q$  beschreibt. Da diese Masse geladen ist, gibt es (Auch im Außenraum) ein elektrisches Feld  $E$ , was dann natürlich die Maxwellgleichungen erfüllen muss. Außerdem führt dieses elektrische Feld dazu, dass der Energie-Impuls-Tensor nicht Null ist.

Allgemein zu *Einsteingleichung und Elektromagnetismus*. Im Elektromagnetismus fasst man  $E$ - und  $B$ -Feld im elektromagnetischen Tensor zusammen

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu}$$

Für diese müssen dann die Maxwellgleichungen gelten<sup>†</sup> – in unserer Sprache hier:  $(\text{div}_g F)_\alpha = j_\alpha$ , wobei in  $j$  die Ladungs- und die Stromdichte eingeht, und  $F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0$  (in Sprache der Differentialformen  $dF = 0$  und  $*d * F = j$ ).

$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0$  (entspricht  $dF = 0$ ) sagt, dass es *Potential* ( $A = A_\mu dx^\mu$ ) gibt mit  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  (entspricht  $F = dA$ ).

Allgemein ist der elektromagnetische Energie-Impuls-Tensor gegeben durch<sup>‡</sup>:

$$T_{\mu\nu} = F^\lambda{}_\mu F_{\lambda\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

D.h. in den Einsteingleichungen kommt neben  $g_{\mu\nu}$  noch  $F_{\mu\nu}$  vor. Aber auch in den Maxwellgleichungen kommt neben  $F_{\mu\nu}$  versteckt im  $\nabla$  noch  $g_{\mu\nu}$  vor. Es sind also gekoppelte Gleichungen (*Einstein-Maxwell-Gleichungen*), die gleichzeitig gelöst werden müssen.

*Zurück zu Reissner-Nordström*. Man macht wie bei Schwarzschild einen statischen radialsymmetrischen Ansatz für die Metrik:  $g = A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2$ . Die Frage ist dann, können wir in unserer speziellen Situation mehr über  $F_{\mu\nu}$  sagen:

Da es eine statische Lösung ist, gibt es nur ein zeitunabhängiges  $E$ -Feld und kein magnetisches Feld ( $B$ -Feld). Wir wollen übers Potential  $A$  gehen und suchen nach einem der Fall  $A = f(r)dt$  (da alles radialsymmetrisch und es kein  $B$ -Feld gibt.) Fürs zugehörige  $F$  ist  $F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0$  nun automatisch erfüllt. Hier ist

\*[https://en.wikipedia.org/wiki/Lense%E2%80%93Thirring\\_precession](https://en.wikipedia.org/wiki/Lense%E2%80%93Thirring_precession)

†[https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s\\_equations\\_in\\_curved\\_spacetime](https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations_in_curved_spacetime)

‡Das kann man z.B. über eine Wirkung (Variationsprinzip) herleiten... oder mittels SRT und Korrespondenzprinzip 'erraten'.

### II.3. Die Schwarzschildlösung

$F = f'(r)(dr \otimes dt - dt \otimes dr)$ . Es bleibt noch die zweite Maxwellgleichung: Da wir eine Lösung weg vom Stern suchen, ist  $j = 0$  und damit muss als zweite Maxwellgleichung  $\text{div}_g F = 0$ , also  $g^{\gamma\beta}(\nabla_\gamma F)_{\alpha\beta} = 0$ , gelten. Ausgeschrieben:

$$g^{\gamma\beta}(F_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^\nu F_{\alpha\nu} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\nu F_{\beta\nu}) = 0$$

Benutzt man die obige Form der Metrik, dann ist nur für  $\alpha = t$  die linke Seite nicht automatisch Null, sondern äquivalent zu:  $f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = 0$ . Allgemeine Lösung ist  $f(r) = \frac{Q}{r} + c$ . Für alle  $c$  ist  $F_{\mu\nu}$  gleich (Eichfreiheit). Wir wählen  $f(r) = \frac{Q}{r}$ , wobei  $Q$  die Rolle der Ladung spielt. Mit dem  $F_{\mu\nu}$  und der radialsymmetrischen Form der Metrik kann man dann in die Einsteingleichung und erhält:

$$g_{\text{Reissner-Nordström}} = - \left(1 - \frac{r_S}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Was fällt auf?

- $r = 0$  ist wie bei Schwarzschild eine gravitative Singularität.
- Die Metrik ist nun bei  $r_\pm = \frac{r_S}{2} \pm \sqrt{\frac{r_S^2}{4} - Q^2}$  erst einmal nicht definiert.  $r = r_+ (\geq r_-)$  wird Ereignishorizont und  $r = r_-$  Cauchyhorizont genannt. Ist  $2Q = r_S$ , fallen beide zusammen. Ist  $2Q > r_S$ , sind die Lösungen imaginär und es gibt gar keine Horizonte. Dann ist die Raumzeit für alle  $r > 0$  direkt definiert. in diesem Fall nennt man  $r = 0$  eine nackte Singularität\*, weil sie nicht hinter einem Ereignishorizont liegt.

Jetzt könnte man wieder Geodäten berechnen... Zeitartige Geodäten beschreiben wieder den 'freien Fall' eines Beobachters, aber nur eines ungeladenen. Will man die Bewegung eines geladenen Teilchens in Reissner-Nordström berechnen muss man berücksichtigen, dass eine elektrische Abstoßung von der Zentralladung stattfindet. D.h. man müsste in der Gleichung  $m\nabla_\gamma \dot{\gamma} = 0$  die rechte Seite durch das Coulombsche Gesetz in der Raumzeit (mittels  $\text{grad}_g f(r)$ ).

#### II.3.6.3. Kerr-Newman-Lösung

Dies sind die letzten Fälle zusammen – die allgemeinste Form einer asymptotischen flachen<sup>†</sup>, stationäre Lösung<sup>‡</sup> der Einstein-Maxwell-Gleichungen, die die Raumzeit außerhalb einer geladenen rotierenden Masse beschreiben:

$$g_{KN} = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \cos^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} ((r^2 + a^2)d\varphi - a dt)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2$$

mit  $\Delta = r^2 - r_S r + a^2 + Q^2$  und  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ <sup>§</sup>.

\*[https://en.wikipedia.org/wiki/Naked\\_singularity](https://en.wikipedia.org/wiki/Naked_singularity)

† ~ für  $r \rightarrow \infty$  sieht es aus wie Minkowski

‡ in  $(t, r, \varphi, \theta)$  Koordinaten sind alle Koeffizienten zeitunabhängig

§ [https://en.wikipedia.org/wiki/Kerr%E2%80%93Newman\\_metric](https://en.wikipedia.org/wiki/Kerr%E2%80%93Newman_metric)

## II.4. Kosmologie und Isometrien

Vorl. 13

Die verbreitetsten kosmologischen Modelle basieren auf den Annahmen des sogenannten *kosmologischen Prinzips*:

- (i) Es gibt eine Familie von disjunkten zeitartigen Geodätischen ('die fundamentalen Beobachter'), die die Mannigfaltigkeit aufspannen. Ihre Eigenzeit heißt *kosmische Zeit*.
- (ii) Das Universum sieht in alle Richtungen für einen fundamentalen Beobachter gleich aus (Isotropie) und es sieht für alle fundamentalen Beobachter gleich aus (Homogenität).

Kosmologie beschäftigt sich mit dem Universum als Ganzes. Auch wenn Isotropie und Homogenität auf kleinen Skalen (wie die Umgebung unserer Erde oder auch unser Sonnensystem) nicht gegeben ist, kann man auf großen Skalen, mal diese Annahme machen. Es gibt auch (dann weniger verbreitete) kosmologische Modelle, die eine der Annahmen, Isotropie oder Homogenität, fallen lassen.

Um insgesamt kosmologische Modelle formulieren zu können, müssen wir zunächst mehr zu Isometrien sagen.

### II.4.1. Killingvektorfelder

Eine Isometrie, wie in Definition II.3.1, ist ein Diffeomorphismus  $f: M \rightarrow N$  zwischen Riemannschen oder Lorentzmannigfaltigkeiten  $(M, g)$  und  $(N, h)$ , für den

$$g_p(v, w) = h_{f(p)}(d_p f(v), d_p f(w))$$

für alle  $p \in M$  und  $v, w \in T_p M$  gilt. Isometrien  $f: M \rightarrow M$  bilden mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe – die *Isometriegruppe* von  $(M, g)$ .

Ein wichtiger Fall sind *Einparameterfamilien von Isometrien um die Identität*, also eine glatte Abbildung  $f: (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow M$ , so dass  $f_s := f(s, \cdot): M \rightarrow M$  für alle  $s$  eine Isometrie und  $f_0 = \text{id}$  ist. Wir werden etwas allgemeiner *Einparameterfamilien von lokalen Isometrien um die Identität* benötigen, d.h. eine glatte Abbildung  $f: \Sigma \subset (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow M$  mit  $\Sigma$  eine Umgebung von  $\{0\} \times M$  und  $f_s := f(s, \cdot): \Sigma_s := \{x \in M \mid (x, s) \in \Sigma\} \rightarrow f_s(\Sigma_s)$  ist eine Isometrie.

**Definition II.4.1.** Sei  $f_s$  eine Einparameterfamilien von (lokalen) Isometrien um die Identität von  $(M, g)$ . Das Vektorfeld  $X$  gegeben durch

$$X(p) := \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} f_s(p)$$

nennen wir *Killingvektorfeld* bzw. *infinitesimale Isometrie* von  $(M, g)$ .

**Beispiel II.4.2.** Für den Minkowskiraum  $\mathbb{R}^{1,n}$  ist die Isometriegruppe erzeugt durch die Poincaregruppe und den Translationen. Also  $f_s(p) = A(s)p + a(s)$ ,  $a(s) \in \mathbb{R}^{1,n}$

und  $A(s) \in \mathcal{L}(m+1) \subset \text{Mat}_{\mathbb{R}}(m+1)$  (glatt von  $s$  abhängig mit  $A(0) = \text{Id}$  und  $a(0) = 0$ ). Dann ist  $X(p) = Bp + b$  mit  $B = \frac{d}{ds}|_{s=0}A(s)$  und  $b = a'(0)$ . Aus der definierenden Gleichung  $A(s)^T J A(s) = J$  für  $\mathcal{L}(m+1)$  erhält man durch Ableiten nach  $s$ :  $B^T J + J B = 0$ . Erfüllt andererseits ein  $B$  die letzte Gleichung, dann ist  $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(m+1)$ ,  $s \mapsto \exp(sB)$ ,<sup>\*</sup> eine glatte Kurve mit  $A(0) = \text{Id}$ ,  $A'(0) = B$ . Man kann nachrechnen, dass  $A(s)^T J A(s) = J$  ist. Also ist  $A(s) \in \mathcal{L}(m+1)$ .<sup>†</sup> Wir haben also gesehen, dass  $X(p) = Bp + a$  für alle  $B$  mit  $B^T J + J B = 0$  und alle  $a \in \mathbb{R}^{1,n}$  ein Killingvektorfeld im  $\mathbb{R}^{1,n}$  ist.

Als nächstes werden wir eine Gleichung finden, die Killingvektorfelder automatisch erfüllen, und wir werden später sehen, dass diese Gleichung schon äquivalent zur Definition eines Killingvektorfeldes ist.

**Lemma II.4.3.** *Sei  $X$  ein Killingvektorfeld. Dann ist  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und  $X$  erfüllt lokal die Gleichung<sup>‡</sup>.  $(\nabla_{\partial_\alpha} X)_\gamma + (\nabla_{\partial_\gamma} X)_\alpha = 0$  bzw. äquivalent für alle  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  gilt*

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0. \quad (\text{II.21})$$

Die Gleichung (II.21) heißt Killinggleichung.<sup>§</sup>

*Beweis.* ÜA 24 □

**Bemerkung II.4.4.**

- (i) Sei  $X$  ein Killingvektorfeld. Seien  $(x^\alpha)_\alpha$  lokale Koordinaten, so dass  $X = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$  für ein  $\alpha$  ist. Dann hängen die Metrikkoeffizienten in diesen Koordinaten nicht von  $x^\alpha$  ab:

$$\begin{aligned} g_{\beta\gamma,\alpha} &= \partial_\alpha g(\partial_\beta, \partial_\gamma) \stackrel{\text{metrisch}}{=} g(\nabla_\alpha \partial_\beta, \partial_\gamma) + g(\partial_\beta, \nabla_\alpha \partial_\gamma) \\ &\stackrel{\text{torsionsfrei}}{=} g(\nabla_\beta \partial_\alpha, \partial_\gamma) + g(\partial_\beta, \nabla_\gamma \partial_\alpha) \stackrel{(\text{II.21})}{=} 0. \end{aligned}$$

- (ii) Aus der Berechnung der Geodätischen durch (B.1)

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha}$$

mit  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$  und aus (i) folgt somit direkt: Ist  $X = \partial_\alpha$  ein Killingvektorfeld, dann ist  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0$  und damit ist  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha}$  entlang einer Geodäten konstant und somit eine *Erhaltungsgröße*.

<sup>\*</sup> $\exp: \text{Mat}_{\mathbb{R}}(m+1) \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(m+1)$  ist die Matrixexponentialfunktion definiert durch  $\frac{d}{ds}(\exp(sB)) = B \exp(sA)$  und  $\exp(0) = \text{Id}$ . Existenz und Eindeutigkeit folgt mit Picard-Lindelöf.

<sup>†</sup>Das zusammen ist genau die Rechnung dafür, dass die Menge aller Matrizen mit  $B^T J + J B = 0$  die Lie-Algebra der Liegruppe  $\mathcal{L}(m+1)$  ist.

<sup>‡</sup> $\nabla_{\partial_\alpha} X = (\nabla_{\partial_\alpha} X)^\beta \partial_\beta$  ist ein Vektorfeld und hat damit obere Indizes. Es ist dann  $(\nabla_{\partial_\alpha} X)_\gamma = (\nabla_{\partial_\alpha} X)^\beta g_{\beta\gamma}$

<sup>§</sup>Die linke Seite ist gleich  $\mathcal{L}_X g$  (die Lie-Ableitung der Metrik in Richtung von  $X$ ) und wird in der Literatur oft als Definition verwendet. Da wir hier aber die Lie-Ableitung im folgenden nirgends brauchen werden, verzichten wir darauf, dazu die Theorie einzuführen.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

Wir haben das schon im Beispiel von Schwarzschild gesehen: Dort waren die Metrikkoeffizienten unabhängig von  $t$  bzw.  $\varphi$ , was uns die Erhaltungsgrößen  $E$  bzw.  $\ell$  gab.

Auch ohne eine Koordinate entlang des Killingvektorfeldes zu wählen, sieht man ganz analog (und das sind auch äquivalente Aussagen):

**Lemma II.4.5.** *Ist  $X$  ein Killingvektorfeld von  $(M, g)$  und  $\gamma(s)$  eine Geodätische auf  $(M, g)$ , dann ist  $g(X, \dot{\gamma})$  entlang der Geodätischen konstant.*

*Beweis.* Aus der Killinggleichung (II.21) folgt  $g(\nabla_{\dot{\gamma}} X, \dot{\gamma}) = 0$  und damit

$$\frac{d}{ds} g(X, \dot{\gamma}) = \dot{\gamma}(g(X, \dot{\gamma})) = g(\nabla_{\dot{\gamma}} X, \dot{\gamma}) + g(X, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) = 0. \quad \square$$

**Beispiel II.4.6.** (Killingvektorfelder zur Schwarzschildmetrik) Wir hatten oben schon die beiden Einparameterfamilien von Isometrien  $f_s: t \mapsto t + s$  bzw.  $f_s: \varphi \mapsto \varphi + s$ . Allerdings hat die sphärische Metrik auf der Kugel und damit auch unsere Schwarzschildmetrik die  $SO(3)$  als Untergruppe der Isometriegruppe. Diese wird durch drei Einparameterfamilien von Isometrien erzeugt – eine davon  $\varphi \mapsto \varphi + s$ , also Rotation um die, sagen wir,  $z$ -Achse. Als die beiden anderen könnten wir Drehungen um die  $x$ - bzw.  $y$ -Achse wählen. Das letzte Lemma sagt uns, dass auch dazu Erhaltungsgrößen gehören. Die hat man bei uns so direkt nicht gesehen, weil wir unser Koordinatensystem so gewählt hatten, dass bei unseren Anfangswerten  $\theta \equiv 0$  ist und damit die resultierende Rotationsachse die  $z$ -Achse ist. Das macht  $\ell$  zur  $z$ -Komponente des Drehimpulsvektors. Die beiden anderen Erhaltungsgrößen wären die  $x$ - und  $y$ -Komponente, die bei unserer Wahl der Anfangswerte automatisch Null sind.

Wir hatten schon früher erwähnt, dass es auf Mannigfaltigkeiten nur einen Divergenzatz für Vektorfelder, aber nicht für allgemeine Tensoren gibt. Somit führt ein divergenzfreier  $(0, 2)$ -Tensor, wie der Energie-Impuls-Tensor  $T$ , nicht zwingend zu einer Erhaltungsgröße, wie man das von Impuls und Energie bei Newton gewöhnt ist. Zusammen mit einem Killingvektorfeld erhält man aus  $T$  allerdings wieder Erhaltungsgrößen. Im Falle des Minkoswkiiraumes folgt die Impulserhaltung aus den räumlichen Translationen und die Energieerhaltung aus den zeitlichen Translationen.

**Satz II.4.7.** *Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche oder eine Lorentzmannigfaltigkeit. Sei  $X$  ein Killingvektorfeld und  $T$  ein symmetrischer divergenzfreier  $(0, 2)$ -Tensor (z.B. der Energie-Impuls-Tensor). Sei  $J := T(X, \cdot)^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$  (d.h. in lok. Koordinaten  $J^\alpha = T_{\beta\gamma} g^{\gamma\alpha} X^\beta = T_\beta^\alpha X^\beta$ ). Dann ist  $\operatorname{div} J (= (\nabla_\gamma J)^\gamma) = 0$ .*

Bedeutung (hier nur für Riemannsch (sonst muss man mit dem Normalenvektor noch aufpassen)): Sei  $\Sigma$  eine geschlossene (=kompakt und ohne Rand) Hyperfläche\* in  $M$  Riemannsch, so dass  $M \setminus \Sigma$  zwei Zusammenhangskomponenten habe. Die beschränkte

---

\*D.h. um jeden Punkt  $p \in \Sigma$  kann man eine Karte  $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  von  $M$  so wählen, dass  $\kappa(\Sigma \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^{m+1} \times \{0\})$  ist.

dieser beiden Komponenten heiße  $S$  und  $\nu$  sei das zugehörige äußere Einheitsnormalenvektorfeld. Aus dem Divergenzsatz\* für Vektorfelder, s. Fußnote \* auf Seite 42, folgt

$$\int_{\Sigma} g(J, \nu) d\text{vol}_{g|_{\Sigma}} = \int_S \text{div } J d\text{vol}_g.$$

D.h. der letzte Satz bedeutet, dass  $J$  ein *erhaltener Fluss/Strom* ist, d.h.

$$\int_{\Sigma} g(J, \nu) d\text{vol}_{g|_{\Sigma}} = 0.$$

*Beweis.* Es ist

$$\text{div } J = (\nabla_{\gamma} J)^{\gamma} \stackrel{[\text{C.}\#]=0}{=} (\nabla_{\gamma} T(X, \cdot))_{\alpha} g^{\alpha\gamma}.$$

Allgemein haben wir für  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\underbrace{(\nabla_Y T(X, \cdot))}_{\in \Omega^1(M)}(Z) \stackrel{(\text{II.10})}{=} Y(T(X, Z)) - T(X, \nabla_Y Z) \stackrel{(\text{II.11})}{=} (\nabla_Y T)(X, Z) + T(\nabla_Y X, Z).$$

Benutzen wir diese Gleichheit für  $Y = \partial_{\gamma}$  und  $Z = g^{\alpha\gamma} \partial_{\alpha}$ , dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{div } J &= (\nabla_{\gamma} T)_{\delta\epsilon} g^{\epsilon\gamma} X^{\delta} + T_{\delta\epsilon} (\nabla_{\gamma} X)^{\delta} g^{\gamma\epsilon} \\ &= (\text{div } T)_{\delta} X^{\delta} + T^{\delta\gamma} (\nabla_{\gamma} X)_{\delta}. \end{aligned}$$

Der erste Term ist Null wegen der Divergenzfreiheit von  $T$  und der zweite wegen der Killinggleichung zusammen mit der Symmetrie von  $T$ .  $\square$

**Alle Lösungen der Killinggleichung kommen von Einparameterfamilien (lokaler) Isometrien:** Um das zu sehen, reden wir zunächst kurz über Flüsse von Vektorfeldern. Sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Für jedes Intervall  $(a, b)$  um  $0 \in \mathbb{R}$  mit  $|b - a|$  klein genug, hat

$$\dot{\gamma}_x(t) = X(\gamma_x(t)), \quad \gamma_x(0) = x$$

eine Lösung. Dies folgt mit Picard-Lindelöf, da diese Gleichung in lokalen Koordinaten ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung ist mit glatten Koeffizienten, vgl. Abbildung II.6 für ein Beispiel mit  $M = \mathbb{R}^2$ . Ist das Intervall maximal, so ist die Lösung eindeutig – das maximale Intervall, nennen wir  $(a_x, b_x)$ .

Der *Fluss des Vektorfeldes*  $X$  ist definiert durch

$$\Phi: \Sigma_X = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M \mid a_x < t < b_x\} \rightarrow M, \quad \Phi_t(x) := \Phi(t, x) := \gamma_x(t).$$

---

\*Wir haben hier noch nicht über Integration auf Riemannschen/Lorentzischen Mannigfaltigkeiten gesprochen. Man muss sich hier in lokalen Koordinaten nur ein Mehrfachintegral vorstellen wie bei Untermannigfaltigkeiten in [4, Def. 2.4.20]– also für  $f$  nur in einer lokalen Koordinate  $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  nicht Null ist  $\int f d\text{vol}_g = \int_V (f \circ \kappa^{-1}) \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \dots dx^m$ . In [4] kommt  $\det(DF)^T DF$  statt  $\det g_{ij}$  vor. Das jedoch für die induzierte Metrik einer Untermannigfaltigkeit diese beiden Größen überstimmen, folgt direkt aus A 19.i.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

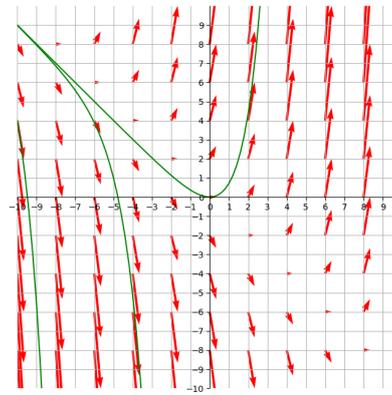


Abb. II.6.: Für das Vektorfeld  $X(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ x+y \end{pmatrix}$  (rot im Bild) ist die Differentialgleichung für die Integralkurven  $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x(t)+y(t) \end{pmatrix}$ . Die Integralkurven (zwei in grün) sind somit  $\gamma: t \mapsto (x(t) = t + x_0, y(t) = ae^t - t - x_0 - 1)$  bei Anfangswerten  $\gamma(0) = (x_0, y_0 = a - x_0 - 1)$ . Damit ergibt sich als Fluss  $\Phi: (t, (x_0, y_0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mapsto (t + x_0, (y_0 + x_0 + 1)e^t - t - x_0 - 1)$ .

### Bemerkung II.4.8.

- (i) Wegen glatter Abhängigkeit der Lösung von  $\dot{\gamma}_x(t) = X(\gamma_x(t))$  vom Anfangswert  $\gamma_x(0) = x$ , gibt es für jeden Punkt  $x \in M$  eine Umgebung  $U$  und ein  $\delta > 0$ , so dass  $U \times (-\delta, \delta) \subset \Sigma_X$  ist. Dann ist für alle  $t \in (-\delta, \delta)$

$$\Phi_t: U \rightarrow \Phi_t(U)$$

ein Diffeomorphismus, da  $\Phi_t$  glatt ist und  $\Phi_{-t}: \Phi_t(U) \rightarrow U$  die Umkehrabbildung ist.

- (ii) Für alle  $x \in M$  mit  $s + t, t \in (a_x, b_x)$  gilt  $\Phi_s \circ \Phi_t(x) = \Phi_{s+t}(x)$ .
- (iii) Ist  $\Sigma_X = \mathbb{R} \times M$ , nennen wir das Vektorfeld  $X$  *vollständig*. Ist  $X$  vollständig, dann ist  $\Phi_t: M \rightarrow M$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  ein Diffeomorphismus und es gilt  $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$  für alle  $s, t$ .

Sei  $f: U \subset M \rightarrow f(U) \subset M$  ein Diffeomorphismus. Ist  $U$  klein genug, entspricht das genau einem lokalen Koordinatenwechsel.

**Lemma II.4.9.** *Ein Vektorfeld ist genau dann ein Killingvektorfeld, wenn es die Killinggleichung (II.21) erfüllt.*

*Beweis.* Die eine Richtung haben wir schon in Lemma II.4.3 gezeigt.

Sei nun  $\Phi: \Sigma \subset (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow M$  mit  $\Sigma$  eine Umgebung von  $\{0\} \times M$  der Fluss vom Vektorfeld  $X$ . Es ist nur zu zeigen, dass  $\Phi_t$  eine lokale Isometrie ist: Man rechnet (in lokalen Koordinaten, genau wie in ÜA 24 (nutzend ÜA 20.i)) für alle  $p \in M$ ,  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  nach, dass  $\frac{d}{dt} g_{\Phi_t(p)}(d_p \Phi_t(Y(p)), d_p \Phi_t(Z(p))) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X)$  gilt und damit konstant Null ist. Also ist  $g_{\Phi_t(p)}(d_p \Phi_t(Y(p)), d_p \Phi_t(Z(p))) = g_{\Phi_0(p)}(d_p \Phi_0(Y(p)), d_p \Phi_0(Z(p))) = g_p(Y(p), Z(p))$ .  $\square$

**Wie viele Killingvektorfelder kann es geben?** Hat man zwei Killingvektorfelder  $X, Y$ , die von Parameterfamilien  $\varphi_s$  bzw.  $\psi_t$  von Isometrien kommen, dann ist auch  $\varphi_s \circ \psi_s$ ,  $\varphi_s \circ \psi_{-s}$ , etc Parameterfamilien von Isometrien, die wiederum zu Killingvektorfeldern führen. Es gilt noch mehr. Dazu führen wir zunächst den Begriff der Lieklammer ein: Vorl. 14

**Definition II.4.10.** Die *Lieklammer*  $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  ist definiert durch

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

für alle  $f \in C^\infty(M)$ .

Man muss sich für die letzte Definition überlegen, dass ein Vektorfeld durch seine Wirkung

$$X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), f \mapsto X(f) = df(X),$$

eindeutig bestimmt ist. Das ist die Derivationsinterpretation von Vektorfeldern, vgl. ÜA 14. Direkter sieht man das für die Lieklammer im Ausdruck in lokalen Koordinaten, siehe folgendes Lemma:

**Lemma II.4.11.**

- (i) Die Lieklammer ist in lokalen Koordinaten durch  $[X, Y]^\alpha = X^\beta \frac{\partial Y^\alpha}{\partial x^\beta} - Y^\beta \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta}$  gegeben.
- (ii) Die Lieklammer ist bilinear in beiden Komponenten, und es gilt  $[X, X] = 0$  für alle  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .
- (iii) Es gilt für alle  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  die Jacobi-Identität

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

- (iv)  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ .

*Beweis.* Direktes Nachrechnen.  $\square$

**Bemerkung II.4.12.** Einen Vektorraum  $V$  zusammen mit einer Abbildung  $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$ , die die Eigenschaften (ii) und (iii) des letzten Lemmas erfüllt, nennt man *Liealgebra*. Also ist insbesondere  $\mathfrak{X}(M)$  mit der Lieklammer eine Liealgebra.

**Lemma II.4.13.** Sind  $X, Y$  Killingvektorfelder von  $(M, g)$ . Dann ist auch  $aX + Y$  für ein  $a \in \mathbb{R}$  wieder ein Killingvektorfeld und auch  $[X, Y]$  ein Killingvektorfeld.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

*Beweis.* Das  $aX + Y$  wieder ein Killingvektorfeld ist, folgt direkt aus der Linearität der Killinggleichung. Das  $[X, Y]$  wieder ein Killingvektorfeld folgt durch direktes Nachrechnen: Für alle  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$  gilt:

$$\begin{aligned} g(\nabla_V[X, Y], W) &= g(\nabla_V\nabla_X Y - \nabla_V\nabla_Y X, W) \\ &= g(R(V, X)Y - R(X, V)Y + \nabla_X\nabla_V Y + \nabla_{[V, X]}Y - \nabla_Y\nabla_V X - \nabla_{[V, Y]}X, W). \end{aligned}$$

Mit den Symmetrien von  $R$  ergibt sich

$$\begin{aligned} &g(\nabla_V[X, Y], W) + g(\nabla_W[X, Y], V) \\ &= g(\nabla_X\nabla_V Y + \nabla_{[V, X]}Y - \nabla_Y\nabla_V X - \nabla_{[V, Y]}X, W) \\ &\quad + g(\nabla_X\nabla_W Y + \nabla_{[W, X]}Y - \nabla_Y\nabla_W X - \nabla_{[W, Y]}X, V) \\ &= X.g(\nabla_V Y, W) - g(\nabla_V Y, \nabla_X W) + g(\nabla_{[V, X]}Y, W) \\ &\quad - Y.g(\nabla_V X, W) + g(\nabla_V X, \nabla_Y W) - g(\nabla_{[V, Y]}X, W) \\ &\quad + X.g(\nabla_W Y, V) - g(\nabla_W Y, \nabla_X V) + g(\nabla_{[W, X]}Y, V) \\ &\quad - Y.g(\nabla_W X, V) + g(\nabla_W X, \nabla_Y V) - g(\nabla_{[W, Y]}X, V) \\ &= X.\underbrace{(g(\nabla_V Y, W) + g(\nabla_W Y, V))}_{=0 \text{ Y Killing}} - \underbrace{g(\nabla_V Y, \nabla_X W) - g(\nabla_{\nabla_X} W Y, V)}_{=0 \text{ Y Killing}} \\ &\quad - Y.\underbrace{(g(\nabla_V X, W) + g(\nabla_W X, V))}_{=0 \text{ X Killing}} + \underbrace{g(\nabla_V X, \nabla_Y W) + g(\nabla_{\nabla_Y} W X, V)}_{=0 \text{ X Killing}} \\ &\quad - \underbrace{g(\nabla_W Y, \nabla_X V) - g(\nabla_{\nabla_X} V Y, W)}_{=0 \text{ Y Killing}} + \underbrace{g(\nabla_W X, \nabla_Y V) + g(\nabla_{\nabla_Y} V X, W)}_{=0 \text{ X Killing}} \\ &\quad + g(\nabla_{\nabla_V} X Y, W) - g(\nabla_{\nabla_V} Y X, W) + g(\nabla_{\nabla_W} X Y, V) - g(\nabla_{\nabla_W} Y X, V) \\ &\stackrel{\text{Killing}}{=} -g(\nabla_W Y, \nabla_V X) + g(\nabla_W X, \nabla_V Y) - g(\nabla_V Y, \nabla_W X) + g(\nabla_V X, \nabla_W Y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist auch  $[X, Y]$  ein Killingvektorfeld.  $\square$

**Bemerkung II.4.14.** Aus Lemma II.4.13 folgt direkt, dass die Killingvektorfelder einen Untervektorraum und sogar eine Lieunteralgebra\* von  $\mathfrak{X}(M)$  bilden.

**Beispiel II.4.15.** Im  $(\mathbb{R}^2, \eta = -dt^2 + dx^2)$ , sei  $X = a(t, x)\partial_t + b(t, x)\partial_x$ . Soll  $X$  Killingvektorfeld sein, muss  $0 = (\nabla_\alpha X)_\beta + (\nabla_\beta X)_\alpha$  sein, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t a(t, x) = \partial_x b(t, x) \\ 0 &= -\partial_t b(t, x) + \partial_x a(t, x). \end{aligned}$$

Zusammen ist  $a(t, x) = a(x)$ ,  $b(t, x) = b(t)$  und  $\partial_t b(t) = \partial_x a(x)$ . Also  $b(t) = at + b_0$  und  $a(x) = ax + a_0$  und  $X = (ax + a_0)\partial_t + (at + b_0)\partial_x$ . Damit ist für den zweidimensionalen Minkowskiraum der Vektorraum der Killingvektorfelder dreidimensional.

\*Ist  $(V, [., .])$  eine Liealgebra und  $W \subset V$  ein Untervektorraum, der auch unter  $[., .]$  abgeschlossen ist (also  $[W, W] := \{[x, y] \mid x, y \in W\} \subset W$  ist), heißt *Lieunteralgebra von*  $(V, [., .])$ .

Ziel ist es nun die (maximale) Dimension des Vektorraums der Killingvektorfelder zu bestimmen:

Dazu benötigen wir zunächst:

**Lemma II.4.16.** *Ist  $X$  ein Killingvektorfeld auf  $(M, g)$  und  $c: I \rightarrow M$  eine Geodätische, dann gilt in allen Punkten von  $c$ , dass*

$$(\nabla_{\dot{c}} \nabla_{\dot{c}} X)_{c(t)} = R(\dot{c}(t), X(c(t)))\dot{c}(t) \quad (\text{II.22})$$

*gilt.*

*Beweis.* Ist  $c$  eine konstante Geodätische, d.h.  $\dot{c} \equiv 0$ , ist die Behauptung richtig. Wir nehmen, also nun an, dass  $c$  nichtkonstant ist. Sei  $t_0 \in I$ . Wir wählen lokale Koordinaten  $(x^\alpha)_\alpha$  um ein  $c(t_0)$  derart, dass  $c(t)$  in lokalen Koordinaten die Form  $(0, \dots, 0, x^\beta(t) = t, 0, \dots, 0)$  für ein spezielles  $\beta$  hat. Da  $X$  ein Killingvektorfeld ist, gilt

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0 \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Wir wählen  $Y, Z$  derart, dass in unserer Karte gilt:

- (a)  $Y = Z = \dot{c} = \partial_\beta$ , setzen das in die obige Gleichung, nutzen dass  $c$  Geodätische ist, und leiten dann nach  $\partial_\alpha$  ab:

$$0 = \partial_\alpha g(\nabla_{\dot{c}} X, \dot{c}) = g(\nabla_\alpha \nabla_\beta X, \partial_\beta) + g(\nabla_\beta X, \nabla_\alpha \partial_\beta).$$

- (b)  $Y = \dot{c} = \partial_\beta$  und  $Z = \partial_\alpha$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{c}(g(\nabla_{\dot{c}} X, \partial_\alpha) + g(\dot{c}, \nabla_\alpha X)) \\ &= g(\nabla_{\dot{c}} \nabla_{\dot{c}} X, \partial_\alpha) + g(\nabla_\beta X, \nabla_\beta \partial_\alpha) + g(\partial_\beta, \nabla_\beta \nabla_\alpha X) \\ &\stackrel{\text{torsionsfrei}}{=} g(\nabla_{\dot{c}} \nabla_{\dot{c}} X, \partial_\alpha) + g(\nabla_\beta X, \nabla_\alpha \partial_\beta) + g(\partial_\beta, \nabla_\beta \nabla_\alpha X) \end{aligned}$$

Ziehen wir die beiden Gleichungen aus (a) und (b) voneinander ab, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_{\dot{c}} \nabla_{\dot{c}} X, \partial_\alpha) + g(R(\dot{c}, \partial_\alpha)X, \dot{c}) \\ &= g(\nabla_{\dot{c}} \nabla_{\dot{c}} X - R(\dot{c}, X)\dot{c}, \partial_\alpha) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung II.4.17.**

- (i) Die Gleichung (II.22) ist die Jacobigleichung, vgl. Definition II.1.32. Im Allgemeinen ist ein Jacobifeld  $J$  als Lösung von (II.22) nicht auf der ganzen Mannigfaltigkeit definiert sondern erst einmal nur ein *Vektorfeld entlang einer Kurve*  $c: I \rightarrow M$ , also eine Abbildung  $J: t \in I \mapsto J(t) \in T_{c(t)}M$ . Zur Berechnung der kovarianten Ableitung  $\nabla_{\dot{c}(t)} J(t)$ , vgl. (II.4) (oder folgt auch direkt aus den Eigenschaften (ii) und (iii) des Levi-Civita-Zusammenhangs in Lemma II.1.10), reicht es jedoch, wenn  $J$  auf  $c$  definiert ist. Auch  $\nabla_{\dot{c}} J$  ist dann wieder ein Vektorfeld entlang  $c$ .

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

Es gibt noch ein anderes technisches Detail, welches wir bis jetzt unterdrückt haben: Die Kurve  $c$  kann a priori Selbstschnitte haben: Dann können in einem Punkt  $p = c(t_0) = c(t_1)$  die Tangentialvektoren  $\dot{c}$  verschieden sein und a priori wäre rein von der Definition der kovarianten Ableitung nicht klar, was  $\nabla_{\dot{c}}$  im Punkt  $p$  dann sein soll. Technisch kann man das umgehen, indem man auf  $I$  eine Art 'mit  $c$ -zugezogene kovariante Ableitung' definiert. Für unsere Fragen hier reicht es dann, einfach  $c$  nur lokal zu betrachten, so dass keine Selbstschnitte vorliegen.

- (ii) Ein Jacobifeld entlang einer Kurve  $c: I \rightarrow M$  ( $0 \in I$ ) ist durch seine Anfangswerte  $J(0)$  und  $(\nabla_{\dot{c}}J)(0)$  eindeutig bestimmt:

Wählt man in  $c(0)$  eine Basis  $(e_\alpha(0))_\alpha$  eine Basis von  $T_{c(0)}M$  und sei  $e_\alpha(t) := \parallel_{0,t}^c e_\alpha(0)$  der Paralleltransport von  $e_\alpha(0)$  entlang  $c$ , vgl. ÜA 29, (d.h.  $e_\alpha(t)$  erfüllt  $\nabla_{\dot{c}(t)}X(t) = 0$  mit Anfangsbedingung  $X(0) = e_\alpha(0)$ ). Insbesondere ist dann  $(e_\alpha(t))_\alpha$  eine Basis von  $T_{c(t)}M$ . D.h. als glattes Vektorfeld entlang  $c$  hat  $J$  die Form  $J(t) = \sum_\alpha a_\alpha(t)e_\alpha(t)$  für glatte Funktionen  $a_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Wegen  $\nabla_{\dot{c}(t)}e_\alpha(t) = 0$  gilt  $\nabla_{\dot{c}}^2J(t) = \sum_\alpha a_\alpha''(t)e_\alpha(t)$ . Da  $J$  die Jacobi Gleichung erfüllt, gilt:

$$\sum_\alpha a_\alpha''(t)e_\alpha(t) = \sum_\alpha a_\alpha(t)R(\dot{c}(t), e_\alpha(t))\dot{c}(t)$$

Wegen  $R(\dot{c}(t), e_\alpha(t))\dot{c}(t) = \sum_\beta b_\beta^\alpha(t)e_\beta(t)$ , folgt  $a_\alpha''(t) = \sum_\beta a_\beta(t)b_\beta^\alpha(t)$  für alle  $\alpha$ . Dies ist ein System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen für  $a_\alpha$  zweiter Ordnung, dessen Lösung durch  $a_\alpha(0)$  und  $a_\alpha'(0)$  (also  $J(0)$  und  $\nabla_{\dot{c}}J(0)$ ) eindeutig bestimmt ist.

**Lemma II.4.18.** Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche oder Lorentzmannigfaltigkeit. Ist  $X$  ein Killingvektorfeld mit  $X(p) = 0$  und  $(\nabla_v X)|_p = 0$  für ein  $p \in M$  und all  $v \in T_pM$ , dann ist  $X \equiv 0$ .

Bevor wir das beweisen, zuerst eine Folgerung:

**Folgerung II.4.19.** Die Vektorraum der Killingvektorfelder einer  $m$ -dimensionalen zusammenhängenden Riemannschen oder Lorentzischen Mannigfaltigkeit hat maximal die Dimension  $\frac{m(m+1)}{2}$ .

*Beweis.* Aus Lemma II.4.18 und der Linearität der Killinggleichung folgt, dass ein Killingvektorfeld eindeutig durch den Wert von  $X$  und  $\nabla X$  in einem Punkt  $p \in M$  bestimmt ist und damit, dass  $L: X \in \{\text{Killingvektorfelder}\} \mapsto (X(p), (\nabla X)_p) \in T_pM \times T_1^1(T_pM)$  injektiv ist. Aus der Killinggleichung folgt weiterhin, dass der  $(1, 1)$ -Tensor  $\nabla X$ , der in jedem Punkt  $p$  als lineare Abbildung  $T_pM \rightarrow T_pM$  geschrieben werden kann, schief-symmetrisch ist, also  $\nabla X \in \mathfrak{sl}(m) := \{A \in \text{Matr}_{m \times m}(\mathbb{R}) \mid A + A^T = 0\}$  gilt. Damit kann das Bild von  $L$  und damit der Vektorraum der Killingvektorfelder maximal  $(m + \frac{m(m-1)}{2} = \frac{m(m+1)}{2})$ -dimensional sein.  $\square$

*Beweis von Lemma II.4.18.* Sei  $X(p) = 0$  und  $(\nabla X)_p = 0$ . Da  $M$  zusammenhängend ist, kann jeder Punkt der Mannigfaltigkeit durch eine stetige Kurve, die stückweise

Geodätische ist, erreicht werden. Deshalb reicht es, die Aussage auf Geodäten ausgehend von  $p$  zu überprüfen. Sei  $c: I \rightarrow M$  Geodätische mit  $0 \in I$  und  $c(0) = p$ . Dann ist nach Lemma II.4.16  $X$  ein Jacobivektorfeld entlang  $c$  und damit eindeutig durch  $X(p)$  und  $(\nabla_{\dot{c}}X)_p$  bestimmt. Also verschwindet  $X$  entlang  $c$  und damit auf ganz  $M$ .  $\square$

**Definition II.4.20.** Eine Riemannsche oder Lorentzmannigfaltigkeiten  $(M^m, g)$  heißt

- (i) *homogen im Punkt*  $p \in M$ , falls  $\{X(p) \mid X \text{ ist Killingvektorfeld}\} = T_pM$  ist.
- (ii) *isotrop im Punkt*  $p \in M$ , falls  $\{(\nabla X)_p \mid X \text{ ist Killingvektorfeld mit } X(p) = 0\} = \mathfrak{sl}(m)$  ist.

Bilden die Killingvektorfelder von  $(M^m, g)$  einen  $\frac{m(m+1)}{2}$ -dimensionalen Vektorraum, dann heißt  $M$  *maximal symmetrisch*.

**Bemerkung II.4.21.** (Interpretation) Homogen in einem Punkt  $p \in M$ , bedeutet, dass es eine Umgebung  $U$  von  $p$  gibt, so dass es für jeden Punkt  $q \in U$  eine lokale Isometrie  $f: U \subset M \rightarrow f(U) \subset M$  mit  $f(p) = q$  gibt.

Die Isometrien, die durch Killingvektorfelder mit  $X(p) = 0$  erzeugt werden, entsprechen 'lokalen' Rotationen um den Punkt  $p \in M$ . Demnach bedeutet isotrop in einem Punkt, dass lokal um diese Punkt die Mannigfaltigkeit in alle Richtungen gleich aussieht.

Wir werden sehen, dass maximal symmetrische Räume lokal eindeutig durch eine Konstante  $K \in \mathbb{R}$  und dem Index ihrer Metrik bestimmt sind. Zuerst bestimmen wir den Krümmungstensor:

**Vorl. 15**

**Lemma II.4.22.** Sei  $(M^m, g)$  (für  $m > 1$ ) ein maximal symmetrischer Raum. Dann gilt

$$g(R(X, Y)Z, W) = \frac{K}{m(m-1)}(g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W))$$

für ein  $K \in \mathbb{R}$  unabhängig von der Wahl der  $X, Y, Z, W$ .

Das bedeutet, dass maximal symmetrische Räume konstante Schnittkrümmung haben, wobei die Schnittkrümmung in einem Punkt der Riemannsche Krümmungstensor auf einer Ebene des Tangentialraumes in diesem Punkt ist, genauer: Sei  $p \in M$  und  $E \subset T_pM$  ein zweidimensionaler Untervektorraum, dann ist die *Schnittkrümmung* in  $E$  definiert durch

$$\text{sec}_p(E) := \frac{g_p(R(u, v)v, u)}{g_p(v, v)g_p(u, u) - g_p(u, v)^2}$$

für  $u, v$  eine Basis von  $E$ . (Man muss sich überlegen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Basis  $u, v$  von  $E$  ist. Außerdem kann man alle Schnittkrümmungen von  $(M, g)$  kennt man auch den Riemannschen Krümmungstensor  $R$ . Im Gegensatz zu Ric verliert man also keine Informationen über  $R$ .)

*Beweisskizze.* Da  $M$  insbesondere homogen in alle Punkten ist, reicht es, die Gleichung in einem Punkt zu überprüfen. Dort wird sie aus der Isotropie folgen, vgl. auch ÜA 33 (Man kann sogar zeigen, dass aus isotrop in allen Punkten schon homogen folgt.)  $\square$

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

**Bemerkung II.4.23.**  $K$  ist die Skalarkrümmung:

$$\begin{aligned} \text{scal} &= R_{\beta\alpha\gamma}^{\alpha} g^{\beta\gamma} = \frac{K}{m(m-1)} g^{\alpha\epsilon} (g_{\beta\gamma} g_{\epsilon\alpha} - g_{\alpha\beta} g_{\gamma\epsilon}) g^{\beta\gamma} \\ &= \frac{K}{m(m-1)} (\delta_{\gamma}^{\gamma} \delta_{\alpha}^{\alpha} - \delta_{\epsilon}^{\beta} \delta_{\beta}^{\epsilon}) = \frac{K}{m(m-1)} (m^2 - m) = K \end{aligned}$$

**Satz II.4.24.** Sei  $(M^m, g)$  ein maximal symmetrischer Räume mit Skalarkrümmung  $K \in \mathbb{R}$  und  $g$  ist Riemannsch oder Lorentzsch. Dann gibt zu jedem  $p \in M$  eine Umgebungen  $U$ , so dass  $(U, g)$  isometrisch zu einer Teilmenge

- (i) des Euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^m$ , falls  $K = 0$  und  $g$  Riemannsch,
- (ii) der Sphäre  $S^m(R) \subset \mathbb{R}^{m+1}$  vom Radius  $R$ , falls  $K = \frac{m(m-1)}{R^2}$  und  $g$  Riemannsch,
- (iii) der hyperbolische Raum  $H^m(R) := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \eta(x, x) = -r^2, x^0 > 0\}$  vom Radius  $R$ , falls  $K = -\frac{m(m-1)}{R^2}$  und  $g$  Riemannsch,
- (iv) des Minkowskiraum, falls  $K = 0$  und  $g$  Lorentzsch,
- (v) der de-Sitterraum  $S_1^m(R) := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \eta(x, x) = r^2\}$  mit Metrik induziert vom umliegenden Minkowskiraum, falls  $K = \frac{m(m-1)}{R^2}$  und  $g$  Lorentzsch,
- (vi) der Anti-de-Sitterraum  $H_1^m(r) := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid r^2 - (x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^m)^2 = 0\}$  mit Metrik induziert vom  $\mathbb{R}^{m+1}$  mit dem Standard-Index 2-innerem Produkt, vgl. ÜA 12, falls  $K = -\frac{m(m-1)}{R^2}$  und  $g$  Lorentzsch,

ist.

**Definition II.4.25.** Eine Raumzeit  $(M, g)$  heißt *stationär*, wenn es ein Killingvektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  gibt, welches zeitartig ist. Die Raumzeit heißt *asymptotisch stationär*, wenn es ein Killingvektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  gibt, welches asymptotisch zeitartig ist, d.h. jede Integralkurve des Flusses zu  $X$  ist außerhalb eines beschränkten Intervalls zeitartig.

**Beispiel II.4.26.** Schwarzschildaußenraum, Kerr und Reissner-Nordström sind stationär mit  $\partial_t$ . Ultrastatische Raumzeiten sind stationär.

### II.4.2. Kosmologische Raumzeiten

Nach dem kosmologischen Prinzip, vgl. Seite 64, gibt es eine kosmologische Zeit  $t$  und die Flusslinien von  $\partial_t$  sind Geodätische (die fundamentalen Beobachter). Zusammen mit der Isotropie-Eigenschaft sieht eine kosmologische Raumzeit lokal aus, wie  $(I \times M, g)$  mit  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $(M, h)$  eine maximal symmetrische Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $g = -c_0 dt^2 + f(t)^2 h$  (mit  $c_0 > 0$ , da  $\partial_t$  zeitartig sein soll): Allgemein hat eine Metrik auf  $I \times M$ , mit  $\partial_t$  zeitartig, die Form

$$-c(t, x) dt^2 + a_i(t, x) (dt \otimes dx^i + dx^i \otimes dt) + h_t$$

## II.4. Kosmologie und Isometrien

mit  $h_t$  eine Einparameterfamilien von Metriken auf  $M$  und  $x = (x^1, \dots, x^m)$  lokale Koordinaten auf  $M^m$ . Da  $\{t\} \times M$  das Jetzt des Beobachters  $\partial_t$  sein soll, muss  $a_i(t, x) = 0$  sein. Da für jeden Beobachter  $\partial_t|_{(s,x) \in I \times M}$  das Jetzt\*  $\{s\} \times M$  homogen und isotrop sein soll, muss  $(M, h_s)$  eine maximal symmetrische Mannigfaltigkeit sein. Da die Skalar­krümmung von  $h_s$  sich mit  $s$  ändern kann, können wir  $h_s = f(s)^2 h$  setzen, wobei  $(M, h)$  maximal symmetrisch und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  glatt. Es bleiben also bis hier Metriken der Form  $-c(t, x)dt^2 + f(t)^2 h$ . Nun schauen wir noch, was uns die Information sagt, dass die Flusslinien von  $\partial_t$  Geodätische sind – also sollen  $\gamma_x(t) = (t, x)$  für alle  $x \in M$  Geodätische sind: Es ist  $\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2}c(t, x)^{-1}\partial_t c(t, x)$  und  $\Gamma_{tt}^i(t, x) = \frac{1}{2}f(t)^{-2}h^{ij}(x)\partial_j c(t, x)$  und damit

$$0 = \nabla_{\partial_t} \partial_t = \Gamma_{tt}^t \partial_t + \Gamma_{tt}^i \partial_{x^i} = \frac{1}{2}c(t, x)^{-1}\partial_t c(t, x)\partial_t + \frac{1}{2}f(t)^{-2}h^{ij}(x)\partial_j c(t, x)\partial_i$$

D.h. wir haben  $c(t, x) = c(x)$  und  $h^{ij}(x)\partial_j c(t, x) = 0$ , also  $c(t, x) = \text{const} = c_0$ .

Die Konstante  $c_0$  kann durch  $t \mapsto c_0^{\frac{1}{2}}t$  auf 1 skaliert werden.

**Definition II.4.27.** Eine *Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker-Raumzeit* (FLRW) ist ein verzerrtes Produkt  $(M = I \times N, g = -dt^2 + f(t)^2 h)$ , wobei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $(N, h)$  eine maximal symmetrische Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $f \in C^\infty(I, \mathbb{R}_{>0})$  ist.

Wir sammeln fürs weitere Vorgehen ein paar Krümmungsformeln für FLRW-Raumzeiten, die direkt nachgerechnet werden können, vgl. auch [13, S. 345]:

**Lemma II.4.28.** Sei  $(N^n, h)$  eine maximal symmetrische Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Skalar­krümmung  $K$  und  $(M = I \times N, g = -dt^2 + f(t)^2 h)$  für eine glatte Funktion  $f \in C^\infty(I, \mathbb{R}_{>0})$ . Wir setzen  $k = \frac{K}{n(n-1)}$ . Dann gilt für alle  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  mit  $g(\partial_t, X) = g(\partial_t, Y) = g(\partial_t, Z) = 0$

$$\begin{aligned} Ric(\partial_t, \partial_t) &= -3\frac{f''}{f} & Ric(\partial_t, X) &= 0 \\ Ric(X, Y) &= \left(2\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + 2\frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f}\right)g(X, Y) \\ scal &= 6\left(\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f}\right). \end{aligned}$$

---

\*Eigentlich ist das Jetzt eines einzelnen Beobachters nur lokal in der ART ein guter Begriff, da es mehrere räumliche (= induzierte Metrik ist Riemannsch) Untermannigfaltigkeiten in einem Punkt  $(t, x)$  mit Tangentialraum  $\partial_t^\perp$  gibt. Da wir aber durch jeden Punkt eine fundamentalen Beobachter haben mit einer globalen Zeit haben, kann  $\{s\} \times M$  als das Jetzt der Menge aller fundamentalen Beobachter zur Zeit  $s$  angesehen werden.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

Insgesamt haben wir somit für den Einsteintensor:

$$\begin{aligned} G(\partial_t, \partial_t) &= 3 \left( \left( \frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} \right) \\ G(\partial_t, X) &= 0 \\ G(X, Y) &= - \left( \left( \frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} + 2 \frac{f''}{f} \right) g(X, Y). \end{aligned}$$

### II.4.3. Materiemodell für perfekte Flüssigkeiten

Perfekte Flüssigkeit (keine Viskosität, kein Wärmeaustausch, nur Druck) – wir orientieren uns an Abschnitt II.2 über den Energie-Impuls-Tensor und wollen zuerst diesen für die SRT ableiten:

Die Flüssigkeit schauen wir uns in einem System an, wo die Flüssigkeit in Ruhe ist, also  $v = 0$  (die räumliche Geschwindigkeit, also  $V = \partial_t$  für den zugehörigen Vierervektor), weil die Geschwindigkeitsänderungen gemäß der relativistischen Dynamik geschehen muss und es sonst mühsamer ist aus dem Newtonschen Spannungstensor den SRT Energie-Impuls-Tensor zu machen. Weiter wird ein nichtviskosen Fluid betrachtet d.h. der Spannungstensor nimmt die Form  $\mathbf{pId}_{3 \times 3}$  an. Des Weiteren ist die Impulsdichte Null, da  $v = 0$  ist. Die Energiedichte wird im Ruhefall einfach durch die Masseverteilung  $\rho$  beschrieben. Wir haben also

$$T = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \mathbf{pId}_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

Das ist der Energie-Impulstensor bzgl. unseres festen Bezugssystems von oben, in dem  $V = \partial_t$  ist. Um den Energie-Impulstensor für ein beliebiges Strömungsvektorfeld  $V$  zu erhalten, müssen wir entsprechend Lorentz transformieren (analog zu ÜA 6) und erhalten als (0, 2)-Tensor:

$$T(X, Y) = (\rho + \mathbf{p})\eta(X, V)\eta(Y, V) + \mathbf{p}\eta(X, Y),$$

wobei  $V$  das Strömungsvektorfeld ist.

Test für den Fall oben (Beobachter= $V$ ):

$$\begin{aligned} T(Z, V) &= 0 \quad \text{falls } Z \in V^{\perp*} \\ T(V, V) &= (\rho + \mathbf{p}) - \mathbf{p} = \rho \\ T(Z, W) &= \mathbf{p}\eta(Z, W) \quad \text{falls } Z, W \in V^{\perp}. \end{aligned}$$

Wir nutzen das Korrespondenzprinzip, um aus dem obigen Energie-Impuls-Tensor für eine perfekte Flüssigkeit der SRT einen der ART zu machen:

**Definition II.4.29.** Der Energie-Impuls-Tensor für eine perfekte Flüssigkeit auf einer Lorentzmannigfaltigkeit  $(M, g)$  ist gegeben durch

$$T(X, Y) = (\rho + \mathfrak{p})g(X, V)g(Y, V) + \mathfrak{p}g(X, Y), \quad (\text{II.23})$$

wobei  $\mathfrak{p}$  den Druck und  $\rho$  die Energiedichte (beides i.A. eine Funktion auf  $M$ ) der perfekten Flüssigkeit repräsentieren.

**Bemerkung II.4.30.** Die Einsteingleichungen sind ein System von 10 partiellen Differentialgleichungen (für Raumzeiten der Dimension vier). Sie kodieren aber i.A. nicht, dass der Energie-Impuls-Tensor selbst einer Bewegungsgleichung gehören muss, die i.A. wieder von  $g$  abhängt. In einfachen Fällen bzw. für gewisse Näherungen reichen die Einsteingleichungen aus, z.B. für Vakuum ( $T = 0$ ) oder Staub (=perfekte Flüssigkeit mit  $\mathfrak{p} = 0$  (da entspräche die zusätzliche Bewegungsgleichung der Massenerhaltung und die ist schon in  $T$  eingebaut.)). Manchmal gibt es Näherungen/Modelle, wo man zwar zusätzliche Bewegungsgleichungen braucht, die aber in 'guter' Näherung nicht von  $g$  abhängen, z.B. erfüllen in einer perfekten Flüssigkeit  $\mathfrak{p}$  und  $\rho$  eine zusätzliche Bewegungsgleichung, die aber oft nur eine algebraische Gleichung in  $\mathfrak{p}$  und  $\rho$  ist.

Oft ist dies eine *polytrope Zustandsgleichung*  $\mathfrak{p} = c\rho^\varkappa$ ;  $c$  und  $\varkappa$  werden durch das Modell bestimmt. Hier ein paar Beispiele mit wenigen Stichworten:

- *isoterm* ( $\varkappa = 1$ ) – verwendet zu bestimmten Zeiten des Universums in der Kosmologie (nach der Inflation/vor der CMB-Entkopplung\*)
- *adiabatisch* ( $\varkappa$  geht mit den Freiheitsgraden) - z.B. verwendet für Sternenmodell mit einzelnen Teilchen  $\varkappa = \frac{5}{3}$
- *nichtrelativistisches Elektronengas*  $\varkappa = \frac{5}{3} \sim$  verwendet für quantenmechanisch entartete Gase/weiße Zwerge
- *ultrarelativistisches Gas*  $\varkappa = \frac{4}{3}$  - verwendet, wenn die Geschwindigkeit der Teilchen fast die Lichtgeschwindigkeit ist (z.B. späte Zustände von Sternenkollaps)

#### II.4.4. Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker

Jede FLRW-Raumzeit erfüllt die Einsteingleichungen für den Energie-Impuls-Tensor einer perfekten Flüssigkeit mit geeignetem  $\rho$ ,  $\mathfrak{p}$  und Strömungsvektorfeld  $V = \partial_t$ , also ist

$$T_{\alpha\beta} = \begin{cases} \rho & \alpha = \beta = t \\ \mathfrak{p}g_{\alpha\beta} & \alpha, \beta \neq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

---

\*[https://de.wikipedia.org/wiki/Kosmischer\\_Neutrinohintergrund#Anisotropien\\_in\\_der\\_kosmischen\\_Hintergrundstrahlung\\_und\\_Strukturbildung](https://de.wikipedia.org/wiki/Kosmischer_Neutrinohintergrund#Anisotropien_in_der_kosmischen_Hintergrundstrahlung_und_Strukturbildung)

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

Aus Lemma II.4.28 folgt

$$\begin{aligned}\rho &= 3 \left( \left( \frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} \right) - \Lambda \\ \mathfrak{p} &= - \left( 2 \frac{f''}{f} + \left( \frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} \right) + \Lambda.\end{aligned}\tag{II.24}$$

(Die erste Gleichung nennt man in diesem Rahmen *Energiegleichung* und die zweite *Bewegungsgleichung*.) Insbesondere hängt die Energiedichte und der Druck nur von  $t$  ab.

Wir sehen direkt: Erfüllt die FLRW-Raumzeit die Einsteingleichung mit  $\Lambda = 0$  für eine perfekte Flüssigkeit mit  $(\rho, \mathfrak{p})$ , dann auch die Einsteingleichung mit  $\Lambda = \Lambda_0$  für eine perfekte Flüssigkeit mit  $(\rho + \Lambda_0, \mathfrak{p} - \Lambda_0)$ .

Wir schauen uns hier einmal, dass Beispiel von Staub, d.h.  $\mathfrak{p} = 0$ , und  $\Lambda = 0$  an. In diesem Fall ist es die Masseerhaltung (das ist analog zur Kontinuitätsgleichung eine Differentialgleichung in  $\rho$ ) und schon in  $T$  eingebaut. Insgesamt gilt:

**Satz II.4.31.** *Im Fall  $\mathfrak{p} = 0$  und  $\Lambda = 0$  ist in der Robertson-Walker Raumzeit das Produkt  $C := \rho(t)f^3(t)$  konstant und es gilt die Friedmannsche Differentialgleichung*

$$(f')^2 + k = \frac{C}{3f}.$$

Insbesondere gibt es damit eine eindeutige Lösung der Friedmannschen Differentialgleichung bei gegebenen Anfangswerten  $\rho(t_0)$  und  $f(t_0)$ .

*Beweis.* Für  $\mathfrak{p} = 0$  und  $\Lambda = 0$  sind die Gleichungen (II.24)

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\rho f^2 &= (f')^2 + k \\ 0 &= 2 \frac{f''}{f} + \left( \frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2}\end{aligned}$$

Hiervon gibt die erste Gleichung direkt die Friedmanngleichung, sobald man weiß, dass  $\rho f^3$  konstant ist. Differentiation der ersten Gleichung ergibt:

$$\frac{1}{3}\rho' f^2 + \frac{2}{3}\rho f f' = 2f' f''.$$

Andererseits ist

$$2f f' f'' \stackrel{\text{Bwg.gl}}{=} -f^2 f' \left( \left( \frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} \right) = -(f')^3 - k f' \stackrel{\text{Ener.gl}}{=} -f' \frac{1}{3} \rho f^2$$

und ergibt zusammen mit der letzten Gleichung

$$0 = \rho' f^3 + 3\rho f^2 f' = (\rho f^3)'$$

und damit  $C := \rho f^3$  konstant. □

Allgemein sind die Gleichungen (II.24) äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \rho' &= -3\frac{f'}{f}(\rho + \mathfrak{p}) \\ \frac{f''}{f} &= -\frac{1}{3}(\rho + 3\mathfrak{p} - 2\Lambda) \end{aligned} \tag{II.25}$$

wovon die erste Gleichung auch aus thermodynamischen Überlegungen\* folgt (Im Staublell von oben ist das  $\rho f^3 = \text{konstant}$  und gleich der Massenerhaltung.) Die zweite Gleichung sagt aus, dass sowohl die Energiedichte  $\rho$  als auch der Druck  $\mathfrak{p}$  die Expansionsrate des Raumes, also  $f''$  verkleinert.

**Bemerkung II.4.32.** ('Astronomische Daten') Das momentane Standardmodell der Kosmologie ist das Lambda-CDM-Modell und benutzt eine FLRW-Metrik und die isotherme Zustandsgleichung.

Für Galaxien  $p, q \in N$  ist der Abstand zum Zeitpunkt  $t$  gleich  $f(t)d_N(p, q)$ . Diesen Abstand und seine zeitliche Änderung kann man messen und man kann die sogenannte Hubble-Konstante<sup>†</sup>  $H_0(t) := \frac{f'(t)}{f(t)}$  definieren. Der aktuelle Wert<sup>‡</sup> (Es gibt verschiedene Werte je nach Messmethode.) liegt bei ungefähr  $68 - 74 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}$ <sup>§</sup> (Also im Moment  $f' > 0$  - 'expandierendes Universum').

Der aktuelle Wert für die kosmologische Konstante  $\Lambda \sim 1,1 \cdot 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ .

Interpretation der kosmologischen Konstante: Energiedichte der Raumzeit bzw. Vakuumenergie. Es wird dunkle Energie genannt.<sup>¶</sup>

Der Wert von  $\Lambda$  sieht sehr klein aus – die Frage ist aber, wie sieht es im Vergleich zu  $\rho$  (oder  $\mathfrak{p}$ ) im Modell ist (da ja  $\Lambda$  einer Verschiebung der Dichte um  $\rho + \Lambda$  (bzw.  $\mathfrak{p} - \Lambda$ ) entspricht). Dazu muss man mit wieder alles mitnehmen, was man auf 1 gesetzt hat, also  $\rho$  mit  $\frac{\Delta c^2}{8\pi G}$  vergleichen. Und dann ist es gar nicht mehr klein:  $\rho$ , was zu sichtbarer (baryonischer) Materie, gehört, ist zum  $\Lambda$ -Anteil im Verhältnis 5 : 59 liegt. Dann gibt es noch den Anteil dunkler Materie<sup>||</sup>, der ist zum sichtbaren Anteil im Verhältnis 26 : 5 steht. ( $\mathfrak{p}$  ist wesentlich kleiner als  $\rho$ )

**Lemma II.4.33.** *Ist  $M = I \times_f N$ ,  $N$  maximal symmetrisch,  $t_0 \in I$ ,  $H_0(t_0) > 0$  eine Lösung der Einsteingleichung für eine perfekte Flüssigkeit mit  $\rho + 3\mathfrak{p} - 2\Lambda > 0$ , dann ist  $\inf I = t^*$  mit  $t_0 - H_0(t_0)^{-1} < t^* < t_0$  und entweder ist  $f' > 0$  oder  $I$  ist endliches Intervall.*

**Vorl. 16**

\*Diese Gleichung ist dann der erste Hauptsatz der Thermodynamik.

†die entgegen dem Namen zeitabhängig ist.

‡<https://de.wikipedia.org/wiki/Hubble-Konstante>

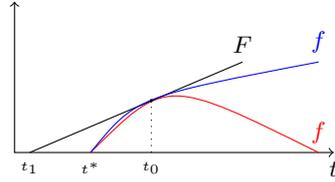
§Mpc=Megaparsec. 1 parsec ist die Entfernung, aus welcher der mittlere Erdbahnradius (= 1 AE, Astronomische Einheit), also der mittlere Abstand zwischen Sonne und Erde, unter einem Winkel von einer Bogensekunde erscheint und entspricht etwa 3,26 Lichtjahren bzw. 206000 Astronomischen Einheiten oder  $\sim 3,1 \cdot 10^{16}$  m.

¶[https://en.wikipedia.org/wiki/Dark\\_energy](https://en.wikipedia.org/wiki/Dark_energy)

||Das was man der sichtbaren Materie zuschlagen muss um auf realen Messungen zu kommen, z.B. von Gravitational Lensing und Galaxierotationen.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

*Beweis.* Aus (II.25) und  $\rho + 3p > 0$  folgt,  $f'' < 0$ . Demnach ist  $f(t) \leq F(t) := f(t_0) + \underbrace{H(t_0)f(t_0)}_{=f'(t_0)}(t - t_0)$ . Wegen  $H(t_0) > 0$ , ist die Nullstelle  $t_1 := t_0 - H_0(t_0)^{-1}$  von  $F(t)$



kleiner als  $t_0$ . Da (wegen  $f'' < 0$ )  $f(t) \leq F(t)$  auf  $I$  ist und  $f$  positiv ist, muss  $\inf I = t^*$  mit  $t_1 = t_0 - H_0(t_0)^{-1} < t^* < t_0$  sein.

Da  $f'' < 0$  ist, ist entweder  $f'$  immer positiv oder  $f$  nimmt für  $t_m$  sein Maximum und für  $t > t_m$  ist  $f'$  dann negativ. Dann kann wegen  $f'' < 0$   $f$  nur für ein endliches Intervall noch positiv sein.  $\square$

**Definition II.4.34.** Sei  $M = I \times_f N$ ,  $N$  maximal symmetrisch eine Lösung der Einsteingleichung für eine perfekte Flüssigkeit. Ist  $t_* = \inf I > -\infty$  mit  $f \rightarrow 0$  und  $f' \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow t_*$ , so nennt man  $t_*$  einen *Big Bang/Urknall*. Ist  $t^* = \sup I < \infty$  mit  $f \rightarrow 0$  und  $f' \rightarrow -\infty$  für  $t \rightarrow t^*$ , so nennt man  $t^*$  einen *Big Crunch*. Gilt  $\rho \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow t_*$ , nennt man  $t_*$  eine physikalische Singularität (analog bei  $t^*$ ).

**Lemma II.4.35.** Sei  $M = I \times_f N$ ,  $N$  maximal symmetrisch,  $I = (t_*, t^*)$  eine Lösung der Einsteingleichung für eine perfekte Flüssigkeit mit  $\Lambda = 0$ , so dass  $t_* = -\infty$  oder eine physikalische Singularität ist (analog für  $t^*$ ). Sei  $t_0 \in I$  mit  $H_0(t_0) > 0$ . Sei  $\rho > 0$  und es gebe Konstanten  $a, A$  mit  $-1/3 < a \leq \frac{p}{\rho} \leq A$ . Dann gilt

(i)  $t_*$  ist ein Big Bang.

(ii) Für  $\text{sec } g_N \leq 0$ , ist  $I = (t_*, \infty)$  mit  $f \rightarrow \infty$  und  $\rho \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

(iii) Für  $\text{sec } g_N > 0$ , dann ist  $t^*$  ein Big Crunch.

*Beweis.* ÜA 35  $\square$

### II.4.5. Zur Messungen der Hubble-Konstante – Rotverschiebung

Ein Beobachter (der Emmitter) sendet Licht in Richtung eines anderen Beobachter (dem Absorber). Der Emmitter misst die Wellenlänge des Lichts bei der Abstrahlung und der Absorber im Moment des Eintreffens. Im Allgemeinen sind diese beiden Messergebnisse verschieden. Dieser Effekt heißt (*gravitative*) *Rotverschiebung*.

#### II.4.5.1. Rotverschiebung in Minkowski (SRT)

Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur den zweidimensionalen Minkowskiraum: Sei  $\gamma_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma_1(s) = (s, 0 \in \mathbb{R}) \in \mathbb{R}^2$  der Emmitter. Der Beobachter  $\gamma_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  bewege sich mit konstanter räumlicher Geschwindigkeit  $v$ , also  $\gamma_2(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(\tau, v\tau) + \gamma_0$ .

Lichtartige Geodäten in  $\mathbb{R}^2$  haben die Form  $c(u) = c_0 + (u, \pm u)$  für ein  $c_0 \in \mathbb{R}^2$ . O.B.d.A. betrachten wir hier nur den  $+u$ -Fall. Wir suchen die Schar von lichtartigen Geodätischen  $c(s, u)$ , die in  $c(s, 0) = \gamma_1(s) = (s, 0)$  starten und später für ein  $u = u(s)$

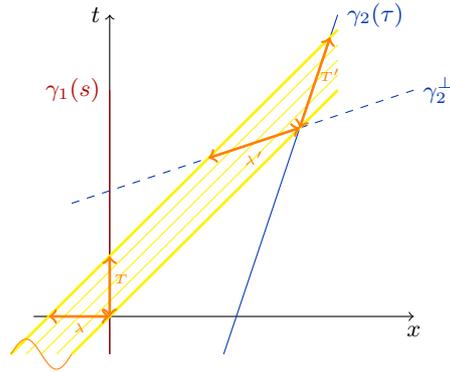


Abb. II.7.: Der Emitter  $\gamma_1$  sendet eine Welle mit Wellenlänge  $\lambda$ /Periodendauer  $T$  aus. Da hier  $c = 1$  gesetzt ist, ist  $T = \lambda$ . Die lichtartigen Geodäten sollen verschiedene Phasen der Welle kodieren (soll mit der orangenen Welle unten links verdeutlicht sein.).  $\gamma_2$  sieht dann in seiner Eigenzeit diese lichtartigen Geodäten vorbeikommen und misst so  $T'$  als Periodendauer. Die zugehörige Wellenlänge wird im Jetzt von  $\gamma_2$  gemessen und ist wegen  $c = 1$  auch wieder gleich  $T'$ .

in  $\gamma_2$  auftreten – also  $c(s, u(s)) = \gamma_2(\tau(s))$  für ein  $\tau: I_1 \rightarrow I_2$ . O.B.d.A. sei  $\tau(0) = 0$  – also  $\gamma_2(0) = (a, a)$  für ein  $a \in \mathbb{R}$ .

Es ist  $\lambda^2 = -\eta((0, \lambda), (0, \lambda))$  und  $(\lambda')^2 = -\eta(\gamma_2(\tau(\lambda)) - \gamma_0, \gamma_2(\tau(\lambda)) - \gamma_0) = \tau(\lambda)^2$ , vgl. Abb. II.7.

Um  $\tau(\lambda)$  zu berechnen, analysieren wir  $c(s, u(s)) = \gamma_2(\tau(s))$ . Daraus folgt

$$s + u(s) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\tau(s) + a$$

$$u(s) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}v\tau(s) + a.$$

Für  $s = \lambda$  ist damit  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1-v)\tau(\lambda)$ . Zusammen ergibt sich

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}.$$

#### II.4.5.2. Rotverschiebung in der ART – im Allgemeinen

Sei  $(M, g)$  eine Lorentzmannigfaltigkeit. Auch hier haben wir einen Emitter  $\gamma_1: I_1 \rightarrow M$  und einen Absorber  $\gamma_2: I_2 \rightarrow M$ . Sei  $c(s, u)$  eine Schar lichtartiger Geodätische mit  $c(s, 0) = \gamma_1(s)$  und  $c(s, u(s)) = \gamma_2(\tau(s))$  für geeignete  $u: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\tau: I_1 \rightarrow I_2$ . Wir können die lichtartigen Geodätischen immer affin umparametrisieren, so dass  $u(s) = 1$  für alle  $s \in I_1$  ist. Weiterhin sei  $\tau(0) = 0$ . Damit haben wir insgesamt eine Variation

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

lichtartiger Geodätischer  $c: I_1 \times [0, 1] \rightarrow M$ . Das zugehörige Variationsvektorfeld (ein Jacobifeld) ist  $J(u) = \frac{d}{ds}|_{s=0} c(s, u)$ . Nach Konstruktion ist  $J(0) = \gamma'_1(0)$  und  $J(1) = \gamma'_2(\tau(0))\tau'(0) \parallel \gamma'_2(0)$ .

$\gamma_1$  messe in  $p:=\gamma_1(0)$  die Wellenlänge des Lichtes. Für kleine Wellenlänge (also hohen Frequenzen) führt  $\gamma_1$  diese Messung im Limes im Tangentialraum in  $p$  aus – analog wie in der SRT. Dann ist die Periodendauer  $T$  in  $p$  proportional zu  $\gamma'_1(0)$ . Analog die Periodendauer  $T'$  in  $q:=c(0, 1) = \gamma_2(0)$ . Damit ist

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \frac{g_q(J(1), J(1))}{g_p(\gamma'_1(0), \gamma'_1(0))}.$$

Wenn  $\lambda$  klein genug ist, damit wir als Messung im Tangentialraum arbeiten können, ist  $\lambda/T$  ungefähr konstant (nah genug in der Umgebung eines Punkt sieht alles flach, und in geeigneten Koordinaten fast ultrastatisch aus). Also ist

$$\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 = \frac{g_q(J(1), J(1))}{g_p(\gamma'_1(0), \gamma'_1(0))}.$$

### II.4.5.3. Rotverschiebung in Schwarzschild

Rotverschiebung gehört zu den klassischen Tests der ART:

Wir betrachten hier den Spezialfall, dass der Emmitter sich entlang  $\gamma_1(s) = (s, r_1, \varphi_0, \theta_0)$  und der Absorber sich entlang  $\gamma_2(\tau) = (\tau, r_2, \varphi_0, \theta_0)$  bewegt.

Nach (II.20) gilt für die Spur lichtartiger Geodätischer  $t(r) = \pm r_*(r) + t_0 = \pm(r + r_S \ln|\frac{r}{r_S} - 1|) + t_0$ . Damit ist  $c(s, u) = (r_*(r(u)) - r_*(r_1) + s, r(u), \varphi_0, \theta_0)$  mit  $r(0) = r_1$ . Dann ist  $J(u) = (1, 0, 0, 0)$  und damit

$$\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 = \frac{g_{c(s,1)=(\tau(s), r_2, \varphi_0, \theta_0)}(J(1), J(1))}{g_{\gamma_1(0)}(\gamma'_1(0), \gamma'_1(0))} = \frac{1 - \frac{r_S}{r_2}}{1 - \frac{r_S}{r_1}}.$$

### II.4.5.4. Rotverschiebung in ultrastatischen Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten eine ultrastatische Mannigfaltigkeit:  $(M = I \times N, g = -dt^2 + h)$ , wobei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall ist und  $(N, h)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Nach ÜA 10.b(ii) hat eine lichtartige Geodätische in  $M$  die Form  $c(u) = (au + b, \tilde{c}(u))$  mit  $\tilde{c}$  Geodätische in  $(N, h)$  mit  $h(\dot{\tilde{c}}, \dot{\tilde{c}}) = a^2$  und  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Sei  $\gamma_1(s)$  der Emmitter und  $\gamma_2(\tau)$  der Beobachter. Die Schar lichtartiger Geodätischer, die vom Emmitter ausgesendet wird, hat dann die Form

$$c(s, u) = (a(s)u + b(s), \tilde{c}_s(u))$$

für eine Schar  $\tilde{c}_s$  Geodätischer in  $(N, h)$  und so dass  $\gamma_1(s) = c(s, 0) = (b(s), \tilde{c}_s(0))$  ist und  $\gamma_2(\tau(s)) = c(s, u(s))$  gilt für geeignete Funktionen  $\tau(s)$  und  $u(s)$ .

Nehmen wir o.B.d.A. an, dass  $\tilde{c}(s)$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, also  $h(\dot{\tilde{c}}_s, \dot{\tilde{c}}_s) = 1$  ist, dann ist  $a(s) = 1$ . Insbesondere ist dann

$$J(u) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} c(s, u) = (b'(s), \underbrace{\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \tilde{c}_s}_{=: \tilde{J}(u)})$$

und somit

$$\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 = \frac{g_{\gamma_2(u(0))}(J(u(0)), J(u(0)))}{g_{\gamma_1(0)}(J(0), J(0))} = \frac{-b'(0)^2 + h_{\tilde{c}_0(u(0))}(\tilde{J}(u(0)), \tilde{J}(u(0)))}{-b'(0)^2 + h_{\tilde{c}_0(0)}(\tilde{J}(0), \tilde{J}(0))}.$$

Die Rotverschiebung kommt hier nur daher, dass sich Emittent und Beobachter bewegen. Sind beide in Ruhe und der Emittent sendet das Licht immer in gleiche räumliche Richtung ab, ist  $\lambda = \lambda'$ .

#### II.4.5.5. Rotverschiebung für konform äquivalente Metriken

**Definition II.4.36.** Sei  $(M, g)$  eine Lorentzsche oder Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\mu \in C^\infty(M, \mathbb{R}_{>0})$ . Die Metrik  $\tilde{g} = \mu^2 g$  (also  $\tilde{g}_p(X, Y) = \mu^2(p)g_p(X, Y)$  für alle  $p \in M$  und  $X, Y \in T_p M$ ) heißt zu  $g$  *konforme Metrik* und  $\mu$  heißt *konformer Faktor*.

**Lemma II.4.37.** Sei  $\nabla$  bzw.  $\tilde{\nabla}$  der Levi-Civita Zusammenhang zu  $(M, g)$  bzw.  $(M, \tilde{g})$ . Dann gilt

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \frac{Y(\mu)}{\mu} X + \frac{X(\mu)}{\mu} Y - \frac{\text{grad}_g \mu}{\mu} g(X, Y) \quad (\text{II.26})$$

für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

*Beweis.* Es reicht die Identität lokal nachzurechnen. Dazu seien  $x^\alpha$  lokale Koordinaten. Seien  $\Gamma$  bzw.  $\tilde{\Gamma}$  die Christoffelsymbole zu  $g$  bzw.  $\tilde{g}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma &= \frac{1}{2} \mu^{-2} g^{\gamma\delta} ((\mu^2 g_{\alpha\delta})_{,\beta} + (\mu^2 g_{\beta\delta})_{,\alpha} - (\mu^2 g_{\alpha\beta})_{,\delta}) \\ &= \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \mu^{-1} (\mu_{,\beta} \delta_\alpha^\gamma + \mu_{,\alpha} \delta_\beta^\gamma - \underbrace{\mu_{,\delta} g^{\gamma\delta}}_{=(\text{grad}_g \mu)^\gamma \text{ wegen (II.7)}} g_{\alpha\beta}). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = X^\alpha Y^\beta (\tilde{\nabla}_\alpha \partial_\beta - \nabla_\alpha \partial_\beta)^* = \frac{Y(\mu)}{\mu} X + \frac{X(\mu)}{\mu} Y - \frac{\text{grad}_g \mu}{\mu} g(X, Y). \quad \square$$

---

\*Das ist auch die Rechnung, die zeigt, dass die Differenz zweier affiner Zusammenhänge (d.h. man fordert nur Eigenschaft (i)-(iii) in Lemma II.1.10) einer Mannigfaltigkeit, immer ein  $(0, 2)$ -Tensor ist.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

**Lemma II.4.38.** Sei  $c$  eine lichtartige Geodätische einer Lorentzmannigfaltigkeit  $(M, g)$ . Dann ist die Spur von  $c$  auch die Spur einer lichtartigen Geodätischen für  $(M, \tilde{g} = \mu^2 g)$  und  $\tilde{c}(s) = c(\psi(s))$  mit  $\psi'(s) = (\mu(c(\psi(s))))^{-2}$  ist eine lichtartige Geodätische für  $\tilde{g}$ .

Für letztes Lemma ist wichtig, dass  $c$  lichtartig ist!

*Beweis.* Sei  $c$  lichtartige Geodätische für  $(M, g)$ . Dann ist

$$\tilde{\nabla}_{c'} c' = \nabla_{c'} c' + \frac{2c'(\mu)}{\mu} c' - \frac{\text{grad}_g \mu}{\mu} \underbrace{g(c', c')}_{=0} = \frac{2c'(\mu)}{\mu} c' \parallel c'.$$

Damit ist  $c$  das Bild einer Geodätischen in  $(M, \tilde{g})$ : Um das zu sehen, suchen wir eine geeignete Umparametrisierung  $\tilde{c}(u) = c(\psi(u))$ , so dass  $\tilde{c}$  eine Geodätische ist:  $\tilde{c}'(u) = c'(\psi(u))\psi'(u)$  und

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{c}'} \tilde{c}' = \tilde{\nabla}_{\psi' c'} (\psi' c') = (\psi')^2 \tilde{\nabla}_{c'} c' + \psi'' c' = \left( (\psi')^2 \frac{2d_{c'} \mu}{\mu} + \psi'' \right) c'.$$

Setzen wir  $\psi'(s) = (\mu(c(\psi(s))))^{-2}$ , dann ist  $\psi'' = -2\mu^{-3} c'(\mu)$  und somit  $(\psi')^2 + \psi'' \frac{2d_{c'} \mu}{\mu} = 0$  und damit  $\tilde{\nabla}_{\tilde{c}'} \tilde{c}' = 0$ .  $\square$

Vorl. 17

**Folgerung II.4.39.** Seien  $\gamma_i: I_i \rightarrow M$  Emitter und Absorber. Eine lichtartige Geodätische, die in  $p = \gamma_1(0)$  starte komme in  $q = \gamma_2(0)$  an. Sei  $r$  die zugehörige Rotverschiebung bzgl.  $(M, g)$  und  $r'$  die bzgl.  $(M, \tilde{g} = \mu^2 g)$ . Dann gilt  $r' = r \frac{\mu(q)}{\mu(p)}$ .

*Beweis.* Da sich nach letztem Lemma, die Spuren der lichtartigen Geodätischen nicht ändern, misst man in  $p$  und  $q$  jeweils den gleichen Jacobivektor bzgl. beider Metriken. Nur die Länge dieser Vektoren ändert sich und zwar mit dem konformen Faktor  $\mu$  an dem jeweiligen Punkt.  $\square$

### II.4.5.6. Rotverschiebung für FLRW

Wir betrachten  $(M = I \times N, -dt^2 + f(t)^2 h)$  mit  $(N, h)$  maximal symmetrische Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir wollen die Rotverschiebung hier auf die Rotverschiebung in ultrastatischen Mannigfaltigkeiten zurückführen. Dazu wollen wir schreiben:

$$-dt^2 + f(t)^2 h = a(\tau)^2 (-d\tau^2 + h).$$

Dafür muss  $dt = a(\tau) d\tau$  und  $f(t) = a(\tau)$  und wir können  $\tau(t) = \int_{t_0}^t f(u)^{-1} du$  wählen. Damit haben wir die Metrik als zu einer ultrastatischen konform äquivalenten Metrik geschrieben.

Für den Spezialfall, dass  $\gamma_i(s) = (s, n_i)$  für  $n_i \in N$  fest, gibt es für den ultrastatischen Anteil  $-d\tau^2 + h$  keine Rotverschiebung und damit ist die resultierende Rotverschiebung für FLRW nur durch den Quotienten der jeweiligen  $a$  Faktoren gegeben.

D.h. mit gravitativer Rotverschiebung kann man in FLRW  $f$  zu messen und damit die Hubble-Konstante.

### II.4.6. Andere kosmologische Modelle

Wir schauen uns nun noch andere (weniger verbreitete) kosmologische Modelle an, bei denen wir nicht mehr fordern, dass die Mannigfaltigkeit homogen und isotrop in allen Punkten sein soll.

Dazu schauen wir uns als Beispiel Mannigfaltigkeiten an, die zwar noch homogen in allen Punkten sind, aber nicht mehr zwingend isotrop sind.

Aus der Homogenität (vgl. Definition II.4.20) folgt, dass die Liealgebra der Killingvektorfelder mindestens  $n$ -dimensional ist. Die Mannigfaltigkeit ist dann lokal durch die Liealgebra bestimmt. Die Liealgebren sind klassifiziert – Bianchi-Klassifikation. Die zugehörigen Raumzeiten nennt man Bianchi-Raumzeiten (also  $M = I \times N$ ,  $-dt^2 + h_t$  und  $(N, h_t)$  sei für alle  $t$  homogen). Es gibt konkrete Modelle dafür, für die man dann Geodätische etc. diskutieren kann. Wir schauen uns hier ein einfaches Beispiel an:

**Beispiel II.4.40** (Kasner Raumzeit). Die Raumzeit  $(\mathbb{R}^4, g = -dt^2 + t^{2p_1} dx^2 + t^{2p_2} dy^2 + t^{2p_3} dz^2)$  ist eine Lösung der Vakuumeinsteingleichungen (für  $\Lambda = 0$ ), falls  $p_1 + p_2 + p_3 = (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 = 1$  ist. Hier ist  $t$  noch immer eine kosmische Zeit und die induzierte Riemannsche Metrik auf  $\{t = \text{konstant}\}$  ist homogen in allen Punkten, aber nicht isotrop. Die Anisotropie ändert sich auch mit der Zeit  $t$ .

Alternativ könnte man für die Mannigfaltigkeit auch nur fordern, dass sie in allen Punkten isotrop ist. Doch daraus folgt schon, dass die Mannigfaltigkeit homogen in allen Punkten ist.

## II.5. Kausalität

Bei Kausalität geht es um die Frage, welche Punkte der Raumzeit/Lorentzmannigfaltigkeit durch kausale Kurve verbunden werden können. Eine Kurve  $\gamma: I \rightarrow M$  heißt dabei *kausal*, wenn  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \leq 0$  ist, also in jedem Punkt zeit- oder lichtartig ist. D.h. Ereignisse an den Endpunkten dieser Kurve können sich gegenseitig beeinflussen.

### II.5.1. Allgemeines zu Topologie

Bei unserer Definition von Mannigfaltigkeiten  $M$  haben wir bis jetzt noch nicht explizit, was zur Topologie gesagt.  $M$  erbt im Prinzip die offene Menge vom  $\mathbb{R}^m$  durch die Karten. D.h. Eine Teilmenge  $U \subset M$  heiße *offen*, wenn es Karten  $\kappa_i$  gibt, so dass  $U = \bigcup_i \kappa_i^{-1}(V_i \subset \mathbb{R}^m)$  für  $V_i \subset \mathbb{R}^m$  offen. Mit diesen offenen Mengen wird  $M$  zu einem *topologischen Raum* und die Menge der offenen Mengen von  $M$  zur *Topologie* von  $M$ .\*

Unsere Definition von Mannigfaltigkeit impliziert, dass  $M$  *parakompakt* ist [9, Thm. 1.15], d.h. jede offene Überdeckung hat eine lokal endliche Verfeinerung. (Also: Sei  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$

---

\*I.A. ist eine Topologie auf einer Menge  $A$  eine Teilmenge  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(A)$  der Potenzmenge von  $A$  mit:  $\emptyset, A \in \mathcal{T}$ , beliebige Vereinigung von Elementen in  $\mathcal{T}$  sind wieder in der Topologie, sowie auch endliche Durchschnitte.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

eine offene Überdeckung von  $M$ . Dann gibt es eine offene Überdeckung  $\{V_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$  mit  $V_\beta \subset U_{\alpha(\beta)}$  für alle  $\beta \in \mathcal{B}$  und geeigneten  $\alpha(\beta)$  und so dass für jeden Punkt  $p \in M$  die Anzahl der  $\beta \in \mathcal{B}$  mit  $p \in V_\beta$  endlich ist.)

Ein wichtiges Feature eines parakompakten Raumes  $X$  ist, dass jede offene Überdeckung  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  dann untergeordnete Zerlegung der Eins besitzen, d.h. es gibt Funktionen  $\rho_\alpha \in C^0(X)$  mit  $\text{supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha$ ,  $\rho_\alpha \geq 0$  und  $\sum_\alpha \rho_\alpha = 1$  (Summe lokal endlich). Im Falle einer glatten Mannigfaltigkeit können die  $\rho_\alpha$  auch glatt gewählt werden [9, Thm. 2.23].

### II.5.2. Grundlegende Begriffe

**Definition II.5.1.** Sei  $(M, g)$  eine Lorentzmannigfaltigkeit. Wir nennen  $(M, g)$  *zeitorientierbar*, falls es ein zeitartiges Vektorfeldes auf  $(M, g)$  gibt. Zwei zeitartige Vektorfelder  $X, Y$  seien *zeitorientierungsäquivalent*, falls  $g(X, Y) < 0$  ist. Eine *Zeitorientierung* auf  $(M, g)$  ist, die Äquivalenzklasse zeitorientierungsäquivalenter zeitartiger Vektorfelder.

**Beispiel II.5.2.** In Minkowski sind  $\partial_t, \partial_t + \frac{1}{2}\partial_x$  und  $-\partial_t + \frac{1}{3}\partial_y$ , jeweils zeitartige Vektorfelder. Die ersten beiden sind zeitorientierungsäquivalent und gehören somit zur gleichen Zeitorientierung. Das dritte definiert eine andere Zeitorientierung.

**Lemma II.5.3.** *Zeitorientierbar ist äquivalent zu: Man hat eine stetige Abbildung, die jedem Punkt  $p \in M$  einem halben offenen Lichtkegel  $\xi(p)$  in  $p$  zuordnet, also einer der beiden Zusammenhangskomponenten von  $\{v \in T_p M \mid g_p(v, v) < 0\} \subset T_p M$ . Stetig soll hierbei heißen: Um jedes  $p \in M$  gibt es lokale Koordinaten  $x^\alpha$  auf offener Umgebung  $U$  um  $p$ , so dass  $\frac{\partial}{\partial x^0}|_q \in \xi(q)$  für alle  $q \in U$  ist.*

*Beweis.* Hat man ein zeitartiges Vektorfeld  $X$ , dann definiert man  $\xi(p)$  als die Zusammenhangskomponente von  $\{v \in T_p M \mid g_p(v, v) < 0\} \subset T_p M$ , die  $X(p)$  enthält. Diese Abbildung ist dann stetig im obigen Sinne: Sei  $p \in M$ . Wir wählen lokale Koordinaten  $x^\alpha$  mit  $\frac{\partial}{\partial x^0}|_p \in \xi(p)$ . Damit ist dann  $g_p(X(p), \frac{\partial}{\partial x^0}|_p) < 0$ . Durch Verkleinern der Karte um  $p$  kann dann  $g(X, \frac{\partial}{\partial x^0}) < 0$  auf der ganzen Karte erreicht werden.

Gibt es andererseits eine solche stetige Abbildung  $p \mapsto \xi(p)$ . Dann gibt es um jeden Punkt  $p$  eine Karte  $\kappa_p: U_p \rightarrow V_p \subset \mathbb{R}^n$  und lokale Koordinaten  $x_p^\alpha$  mit der geforderten Eigenschaft. Die  $\{U_p\}_p$  bilden eine offene Überdeckung von  $M$ . Wie oben bemerkt, gibt es dann immer eine lokal endliche Teilüberdeckung  $\{U_{p_\gamma}\}_\gamma$  und eine zugehörige Zerlegung der Eins  $\rho_\gamma$ . Wir setzen  $X = \sum_\gamma \rho_\gamma \frac{\partial}{\partial x^0}$ . Da die Überdeckung lokal endlich ist, ist in jedem Punkt diese Summe endlich. Also ist  $X$  ein wohl-definiertes glattes Vektorfeld. Da man direkt nachrechnen kann das jede Zusammenhangskomponente von  $\{v \in T_p M \mid g_p(v, v) < 0\} \subset T_p M$  konvex ist, ist auch  $X(p) \in \xi(p)$  und damit insbesondere zeitartig.  $\square$

**Bemerkung II.5.4.** Zeitorientierbarkeit ist vom Begriff der Orientierbarkeit zu unterscheiden: Eine Mannigfaltigkeit  $M^m$  heißt *orientierbar*, falls es  $m$  Vektorfelder gibt, die in jedem Punkt  $p \in M$  der Mannigfaltigkeit eine Basis von  $T_p M$  bilden. Während orientierbar nur von  $M$  abhängt, hängt zeitorientierbar von  $M$  und der Metrik  $g$  ab. Für ein Beispiel siehe Abbildung II.8.

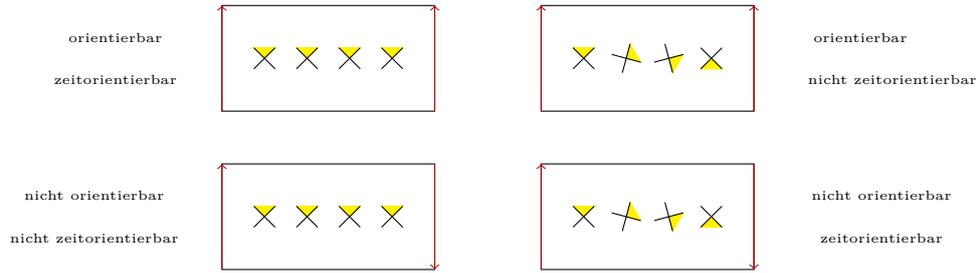


Abb. II.8.: Wir wählen auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (Koordinaten  $(t, \varphi)$ ) eine Lorentzmetrik, die in  $t$ -Richtung konstant und in  $\varphi$ -Richtung periodisch ist (Periode  $2\pi$ ). Die Metrik induziert wegen der (Anti-)Periodizität sowohl auf dem Zylinder mit Umfang  $2\pi$  als auch dem zugehörigen Möbiusband eine Lorentzmetrik. Links ist jeweils mit Metrik  $-dt^2 + d\varphi^2$  und rechts mit  $-\cos \varphi dt^2 + \cos \varphi d\varphi^2 - \sin \varphi(dt \otimes d\varphi + d\varphi \otimes dt)$  (Das ist die andere Metrik nur mit  $\varphi$  mitgedreht.). Um zu sehen, ob es eine Zeitorientierung gibt, starten wir mit der Wahl eines halben Lichtkegels in einem Punkt und versehen dies stetig auf den ganzen Zylinders das Möbiusband fortzusetzen. Auf den Rechtecken ist das kein Problem (Bei der rechten Metrik z.B.  $\cos \frac{\varphi}{2} \partial_t + \sin \frac{\varphi}{2} \partial_\varphi$ ). Aber die Frage ist, ob es beim Zusammenkleben zum Zylinder/Möbiusband (Richtung des Klebens ist durch die roten Pfeile symbolisiert). Man sieht nur oben links und unten rechts erhält man eine gesamte Zeitorientierung.

Eine *zeitorientierte* Lorentzmannigfaltigkeit ist eine zeitorientierbare Lorentzmannigfaltigkeit mit gewählter Zeitorientierung.

Wir betrachten im Folgenden zusammenhängende zeitorientierte Lorentzmannigfaltigkeit. Die Zeitorientierung sei durch das zeitartige Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  definiert.

**Definition II.5.5.** Ein Kurve  $\gamma: I \rightarrow M$  heißt *zukunftsgerichtet* (bzw. *vergangenheitsgerichtet*), falls  $g(X(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s)) < 0$  (bzw.  $> 0$ ) für alle  $s \in I$  gilt. Seien  $p, q \in M$ . Dann schreiben wir  $p \ll q$ , falls es eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve von  $p$  nach  $q$  gibt. Wir schreiben  $p < q$ , falls es eine zukunftsgerichtete kausale Kurve von  $p$  nach  $q$  gibt. Weiterhin sei  $p \leq q$ , falls  $p < q$  oder  $p = q$  gilt.

Für  $A \subset M$  sei

$$I_+(A) := \{q \in M \mid \exists p \in A : p \ll q\} \text{ die chronologische Zukunft von } A$$

$$J_+(A) := \{q \in M \mid \exists p \in A : p \leq q\} \text{ die kausale Zukunft von } A.$$

Analog sei  $I_-(A)$  ( $J_-(A)$ ) die chronologische (kausale) Vergangenheit von  $A$ . Wir setzen  $I_\pm(p) := I_\pm(\{p\})$  und  $J_\pm(p) := J_\pm(\{p\})$ .

**Bemerkung II.5.6.** Es ist  $I_\pm(A) = \cup_{p \in A} I_\pm(p)$  und  $J_\pm(A) = \cup_{p \in A} J_\pm(p)$ .

II. Allgemeine Relativitätstheorie

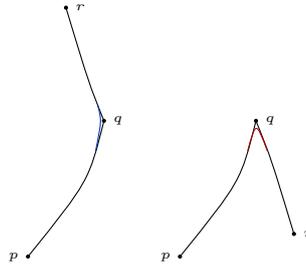


Abb. II.9.: Hat man eine stückweise glatte zeitartige Funktion, jedes Stück zukunftsgerichtet, dann kann man diese immer derart 'ausglätten', dass eine glatte zeitartige zukunftsgerichtete Kurve entsteht. Insbesondere ist damit  $\ll$  eine transitive Relation.

Beweisen wir hier nicht: Der Hauptgrund, warum das funktioniert ist, dass der zukunftsgerichtete innere Teil des Lichtkegels konvex ist. Das stimmt alles nicht mehr, wenn wir das zukunftsgerichtet in der Behauptung weglassen (s. rechtes Bild).

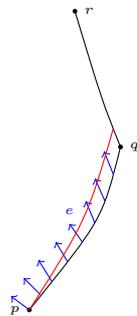
Vorl. 18

**Beispiel II.5.7.** Es gibt selbst für  $(M, g)$  zeitorientiert und  $q \in I_+(p)$  i.A. auch raumartig glatte Kurven von  $p$  nach  $q$ :

Es gibt zwischen je zwei Punkten im Minkowskiraum der Dimension  $\geq 3$  immer eine glatte raumartige Kurve (man kann spiralförmige Kurven von  $p$  nach  $q$  mit beliebig kleinen Anstieg finden und wenn der Anstieg klein genug ist, ist die Kurve raumartig).

**Satz II.5.8.** Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentzmannigfaltigkeit. Seien  $p, q, r \in M$ . Es gelte  $p \ll q, q \leq r$  oder  $p \leq q, q \ll r$ . Dann folgt  $p \ll r$ .

*Beweis.* Sei  $p \leq q, q \ll r$  (der andere Fall geht analog). Falls  $p = q$ , ist  $p \ll r$  klar. Wir betrachten  $p < q$ . Dann gibt es eine kausale zukunftsgerichtete Kurve  $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow M$  von  $p$  nach  $q$  und eine zeitartige zukunftsgerichtete Kurve  $\gamma_2: [1, 2] \rightarrow M$  von  $q$  nach  $r$ .



Es reicht sich zu überlegen, dass es eine stückweise glatte zukunftsgerichtete zeitartige Kurve von  $p$  nach  $r$  gibt, vgl. Abbildung II.9. Dazu sei  $e(t)$  das parallele Vektorfeld längs  $\gamma_1$  mit  $e(1) = \gamma_2'(1)$ , vgl. ÜA 29. Sei  $\gamma_1(s, t)$  eine Variation von  $\gamma_1$  mit  $\gamma_1(s, 0) = p$ ,  $\gamma_1(0, t) = \gamma_1(t)$  und  $\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} \gamma_1(s, t) = te(t)$ . Wegen  $e(1) = \gamma_2'(1)$  kann man die Variation so wählen, dass  $\gamma_1(s, 1) = \gamma_2(1 + s)$  gilt.

Nach Voraussetzung ist  $g(\partial_t \gamma_1(0, t), \partial_t \gamma_1(0, t)) \leq 0$  und wir haben

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} g(\partial_t \gamma_1, \partial_t \gamma_1) &= 2g(\nabla_{\partial_s \gamma_1} \partial_t \gamma_1, \partial_t \gamma_1) \Big|_{s=0} = 2g(\nabla_{\partial_t \gamma_1} \partial_s \gamma_1, \partial_t \gamma_1) \Big|_{s=0} \\ &= 2g(\nabla_{\partial_t \gamma_1} (te(t)), \partial_t \gamma_1(0, t)) = 2g(e(t), \partial_t \gamma_1(0, t)) < 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt, da sowohl  $\gamma_1(t)$  als auch  $e(t)$  zukunftsgerichtet und zeitartig sind. Also gibt es ein  $\epsilon > 0$  mit  $g(\partial_t \gamma_1(s, t), \partial_t \gamma_1(s, t)) < 0$  für alle  $s \in (0, \epsilon)$  und  $t \in [0, 1]$ .

Damit ist für jedes  $s \in (0, \epsilon)$  die Kurve  $c: [0, 2 - s] \rightarrow M$  mit  $c|_{[0,1]} = \gamma_1(\cdot, s)$  und  $c|_{[1,2-s]} = \gamma_2(\cdot + s)$  zeitartig.  $\square$

Im Folgenden wollen wir den folgenden Satz

**Satz II.5.9.** Sei  $(M, g)$  eine Lorentzmannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Dann gibt es eine Umgebung  $U$  von  $p$ , so dass  $g|_U$  zeitorientierbar ist und  $U$  eine konvexe Normalenumgebung von  $p$  ist, d.h. für alle  $q, r \in U$  gibt es eine eindeutige Geodätische  $\gamma$  von  $q$  nach  $r$ , die vollständig in  $U$  verläuft. Außerdem besteht für solch ein  $U$  die Menge  $I_+(p)^U$  aus allen Punkten in  $U$ , die durch zukunftsgerichtete zeitartige Geodätische von  $p$  aus erreicht werden können. Hierbei bezeichnet  $I_+(p)^U$  die chronologische Zukunft von  $p$  in der Lorentzmannigfaltigkeit  $(U, g|_U)^*$ . Die analoge Aussage gilt dann auch für  $J_+(p)^U$  und  $J_+(p)^U \setminus I_+(p)^U$ .

beweisen. Doch dazu benötigen wir zunächst ein paar technische Vorarbeiten:

**Bemerkung II.5.10.** Sei  $(M, g)$  Riemannsche oder Lorentzmannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ . Für  $v \in T_p M$  bezeichnen wir mit  $c_v$  die eindeutig bestimmte Geodäte mit  $c_v(0) = p$  und  $\dot{c}_v(0) = v$ . Dann gilt  $c_{\alpha v}(t) = c_v(\alpha t)$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$ : Da  $c_{\alpha v}(0) = c_v(0) = p$  und  $\dot{c}_{\alpha v}(0) = \alpha \dot{c}_v(0) = \alpha v$  ist, reicht es zu zeigen, dass  $\bar{c} := c_{\alpha v}$  wieder eine Geodätische ist:

$$\nabla_{\dot{\bar{c}}(t)} \bar{c}(t) = \nabla_{\alpha \dot{c}_v(\alpha t)} \alpha \dot{c}_v(\alpha t) = \alpha^2 (\nabla_{\dot{c}_v} \dot{c}_v)(\alpha t) = 0.$$

**Definition II.5.11.** Die Exponentialabbildung  $\exp_p: D_p \subset T_p M \rightarrow M$  ist definiert als  $\exp_p(v) = c_v(1)$ , wobei  $D_p := \{v \in T_p M \mid 1 \text{ ist im maximalen Definitionsbereich von } c_v\}$ .

**Bemerkung II.5.12.**

- (i)  $\exp_p(0) = p$
- (ii)  $\exp_p(tv) = c_{tv}(1) = c_v(t)$ . Damit ist  $D_p$  sternförmig bezüglich 0.
- (iii) Das Differential  $d_0 \exp_p: T_0 D_p = T_0 T_p M \rightarrow T_p M$  ist die Identität, sofern wir  $T_0 T_p M \cong T_p M$  identifizieren:

$$d_0 \exp_p(v) = d_0 \exp_p \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (tv) \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_p(tv) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} c_v(t) = v.$$

- (iv) Die Exponentialabbildung ist glatt. Das folgt aus der glatten Abhängigkeit der Lösung der Geodätengleichung von den Anfangswerten,  $\square$ .

**Folgerung II.5.13.** Zu  $p \in M$  existiert eine offene Umgebung  $\mathcal{V}_p \subset D_p \subset T_p M$  von 0, so dass  $\exp_p: \mathcal{V}_p \rightarrow \exp_p(\mathcal{V}_p) =: U_p$  ein Diffeomorphismus ist.

\*I.A. gilt nicht  $I_+(p)^U = I_+(p) \cap U$ , vgl. ÜA 39.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

*Beweis.* Folgt aus der letzten Bemerkung und dem Umkehrsatz (angewendet auf  $\exp_p$  in lokalen Koordinaten ausgedrückt).  $\square$

Die letzte Folgerung impliziert insbesondere, dass für alle  $x \in U_p$  die Geodätische von  $p$  nach  $x$ , die in  $U_p$  liegt, eindeutig bestimmt ist, da sonst die  $\exp_p$ -Abbildung auf  $\mathcal{V}_p$  kein Diffeomorphismus sein kann.

**Folgerung II.5.14.** Für  $(M, g)$  Lorentzmannigfaltigkeit und  $U_p$  wie oben, ist  $(U_p, g|_{U_p})$  zeitorientierbar.

*Beweis.* Sei  $v \in T_p M$  zeitartig. Wir setzen  $X: x \in U_p \mapsto X(x) \in T_x M$ , wobei  $X(x)$  der Paralleltransport von  $v$  entlang der (in  $U_p$ ) eindeutig bestimmten Geodätischen von  $p$  nach  $x$  ist. Dass  $X$  zeitartiges nirgends verschwindendes Vektorfeld ist, folgt dann aus den Eigenschaften des Paralleltransports, vgl. ÜA 29.  $\square$

Nun wollen wir mit Hilfe der Exponentialabbildung 'gute' Koordinaten in der Umgebung von  $p$  wählen. Wir wählen ein Orthonormalsystem  $e_1, \dots, e_m$  von  $T_p M$ , also  $g_p(e_i, e_j) = \epsilon_i \delta_{ij}$  mit  $\epsilon_i = \pm 1$ . Sei  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$  definiert durch  $(v^1, \dots, v^n) \mapsto v^i e_i$ . Dann ist  $A$  ein linearer Isomorphismus und wir erhalten damit eine Karte  $\kappa := (\exp_p \circ A)^{-1}$ .

**Definition II.5.15.** Die mittels  $\kappa := (\exp_p \circ A)^{-1}: U_p \rightarrow V_p := A^{-1}(\mathcal{V}_p) \subset \mathbb{R}^m$  erhaltenen Koordinaten um  $p$  nennt man *geodätische Normalkoordinaten*.

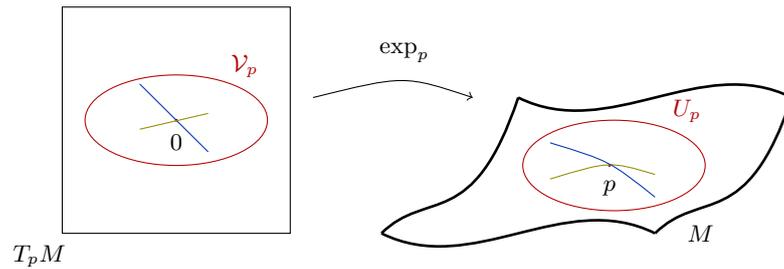


Abb. II.10.: Die Exponentialabbildung bildet Geraden durch  $0 \in T_p M$  auf Geodäten durch  $p$  ab. Geodätische Normalkoordinaten sind bis auf die Wahl eines Koordinatensystems für  $T_p M$ , also unser  $A$ , durch  $(\exp_p)^{-1}$  gegeben.

**Lemma II.5.16** (Gauß-Lemma). Sei  $(M, g)$  Riemannsche oder Lorentzmannigfaltigkeit. Sei  $p \in M$  und  $v \in D_p \subset T_p M$ . Dann gilt  $g(d_{tv} \exp_p(w), d_{tv} \exp_p(v)) = g(w, v)$  für  $w \in T_p M \cong T_{tv} T_p M$ .

*Beweis.* Wir setzen  $c: (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$ ,  $(s, t) \mapsto \exp_p(t(v + sw))$ . Dann ist  $c(s, \cdot)$  für jedes  $s$  eine Geodätische und damit  $c(s, t)$  eine geodätische Variation von  $c(t) = c(0, t)$ . Weiterhin ist  $\frac{\partial c}{\partial t}(0, t) = (d_{tv} \exp_p)(v)$  und  $\frac{\partial c}{\partial s}(0, t) = d_{tv} \exp_p(tw) = t d_{tv} \exp_p(w)$ . D.h. wir suchen  $g\left(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial s}\right)$  für  $s = 0$ . Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g\left(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial s}\right) &= g\left(\underbrace{\nabla_{\dot{c}}\frac{\partial c}{\partial t}}_{=0 \text{ da Geod.}}, \frac{\partial c}{\partial t}\right) + g\left(\frac{\partial c}{\partial t}, \nabla_{\dot{c}}\frac{\partial c}{\partial s}\right) \stackrel{\text{wie (II.13)}}{=} g\left(\frac{\partial c}{\partial t}, \nabla_{\partial_{sc}}\frac{\partial c}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\partial_s g(\partial_t c, \partial_t c) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2}\partial_s g(v + sw, c + sw) = g(v, w) + sg(w, w). \end{aligned}$$

Hierbei folgt (\*) da  $\partial_t c(s, 0) = v + sw$  der Anfangsvektor ist und für  $s \mapsto c(s, t)$  als Geodätische  $g(\partial_t c, \partial_t c)$  in  $t$  konstant ist.

Wir haben also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g\left(\frac{\partial c}{\partial t}(0, t), \frac{\partial c}{\partial s}(0, t)\right) &= g(v, w) \\ g\left(\frac{\partial c}{\partial t}(0, 0), \frac{\partial c}{\partial s}(0, 0)\right) &= g(v, 0) = 0. \end{aligned}$$

Damit ist  $g(\frac{\partial c}{\partial t}(0, t), \frac{\partial c}{\partial s}(0, t)) = tg(v, w)$  und es folgt die Behauptung. □

Im letzten Beweis haben wir auch direkt

**Folgerung II.5.17.** Sei  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$  und  $c(t) = \exp_p(tv)$  für  $t \in [0, 1]$  definiert. Sei  $w \in T_p M \cong T_{tv} T_p M$  und  $J$  das Jacobifeld längs  $c$  mit  $J(0) = 0$  und  $\nabla_{\dot{c}} J(0) = w$ . Dann gilt für  $t \in (0, 1]$

$$d_{tv} \exp_p(w) = \frac{J(t)}{t}.$$

nachgerechnet.

*Beweis.* Nach Bemerkung II.4.17.ii ist das Jacobifeld durch  $J(0)$  und  $\nabla_{\dot{c}} J(0)$  schon wirklich eindeutig bestimmt. Die geodätische Variation  $c: (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$ ,  $(s, t) \mapsto \exp_p(t(v + sw))$  aus dem letzten Beweis hat  $J$  als Variationsvektorfeld. Dann folgt die Behauptung direkt aus  $\frac{\partial c}{\partial s}(0, t) = d_{tv} \exp_p(tv) = td_{tv} \exp_p(w)$ . □

**Definition II.5.18.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $c: I \rightarrow M$  eine Geodätische. Dann heißen  $t_1, t_2 \in I$ ,  $t_1 \neq t_2$  *konjugierte Punkte* längs  $\gamma$ , falls es ein nicht-triviales Jacobifeld  $J$  längs  $c$  mit  $J(t_1) = 0$  und  $J(t_2) = 0$  gibt.

**Folgerung II.5.19.**  $d_v \exp_p$  ist genau dann nicht invertierbar, wenn  $p$  und  $\exp_p(v)$  konjugierte Punkte längs  $\exp_p(tv)$  sind. **Vorl. 19**

*Beweis.* Da  $d_v \exp_p: T_v T_p M \cong T_p M \rightarrow T_p M$  linear ist, ist es genau dann nicht invertierbar, wenn es nicht injektiv ist. Mit letzter Folgerung folgt so die Behauptung. □

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

**Beispiel II.5.20.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung  $K = \kappa$ . Sei  $c_v: I \rightarrow M$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Sei  $t_1 = 0 \in I$ . Man kann nachrechnen\*, dass dann Jacobifelder die Form  $J(t) = (as_\kappa(t) + bc_\kappa(t))X(t)$ , wobei  $X$  ein paralleles Vektorfeld längs  $c$  und

$$s_\kappa(t) = \begin{cases} \sin(\kappa t) & \kappa \geq 0 \\ \sinh(|\kappa|t) & \kappa < 0 \end{cases} \quad c_\kappa(t) = \begin{cases} \cos(\kappa t) & \kappa \geq 0 \\ \cosh(|\kappa|t) & \kappa < 0 \end{cases}$$

ist.

$\kappa \leq 0$  Jacobifelder haben maximal eine Nullstelle. Es gibt also keinen konjugierten Punkte und  $d_v \exp_p$  ist für alle  $v$  im Definitionsbereich von  $\exp_p$  invertierbar.

$\kappa > 0$  Die zu  $t_0$  konjugierten Punkte sind  $t_0 + \frac{m\pi}{\sqrt{\kappa}}$  für  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Auf der Sphäre sind also insbesondere  $p$  und  $-p$  entlang jeder Geodäten konjugiert.

**Lemma II.5.21.** Sei  $(M, g)$  zeitorientierte Lorentzmannigfaltigkeit,  $p \in M$ . Sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow T_p M$  eine (stückweise) glatte Kurve mit  $\gamma(0) = 0$  und  $\gamma([0, 1]) \in D_p = \text{dom } \exp_p \subset T_p M$ . Sei  $c := \exp_p \circ \gamma$  zeitartig (kausale/lichtartige) und zukunftsgerichtet. Dann gilt  $\gamma(t) \in I_+ := \{x \in T_p M \mid g_p(x, x) < 0, x \text{ zukunftsgerichtet}\}$  (bzw.  $\gamma(t) \in J_+ / \gamma(t) \in J_+ \setminus I_+$ ) für alle  $t \in (0, 1]$ .

*Beweis.* Wir betrachten hier nur den Fall, dass  $c$  zeitartig und glatt ist.

Sei  $q: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto q(x) := g_p(x, x)$  (Die zugehörige quadratische Form). Es ist  $\dot{c}(0) = d_0 \exp_p(\dot{\gamma}(0)) = \dot{\gamma}(0)$ . Damit ist  $\dot{\gamma}(0)$  zeitartig und zukunftsgerichtet. Wegen  $\gamma(t) = t\dot{\gamma}(0) + O(t^2)$  gibt es somit ein  $\epsilon > 0$ , so dass  $\gamma(t)$  für alle  $t \in (0, \epsilon)$  zeitartig und zukunftsgerichtet ist.

Nehmen wir an, dass die Behauptung nicht stimmt. Dann sei  $t_1$  das kleinste  $t$  so dass  $q(\gamma(t_1)) = 0$  ist. Wegen  $q(\gamma(0)) = 0$  und dem Mittelwertsatz gibt es dann ein  $t_0 \in (0, t_1)$  mit  $\frac{d}{dt} q(\gamma(t))|_{t=t_0} = 0$ .

Wir berechnen

$$\frac{d}{dt} q(\gamma(t)) = g_p(\text{grad } q|_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t)) \stackrel{\text{Gauß-Lemma}}{=} g_{c(t)}(d_{\gamma(t)} \exp_p(\text{grad } q|_{\gamma(t)}), \underbrace{d_{\gamma(t)} \exp_p(\dot{\gamma}(t))}_{\dot{c}(t)}).$$

Nach Voraussetzung ist  $\dot{c}(t)$  zeitartig und zukunftsgerichtet. Wir werden als nächstes zeigen, dass  $d_{\gamma(t)} \exp_p(\text{grad } q|_{\gamma(t)})$  für  $t \in (0, t_1)$  und damit insbesondere in  $t_0$  auch zeitartig ist. Dann folgt dort  $\frac{d}{dt} q(\gamma(t)) \neq 0$ , was im Widerspruch zu oben steht.

Wir überprüfen zunächst zeitartig:

$$\begin{aligned} & g_{c(t)}(d_{\gamma(t)} \exp_p(\text{grad } q|_{\gamma(t)}), d_{\gamma(t)} \exp_p(\text{grad } q|_{\gamma(t)})) \\ & \stackrel{\text{Gauß-Lemma}}{=} g_p(\text{grad } q|_{\gamma(t)}, \text{grad } q|_{\gamma(t)}) = d_{\gamma(t)} q(\text{grad } q|_{\gamma(t)}). \end{aligned}$$

---

\*da die Geodätische explizit in solchen Räumen explizit bekannt sind

Um das zu berechnen wählen wir Koordinaten so auf  $T_p M$ , dass  $g_p(x, x) = -(x^0)^2 + \sum_i (x^i)^2$  und  $\partial_{x^0}$  zukunftsgerichtet ist. Dann ist  $dq = -2x^0 dx^0 + 2 \sum_i x^i dx^i$  und  $\text{grad } q = (dq)^\sharp = 2x^0 \partial_{x^0} + 2 \sum_i x^i \partial_{x^i}$  und somit  $d_{\gamma(t)} q(\text{grad } q|_{\gamma(t)}) = 4q(\gamma(t)) < 0$  für  $t \in (0, t_1)$ .  $\square$

*Teilbeweis von Satz II.5.9.* Sei  $C_p \subset T_p M$  die Menge aller zeitartigen Vektoren in  $T_p M$ . Diese Menge ist das Innere eines Doppelkegels. Sei  $q \in I_+(p)^U$ . Dann gibt es eine zeitartige zukunftsgerichtete Kurve  $\gamma$  von  $p$  nach  $q$ . Wir setzen  $\bar{\gamma}(t) = \exp_p^{-1}(\gamma(t))$ . Nach letztem Lemma ist  $\bar{\gamma}$  zeitartig und zukunftsgerichtet- also ist insbesondere  $t\bar{\gamma}(1) \in I_+(0) \subset T_p M$  für alle  $t \in (0, 1)$ . Damit ist  $c: [0, 1] \rightarrow M, t \mapsto \exp_p(t\bar{\gamma}(1))$  eine zeitartige Geodätische von  $p$  nach  $q$ . Die Aussage für  $q \in J_+(p)^U \setminus I_+(p)^U$  folgt analog.  $\square$

**Folgerung II.5.22.** *Sei  $(M, g)$  eine zeitorientierte Lorentzmannigfaltigkeit. Sei  $p \in M$  und  $q \in J_+(p) \setminus I_+(p)$ . Dann gibt es eine lichtartige Geodätische von  $p$  nach  $q$ .*

### II.5.3. Riemannsche vs. Lorentzeigenschaften

#### II.5.3.1. Existenz Riemannscher vs. Lorentzmetriken

Auf jeder Mannigfaltigkeit gibt es Riemannsche Metriken. Der Standardbeweis verwendet eine Überdeckung von  $M$  mit Karten  $\kappa_i: U_i \subset M \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^m$  und eine untergeordnete Zerlegung der Eins  $\rho_i$  (d.h.  $\rho_i: M \rightarrow [0, 1]$  glatt,  $\text{supp } \rho_i \subset U_i$ , für jedes  $p \in M$  sind höchstens endlich viele  $\rho_i$  nicht Null und  $\sum_i \rho_i \equiv 1$ .) Man setzt  $g_p(v, w) := \sum_i \rho_i(p)(g_E)_{\kappa_i(p)}(d_p \kappa_i(v), d_p \kappa_i(w))$  mit  $g_E$  die euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^m$  und erhält eine Riemannsche Metrik auf  $M$ .

Der Hauptgrund, warum das funktioniert ist: Für  $g_1, g_2$  Riemannsche Metriken auf  $M$  ist auch  $tg_1 + (1-t)g_2$  für alle  $t \in [0, 1]$  wieder eine Riemannsche Metrik. Das ist falsch für Lorentzmetriken, z.B. sind  $g_1 = -dx^2 + dy^2$  und  $g_2 = dx^2 - dy^2$  Lorentzmetriken auf  $\mathbb{R}^2$ , aber  $\frac{1}{2}(g_1 + g_2) \equiv 0$ .

Für Lorentzmetriken kann man folgendes sagen:

**Satz II.5.23.** *Für eine glatte Mannigfaltigkeit sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) *Es gibt eine Lorentzmetrik auf  $M$ .*
- (ii) *Es gibt eine zeitorientierte Lorentzmetrik auf  $M$ .*
- (iii) *Es gibt ein nichtverschwindendes Vektorfeld auf  $M$ .*
- (iv)  *$M$  ist nichtkompakt oder  $M$  ist kompakt mit  $\chi(M) = 0$ .*

Hierbei ist  $\chi(M)$  die Eulercharakteristik von einer kompakten Mannigfaltigkeit  $M$

$$\chi(M) := \sum_{p \in M, X(p)=0} \text{ind}_p X^*$$

---

\*Der Index  $\text{ind}_p X$  berechnet sich als  $\text{sgn det } Dv$ , wobei  $v: q \in \partial B_\epsilon(p) \subset M \mapsto \frac{X(q)}{|X(q)|} \in S^{m-1}$  ist. Hier sei  $\epsilon$  klein genug, so dass  $B_\epsilon(p)$  in einer Karte liegt und wir somit  $v$  mit einer Abbildung von  $B_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^m$  nach  $S^{m-1}$  identifizieren können.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

für  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ein Vektorfeld mit isolierten Nullstellen.\*

*Skizze.* (iii)  $\leftrightarrow$  (iv) and (i)  $\rightarrow$  (iv) folgt aus Sätzen der Differentialtopologie, [17, Cor. 39.8] bzw. [13, S.149, Prop 37].

(ii)  $\rightarrow$  (i) und (ii)  $\rightarrow$  (iii) ist klar

(iii)  $\rightarrow$  (ii): Sei  $X$  das nichtverschwindende Vektorfeld. Nach obigen Ausführungen existiert eine Riemannsche Metrik  $g$  auf  $M$ . Dann ist  $U := X / \sqrt{|g(X, X)|}$  ein Einheitsvektorfeld bzgl.  $g$ . Wir setzen  $\tilde{g} = g - 2U^\sharp \otimes U^\sharp$  und wollen zeigen, dass  $\tilde{g}$  eine zeitorientierte Lorentzmetrik ist: Dazu vervollständigen wir  $U$  in  $p \in M$  zu einer  $g$ -Orthonormalbasis  $u = U(p), e_2, \dots, e_n$  von  $T_p M$ . Dann ist  $\tilde{g}(e_i, e_j) = g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ ,  $\tilde{g}(u, e_i) = g(u, e_i) = 0$  und  $\tilde{g}(u, u) = -1$  und die Behauptung folgt.  $\square$

**Folgerung II.5.24.** *Es gibt keine Lorentzmetrik auf  $S^2$ .*

*Beweis.* Folgt aus letztem Satz und dem Satz vom Igel.  $\square$

### II.5.3.2. Abstandsbegriffe

**Definition II.5.25.** Für eine Kurve  $\gamma: I \rightarrow M$  sei

$$L(\gamma) := \int_I \sqrt{|g(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))|} ds$$

die *Bogenlänge* von  $\gamma$

**Bemerkung II.5.26.** Ist  $\gamma$  immer zeit- oder raumartig, so ist  $L(\gamma)$  die gesamte Eigenzeit, die für  $\gamma$  auf ganz  $I$  vergeht, vgl. Abschnitt II.1. Wie auch schon bei der Eigenzeit erwähnt, ist die Länge einer Kurve invariant unter Umparametrisierung.

Für Riemannsche Mannigfaltigkeiten kann man die *Riemannsche Abstandsfunktion* definieren:

$$d(p, q) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist eine Kurve von } p \text{ nach } q\}.$$

Dann ist die Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $(M, d)$  ein metrischer Raum (die induzierte Topologie ist gleich der ursprünglichen Topologie auf  $M$ ).

Für Lorentzmetriken  $d$  ist keine hilfreiche Definitionen, da aus  $p \ll q$  folgt, dass  $d(p, q) = 0$  ist, vgl. ÜA 8.

*Was will man stattdessen von einer Abstandsfunktion?* Falls es keine kausalen Kurven von  $p$  nach  $q$  gibt, soll der Abstand wie im Riemannschen

$$\inf\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ raumartige Kurve von } p \text{ nach } q\}$$

sein. Falls es kausale aber keine zeitartigen Kurven von  $p$  nach  $q$  gibt, ist nach Satz II.5.8 jede dieser kausalen Kurven schon lichtartig und wir würden den Abstand 0 setzen.

\*Oft wird  $\chi(M)$  anders definiert und diese Darstellung von  $\chi(M)$  ist der Satz von Poincaré-Hopf, vgl. [7, §5].

Gibt es zeitartige Kurven von  $p$  nach  $q$ , dann maximieren Geodätische lokal die Länge von solch zeitartigen Kurven, d.h. der Abstand sollte mit

$$\sup\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ zeitartige Kurve von } p \text{ nach } q\}$$

gehen.

Um auch die Information, ob die Punkte durch kausale Kurven erreichbar ist, zu kodieren, führt man oft noch ein Vorzeichen ein und erhält das *Lorentzschen Abstandsquadrat*:

$$\sigma(p, q) := \begin{cases} -\sup\{L(\gamma)^2 \mid \gamma \text{ kausale Kurve von } p \text{ nach } q\} & p \leq q \text{ oder } q \leq p \\ \inf\{L(\gamma)^2 \mid \gamma \text{ raumartige Kurve von } p \text{ nach } q\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Hierbei, benutzen wir die Konvention, dass das Infimum über die leere Menge unendlich sei.

**Lemma II.5.27.** *Es gilt*

*Vorl. 20*

$$\sigma(p, q) = \inf \left\{ \int_0^1 g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \mid \gamma: [0, 1] \rightarrow M \text{ Kurve von } p \text{ nach } q, g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \equiv \text{konst} \right\}.$$

*Beweisskizze.* Es ist nach Cauchy-Schwarz  $L(\gamma)^2 \leq \int_0^1 |g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})|$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$  konstant ist. Damit ist für  $p$  und  $q$  zeitartig zueinander  $L(\gamma)^2 \leq -\int_0^1 g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ . Also  $\sigma(p, q) = -\sup L(\gamma)^2 \geq \inf \int_0^1 g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ . Sei nun  $\gamma_i$  eine Folge von kausalen Kurven von  $p$  nach  $q$  mit  $L(\gamma_i)^2 \rightarrow -\sigma(p, q)$ . Da  $p$  und  $q$  zeitartig zueinander liegen, gibt es immer eine Kurve  $\tilde{\gamma}_i$  beliebig nach an  $\gamma_i$ , die zeitartig ist und noch immer  $L(\tilde{\gamma}_i)^2 \rightarrow -\sigma(p, q)$  erfüllen. Als zeitartige glatte Kurven, können diese immer nach Eigenzeit parametrisiert werden und erfüllen somit Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und damit ist  $\sigma(p, q) = \inf \int_0^1 g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ . Analog zeigt man die Gleichheit, falls  $p$  und  $q$  raumartig aber nicht kausal zueinander liegen.  $\square$

### II.5.3.3. Vollständigkeitsbegriffe

**Definition II.5.28.** Wir nennen eine Riemannsche oder Lorentzmannigfaltigkeit  $(M, g)$  *geodätische vollständig*, falls für alle  $p \in M$  und  $v \in T_p M$  es eine Geodätische  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = v$  gibt.

Für Riemannsche Mannigfaltigkeiten gibt es den Satz von Hopf-Rinow, der unter anderem sagt, dass Vollständigkeit von  $M$  aus metrischer Raum  $(M, d)^*$  mit  $d$  der Riemannschen Abstandsfunktion äquivalent zur geodätischen Vollständigkeit ist.

Bei Lorentzschen Mannigfaltigkeiten haben wir so erst mal keinen metrischen Raum - da ist die Lage komplizierter. Wir überlegen uns zunächst:

---

\*d.h. jede Cauchyfolge konvergiert

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

**Lemma II.5.29.** Eine Geodätische  $\gamma: [0, b) \rightarrow M$  einer Riemannschen oder Lorentzmannigfaltigkeit ist genau dann als Geodätische nicht erweiterbar, wenn sie auch als Kurve nicht stetig erweiterbar ist.

*Beweis.* Sei  $\gamma$  als Geodätische nicht erweiterbar. Die andere Richtung ist klar. Wir nehmen an, dass  $\gamma$  als Kurve eine stetige Erweiterung  $\tilde{\gamma}: [0, b] \rightarrow M$  hat. O.B.d.A. sei  $g(\dot{\tilde{\gamma}}, \dot{\tilde{\gamma}}) = \text{konst.}$  Sei  $U_p$  eine konvexe Normalenumgebung um  $p := \gamma(b)$ . Dann gibt es ein  $t_0$  nahe  $b$  und eine offene Umgebung  $U' \subset U_p$  um  $\gamma(t_0)$ , so dass  $p \in U'$ . Auf  $U'$  wählen wir geodätische Normalkoordinaten. Dann ist die radiale Geodätische  $c(s)$  durch  $c(0) = \gamma(t_0)$  mit Anfangsgeschwindigkeit  $c'(0) = \gamma'(t_0)$  für  $s < 0$  unsere Geodätische  $\gamma$ . Damit ist diese auf  $t = b$  und darüber hinaus erweiterbar.  $\square$

**Definition II.5.30.** Eine Lorentzmannigfaltigkeit heißt *zeitartig (lichtartig/raumartig/kausal) vollständig*, falls alle zeitartigen (lichtartigen/raumartigen/kausalen) Geodätischen auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert sind.

**Bemerkung II.5.31.** Aus geodätisch vollständig folgt zeitartig (lichtartig/raumartig/kausal) vollständig.

**Beispiel II.5.32.** (i) Der Schwarzschildraum ist weder licht-/zeitartig noch raumartig vollständig.

(ii) Sei  $(\mathbb{R}^2, \eta)$  der zweidimensionale Minkowskiraum und  $\mu: (t, x) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  glatt, so dass gilt:

- $\mu = 1$  auf  $\{x < -1\} \cup \{x > 1\}$
- $\mu(t, x) = \mu(t, -x)$
- $t^2 \mu(t, 0) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Dann ist  $(\mathbb{R}^2, \mu^2 \eta)$  lichtartig und raumartig vollständig: Nach Lemma II.4.38 sind die Spuren der lichtartigen Geodätischen zu  $\mu^2 \eta$  gleich der von  $\eta$  selbst, also die Geraden mit Anstieg  $\pm 1$ . Da jede dieser Geraden außerhalb eines kompakten Intervalls auf Minkowskimetrik ist, ist ihre Eigenzeit beidseitig unbeschränkt. Damit muss sich auch eine raumartige Geodätische zu jeder Zeit in raumartige Richtung des jeweiligen Minkowskilichtkegel bewegen und verlässt somit den Bereich mit  $|x| \leq 1$ . Ab dann ist die Metrik gleich der Minkowskimetrik und es müssen die raumartigen Geodätischen damit auch Geraden sein mit beidseitig unbeschränkter Eigenzeit.

Aber  $(\mathbb{R}^2, g = \mu^2 \eta)$  ist nicht zeitartig vollständig: Die zeitartige Kurve  $s \mapsto (s, 0)$  ist wegen der Isometrie  $(t, x) \mapsto (t, -x)$  der Metrik eine Geodätische (da die Geodätische durch Anfangspunkt  $(0, 0)$  und Anfangsvektor  $(1, 0)$  eindeutig bestimmt und durch Isometrie wieder auf eine Geodätische abgebildet wird). Für die Eigenzeit dieser Geodätischen in die Zukunft gilt jedoch  $\int_1^\infty \sqrt{-g_{(s,0)}((1,0), (1,0))} ds = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_1^s \mu(u, 0) du \leq C \lim_{s \rightarrow \infty} \int_1^s \frac{1}{u^2} du < \infty$ .

(iii) Im Riemannschen sind kompakte Mannigfaltigkeiten immer geodätisch vollständig (folgt auch mit Hopf-Rinow). Im Lorentzschen stimmt das nicht:

Betrachten wir  $(M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, g = \frac{2dx dy}{x^2 + y^2})$ . Dann ist  $g$  Lorentzmetrik. Man kann nachrechnen, dass  $\gamma(t) = ((1-t)^{-1}, 0)$  eine Geodätische ist, die in endlicher Eigenzeit  $0 \in \mathbb{R}^2$  erreicht. Damit ist  $M$  nicht geodätisch vollständig, aber natürlich nicht kompakt.

Nun ist  $f^n : (x, y) \mapsto (2^n x, 2^n y)$  eine Isometrie von  $M$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Identifizieren wir Punkte, die durch die Isometrie auseinander hervorgehen, erhalten wir den Torus  $\mathbb{T}^2$ . Da  $f$  eine Isometrie ist, haben wir auch auf  $\mathbb{T}^2$  dann  $g$  als Lorentzmetrik und die Geodätische  $\gamma$  ist auch noch Geodätische auf  $\mathbb{T}^2$ , die sich nun in endlicher Eigenzeit unendlich oft um den Torus wickelt. Also ist auch  $(\mathbb{T}^2, g)$  – der *Clifton-Pohl Torus* – nicht geodätisch vollständig.

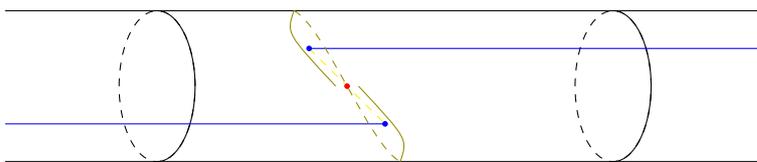
### II.5.4. Global hyperbolisch

Wir haben bis jetzt gesehen, dass auf einer allgemeinen Lorentzmannigfaltigkeit man relativ weit von der Situation von geodätischen vollständigen Mannigfaltigkeiten im Riemannschen entfernt. Z.B. ist schon muss es zwischen zwei zueinander zeitartig gelegenen Punkt keine Geodätische geben mit größter Eigenzeit (denn das Supremum kann unendlich sein), vgl. ÜA 41.

**Definition II.5.33.** Die Lorentzmannigfaltigkeit  $(M, g)$  erfüllt die *Kausalitätsbedingung*, falls es keine geschlossenen kausalen Kurven gibt. Sie erfüllt die *starke Kausalitätsbedingung*, falls es keine fast geschlossenen kausalen Kurven gibt, d.h. für alle  $p \in M$  und jede offene Umgebung  $U$  von  $p$  gibt es eine offene Umgebung  $V \subset U$  von  $p$ , so dass jede kausale Kurve, die in  $V$  startet und endet vollständig in  $U$  verläuft.

**Beispiel II.5.34.**

- (i) Die Gödelraumzeit aus ÜA 34 erfüllt nicht die Kausalitätsbedingung.
- (ii) Ist  $(M, g)$  eine kompakte Lorentzmannigfaltigkeit, dann gibt es eine geschlossene zeitartige Kurve, vgl. ÜA 40.
- (iii) Ein Beispiel für eine Lorentzmannigfaltigkeit, die die Kausalitätsbedingung aber nicht die starke Kausalitätsbedingung erfüllt, ist ein Zylinder  $(S^1 \times \mathbb{R}, -dt^2 + dx^2)$ , bei dem zwei blaue Strahlen wie im Bild herausgeschnitten wurden:



**Lemma II.5.35.** Sei  $(M, g)$  eine zeitorientierte Lorentzmannigfaltigkeit. Sei  $K \subset M$  kompakt und es gelte die starke Kausalitätsbedingung auf  $(K, g|_K)$ . Sei  $c: [0, b \leq \infty) \rightarrow M$  eine zukunftsgerichtete, in der Zukunft nichterweiterbare, kausale Kurve mit  $c(0) \in K$ . Dann existiert ein  $s_0 \in (0, b)$ , so dass  $c(t) \notin K$  für alle  $t \in (s_0, b)$ .

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

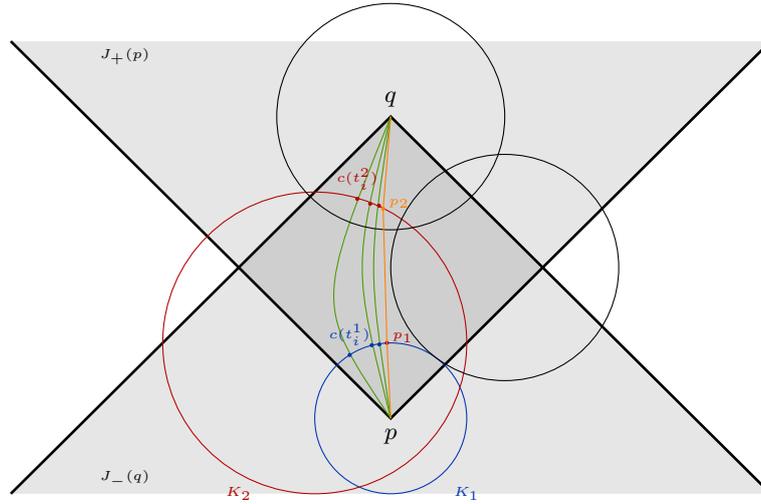


Abb. II.11.: Zum Beweis von Lemma II.5.36

*Beweis.* Wir beweisen dies durch Widerspruch: Sei also  $(s_i)_i$  eine Folge in  $(0, b)$  mit  $s_i < s_{i+1}$ ,  $s_i \rightarrow s$  und  $c(s_i) \in K$ . Da  $K$  kompakt ist, gilt (ggf. nach Übergang zu einer Teilfolge)  $c(s_i) \rightarrow p \in K$  für  $i \rightarrow \infty$ . Da  $c$  zukunftsrichterweiterbar ist, gibt es  $(t_i)_i$  aus  $(0, b)$  mit  $t_i < t_{i+1}$ ,  $t_i \rightarrow s$  und  $c(t_i) \rightarrow p$ . Es gibt eine Umgebung  $U$  von  $p$ , so dass nach Übergang zu weiterer Teilfolge  $c(t_i) \notin U$  und  $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < s_3 < \dots$  ist. Für jede Umgebung  $V \subset U$  von  $p$  und  $i$  hinreichend groß gilt  $c(s_i), c(s_{i+1}) \in V$  aber wegen  $c(t_i) \notin U$  liegt  $c([s_i, s_{i+1}])$  nicht vollständig in  $U$ . Das ist ein Widerspruch zur starken Kausalitätsbedingung.  $\square$

Von nun an sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentzmannigfaltigkeit. Für  $p < q$  sei  $J(p, q) := J_+(p) \cap J_-(q)$ .

**Lemma II.5.36.** *Sei  $p < q \in M$  und  $J(p, q)$  kompakt. Es gelte die starke Kausalitätsbedingung auf  $J(p, q)$ . Dann existiert eine kausale Geodätische von  $p$  nach  $q$  mit Länge  $\sqrt{-\sigma(p, q)}$ , die damit insbesondere endlich ist.*

*Beweis.* Seien  $c_i: [0, 1] \rightarrow M$  zukunftsgerichtete kausale Kurven mit  $c_i(0) = p$ ,  $c_i(1) = q$  (und damit  $c_i([0, 1]) \subset J(p, q)$ ) und  $L(c_i) \rightarrow d := \sqrt{-\sigma(p, q)}$ .

Wir zeigen, dass es einen zukunftsgerichteten kausaler geodätischer Polygonzug  $\gamma$  von  $p$  nach  $q$  mit  $d = L(\gamma)$  gibt, vgl. Abbildung II.11: Sei  $\mathcal{K}$  eine endliche Überdeckung von  $J(p, q)$  durch Kompakta  $K$ , wobei jedes  $K$  der Abschluss einer konvexen Normalenumgebung sein soll. Deren Existenz folgt aus Satz II.5.9 und der Kompaktheit von  $J(p, q)$ . Sei  $K_1 \subset \mathcal{K}$  mit  $p \in K_1$ . O.B.d.A. sei  $q \notin K_1$  sonst folgt die Existenz der kausalen Geodätischen von  $p$  nach  $q$  aus Satz II.5.9. Dann folgt nach Lemma II.5.35, dass für jedes  $i$  ein  $t_i^1 \in [0, 1]$  gibt, mit  $c_i(t) \notin K_1$  für alle  $t \in (t_i^1, 1]$ . Sei  $t_i^1$  jeweils das größte Element in  $[0, 1]$ , was das erfüllt (existiert, da  $K_1$  kompakt ist). Dann ist

$c_i(t_i^1) \in \partial K_1 \subset K_1$ . Wegen Kompaktheit konvergiert eine Teilfolge von  $c_i(t_i^1)$  gegen ein  $p_1 \in \partial K_1$ . Sei  $K_2 \in \mathcal{K}$  derart, dass  $p_1$  im Inneren von  $K_2$  liegt. Nach Übergang zu einer Teilfolge sind auch  $c_i(t_i^1) \in K_2$ . Ist nun  $q \in K_2$  setzen wir  $p_2 = q$ , sonst verwenden wir wieder Lemma II.5.35 und erhalten  $t_i^2 \in [0, 1]$  mit  $c_i(t_i^2) \in \partial K_2$  und  $c_i(t) \notin K_2$  für alle  $t \in (t_i^2, 1]$ . So gehen wir schrittweise weiter vor und erhalten (da  $\mathcal{K}$  endlich ist), endliche Folgen  $(t_i^j)_{j=0, \dots, n}$  mit  $t_0 = 0$  und  $t_i^n = 1$  und  $(p_j)_{j=0, \dots, n}$  mit  $p_0 = p$  und  $p_n = q$ . Nach Satz II.5.9 gibt es zwischen  $p_j$  und  $p_{j+1}$  jeweils eine eindeutige Geodätische. Auch  $p_j$  und  $p_{j+1}$  liegen als Limes von Endpunkten kausaler Kurven wieder kausal zueinander. Es ist

$$d = \lim_{i \rightarrow \infty} L(c_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n L(c_i|_{[t_i^{j-1}, t_i^j]}) \leq \sum_{j=1}^n \sqrt{-\sigma(p_{j-1}, p_j)}.$$

Die letzte Ungleichung folgt, da die Kurven  $c_i|_{[t_i^{j-1}, t_i^j]}$  punktweise gegen eine Kurve von  $p$  nach  $q$  konvergiert und auch die Längen dann konvergiert und damit kleiner gleich  $\sqrt{-\sigma(p_{j-1}, p_j)}$  ist. Also gilt schon Gleichheit und wir haben den gesuchten Polygonzug.

Es bleibt noch zu zeigen, dass der Polygonzug schon eine Geodätische von  $p$  nach  $q$  (und damit glatt) ist. Dies folgt aus der Extremalität der Länge des Polygonzuges und ÜA 43.  $\square$

Das letzte Lemma motiviert insbesondere die folgende Definition:

Vorl. 21

**Definition II.5.37.** Eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentzmannigfaltigkeit  $(M, g)$  heißt *global hyperbolisch*, falls die starke Kausalitätsbedingung erfüllt ist und falls für alle  $p, q \in M$  die  $J(p, q) := J_+(p) \cap J_-(q)$  (die sogenannten *Diamanten*) kompakt ist.

**Beispiel II.5.38.** Beispiele, wo die starke Kausalitätsbedingung (bzw. sogar die Kausalitätsbedingung) nicht erfüllt ist, haben wir schon in Beispiel II.5.34 gesehen. Für das Beispiel aus ÜA 41, welches isometrisch zur universellen Überlagerung des zweidimensionalen Anti-de Sitterraum ist, gibt es nicht kompakte Diamanten: Da die Metrik konform zur Minkowskimetrik ist, sind die Lichtkegel die gleichen wie für den Minkowskiraum, vgl. Lemma II.4.38. Also ist  $J_-((0, \pi)) \cap J_+((0, 0)) \subset \mathbb{R} \cap (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  nicht kompakt.

Die nächsten beiden Sätze werden von der Idee her ähnlich gezeigt, wie das letzte Lemma.

**Satz II.5.39.** Sei  $(M, g)$  global hyperbolisch. Dann ist das Lorentzsche Abstandskquadrat immer endlich und  $\sigma: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

**Satz II.5.40.** Die Relation  $\leq$  ist abgeschlossen in global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten, d.h. für konvergente Folgen  $p_i \rightarrow p$  und  $q_i \rightarrow q$  mit  $p_i \leq q_i$  folgt  $p \leq q$ .

Um global hyperbolisch noch auf eine Weise charakterisieren zu können, die später sehr hilfreich sein wird, brauchen wir zunächst noch ein paar Begriffe.

**Definition II.5.41.** Eine *Cauchyhyperfläche* einer zeitorientierten Lorentzmannigfaltigkeit ist eine Teilmenge  $\Sigma \subset M$ , die von jeder nichterweiterbaren zeitartigen Kurve genau einmal getroffen wird. Eine Teilmenge  $A \subset M$  heißt *achronal*, falls es keine Punkte  $p, q \in A$  mit  $p \ll q$  gibt.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

### Bemerkung II.5.42.

- (i) Zwar deutet der Name Cauchyhyperfläche darauf hin, dass es sich wahrscheinlich um eine Hyperfläche handelt (und wir werden gleich noch sehen, in welchem Sinne das richtig ist), aber das ist erst einmal nicht klar.
- (ii) Jede Cauchyhyperfläche ist achronal.

**Beispiel II.5.43.** Im Minkowskiraum  $\mathbb{R}^n$  ist z.B.  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  eine Cauchyhyperfläche. Aber auch  $\Sigma = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \cong \mathbb{R}^n \mid 2t^2 = |x|^2\}$  ist eine Cauchyhyperfläche. Daran sieht man, dass Cauchyhyperflächen nicht glatt sein müssen.

**Satz II.5.44.** Sei  $S \subset M$  eine Cauchyhyperfläche. Dann gilt

- (i)  $M = I_+(S) \sqcup S \sqcup I_-(S)$
- (ii)  $S = \partial I_+(S) = \partial I_-(S)$ .
- (iii)  $S$  ist eine abgeschlossene topologische Hyperfläche (siehe folgende Definition).
- (iv) Jede nichterweiterbare kausale Kurve trifft  $S$ .

Zu (iv) im Gegensatz zu zeitartigen Kurve muss eine kausale Kurve die Cauchyhyperfläche nicht nur in einem Punkt treffen: z.B. eine lichtartige Gerade im Minkowski und  $x^0 = |\vec{x}|$  als Cauchyhyperfläche.

**Definition II.5.45.** Eine Teilmenge  $S$  einer  $n$ -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit  $M$  heißt *topologische  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit*, falls es zu jedem Punkt  $p \in S$  eine offene Umgebung  $U \subset M$  von  $p$  gibt und einen Homöomorphismus  $\kappa: U \rightarrow V$  mit  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\kappa(U \cap S) = V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k})$ . Ist  $k = n - 1$ , heißt  $S$  *topologische Hyperfläche*. Ist  $\kappa$  sogar ein Diffeomorphismus, ist  $S$  eine *glatte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit* bzw. *glatte Hyperfläche* von  $M$ .

*Beweis von Theorem II.5.44.* (i) Sei  $p \in M$  und  $c$  eine nichterweiterbare zeitartige Kurve durch  $p$ . Da  $S$  Cauchyhyperfläche ist, trifft  $c$   $S$ , sagen wir in  $q$ . Dann ist  $p \in I_-(S) \cup S \cup I_+(S)$  und damit  $M = I_-(S) \cup S \cup I_+(S)$ . Es bleibt zu zeigen, dass dies eine disjunkte Vereinigung ist. Wäre  $q \in I_\pm(S) \cap S$ , so gäbe es eine zeitartige Kurve, die  $S$  zweimal trifft, was nicht möglich ist, da  $S$  Cauchyhyperfläche ist. Analog sieht man  $q \notin I_-(S) \cap I_+(S)$ .

(ii) Wir zeigen nur die erste Gleichheit, die zweite folgt analog. Es gilt  $S \subset \partial I_+(S)$  für jede Teilmenge  $S$ . Weiterhin ist wegen (i)  $M \setminus I_-(S) = I_+(S) \cup S$  und mit ÜA 42.i ist  $I_+(S) \cup S$  damit abgeschlossen. Also ist  $\partial I_+(S) = I_+(S) \cap \overline{M \setminus I_+(S)} \subset (I_+(S) \cup S) \cap (I_-(S) \cup S) = S$ .

(iii) Sei  $p \in S$  und  $U$  eine Koordinatenumgebung von  $p$  gegeben durch eine Karte  $\kappa: U \rightarrow \kappa(U) \subset \mathbb{R}^n$ . O.B.d.A. sei  $\partial_{x^0}$  zeitartig und zukunftsgerichtet. Sei  $V \subset U$  eine Umgebung von  $U$ , so dass  $\kappa(V) = (-\epsilon, \epsilon) \times N \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Für  $y \in N \subset \mathbb{R}^{n-1}$  ist die Kurve  $[-\epsilon, \epsilon] \rightarrow V$ ,  $s \mapsto \kappa^{-1}(s, y)$  zeitartig (nach Wahl von  $x^0$ ) und trifft  $S$ . Da  $S$  Cauchyhyperfläche ist, ist dieser Schnittpunkt eindeutig bestimmt und bestimmt damit

ein eindeutiges  $h(y) \in [-\epsilon, \epsilon]$  mit  $\kappa^{-1}(h(y), y) \in S$ . Die Projektion von  $\kappa$  auf die erste Komponente nennen wir  $\kappa_1$ , die auf die letzten  $n - 1$ -Komponenten nennen wir  $\kappa_2$ . Wir setzen  $\tilde{\kappa}: V \rightarrow \mathbb{R} \times N$ ,  $v \mapsto (\kappa_1(v) - h(\kappa_2(v)), \kappa_2(v))$ . Dies ist eine Bijektion aufs Bild. Wir müssen nun zeigen, dass  $S$  wirklich eine topologische Hyperfläche ist. Da  $\kappa$  ein Diffeomorphismus ist, müssen wir nur noch zeigen, dass  $h: N \rightarrow [-\epsilon, \epsilon]$  stetig ist, da dann  $\tilde{\kappa}$  auch ein Homöomorphismus ist: Wir zeigen das per Widerspruch. Sei also  $y_i \rightarrow y$  in  $N$ , aber  $h(y_i) \not\rightarrow h(y)$ . Wegen  $h(y_i) \in [-\epsilon, \epsilon]$  muss (ggf. nach Übergang zu einer Teilfolge)  $h(y_i)$  konvergieren gegen ein  $s_0 \in [-\epsilon, \epsilon]$ . Da  $s_0 \neq h(y)$  und  $x^0$  zeitartig, ist nach Satz II.5.40  $\kappa^{-1}(s_0, y) \subset I_+(q)^V \cup I_-(q)^V$  für  $q = \kappa^{-1}(h(y), y)$ . Wegen Offenheit von  $I_{\pm}(q)^V$  in  $V$  ist  $\kappa^{-1}(h(y_i), y_i) \in I_+(q)^V \cup I_-(q)^V$  für  $i$  groß genug. Das widerspricht aber der Achronalität von  $S$ .

Die Abgeschlossenheit von  $S$  folgt aus (ii).

(iv) Machen wir hier nicht, s. z.B. [13, p.415, Lemma 29]. □

**Folgerung II.5.46.** *Besitzt  $(M, g)$  eine Cauchyhyperfläche  $S$ , dann ist  $M$  homöomorph zu  $\mathbb{R} \times S$ . Alle Cauchyhyperflächen von  $(M, g)$  sind homöomorph  $S$ .*

*Ist  $S$  sogar glatt, dann ist  $M$  diffeomorph zu  $\mathbb{R} \times S$  und alle glatten Cauchyhyperflächen sind diffeomorph zu  $S$ .*

*Beweis.* Da  $(M, g)$  zeitorientiert ist, gibt es ein glattes zeitartiges Vektorfeld  $X$ . Wir wählen eine geodätisch vollständige Riemannsche Metrik  $\tilde{g}$  auf  $M$  (existiert immer nach [12]) und setzen  $Y := \frac{X}{\sqrt{\tilde{g}(X, X)}}$ . Dann ist  $Y$  ein beschränktes Vektorfeld bzgl. der Metrik  $g$  und damit ein vollständiges Vektorfeld nach [], d.h. der Fluss  $\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  von  $Y$  existiert für alle Zeiten, vgl. Seite 67. Wir setzen

$$\Phi: \mathbb{R} \times S \rightarrow M, (s, p) \mapsto \varphi(s, p).$$

Da  $S$  eine Cauchyhyperfläche ist, ist  $\Phi$  bijektiv. Da  $\varphi$  glatt ist, richtet sich die Regularität von  $\Phi$  nach der Regularität von  $S$ .

Sei  $\tilde{S}$  eine topologische (bzw. glatte) Cauchyhyperfläche. Sei  $s: M \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\rho: M \rightarrow S$  definiert durch  $(s(p), \rho(p)) := \Phi^{-1}(p)$ . Dann sind  $s$  und  $\rho$  stetig (bzw. glatt). Dann ist  $\rho: \tilde{S} \rightarrow S$ ,  $p \mapsto \rho(p)$ , bijektiv: Wäre  $\rho(p_1) = \rho(p_2)$ , dann wäre  $\varphi_s(p_1) = p_2$  für ein  $s \in \mathbb{R}$ . Da es der Fluss eines zeitartigen Vektorfeldes und  $\tilde{S}$  eine Cauchyhyperfläche ist, muss  $s = 0$  und damit  $p_1 = p_2$  sein. Analog sieht man Surjektivität. Mit dem gleichen  $\varphi$  kann man eine bijektive stetige (bzw. glatte) Umkehrabbildung  $S \rightarrow \tilde{S}$  konstruieren. □

Kommen wir zurück zu global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten und die Verbindung zu Cauchyhyperflächen.

**Satz II.5.47.** *(Geroch 1970) Für eine global hyperbolische Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  existiert eine stetige und surjektive Abbildung  $t: M \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $t^{-1}(s)$  für alle  $s \in \mathbb{R}$  eine Cauchyhyperfläche ist und  $t \circ \gamma$  für jede zukunftsgerichtete kausale Kurve  $\gamma$  streng monoton steigend ist.*

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

*Beweisskizze.* Wir wählen eine Riemannsche Metrik  $h$  auf  $M$ , so dass  $(M, h)$  endliches Volumen besitzt. Diese existiert: Sei  $h$  irgendeine Riemannsche Metrik auf  $M$  und  $(K_i)_i$  eine kompakte Ausschöpfung von  $M$  (also  $\emptyset = K_0 \dots \subset K_i \subset K_{i+1} \subset \dots$ ,  $K_i$  kompakt und  $\cup_i K_i = M$ ). Wir setzen  $\tilde{h} = f^2 h$  mit  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}_{>0})$  und  $f^n|_{K_{i+1} \setminus K_i} \leq 2^{-i} \text{vol}(K_{i+1} \setminus K_i, h)^{-1}$ . Dann ist

$$\text{vol}(M, \tilde{h}) = \sum_i \text{vol}(K_{i+1} \setminus K_i, \tilde{h}) = \sum_i \int_{K_{i+1} \setminus K_i} f^n d\text{vol}_h \leq \sum_i 2^{-i} < \infty.$$

Wir setzen  $t: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto \ln \frac{\text{vol}(J_-(p), \tilde{h})}{\text{vol}(J_+(p), \tilde{h})}$ . Man muss zeigen, dass  $t$  stetig ist (darauf verzichten wir in dieser Skizze).

Ist  $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine kausale zukunftsgerichtete Kurve, dann ist  $J_-(\gamma(s_1)) \subset J_-(\gamma(s_2))$  und  $J_+(\gamma(s_2)) \subset J_+(\gamma(s_1))$  für  $s_1 < s_2$ . Da  $M$  global hyperbolisch ist, sind diese Inklusionen sogar strikt und zwar so, dass eine Menge hinzukommt, die innere Punkte enthält und damit Volumen ungleich Null hat. Also ist  $t \circ \gamma$  streng monoton steigend.

Insbesondere gilt: Ist  $\gamma$  nichterweiterbar als kausale zukunftsgerichtete Kurve, gilt  $\cap_{s \in (a, a+\epsilon)} J_-(\gamma(s)) = \emptyset$  und  $\cap_{s \in (b-\epsilon, b)} J_+(\gamma(s)) = \emptyset$  und damit  $\lim_{s \rightarrow a} t(\gamma(s)) = -\infty$  und  $\lim_{s \rightarrow b} t(\gamma(s)) = \infty$ . Damit ist  $t$  insbesondere auf jeder nichterweiterbaren kausalen Kurve surjektiv und damit auch auf ganz  $M$  surjektiv.

Aus der Surjektivität und strengen Monotonie von  $t$  auf einer nichterweiterbaren zeitartigen Kurve  $\gamma$  und der Stetigkeit von  $t$  folgt, dass  $t^{-1}(s)$  für alle  $s \in \mathbb{R}$  eine Cauchyhyperfläche ist.  $\square$

Es wurde schon lange geglaubt, dass man auch immer eine glatte Cauchyhyperfläche finden kann, allerdings hat es bis 2005 gedauert, bis das vollständig bewiesen wurde:

**Satz II.5.48.** (Bernal-Sanchez [1]) *Ein  $(M, g)$  Lorentzmannigfaltigkeit ist genau dann global hyperbolisch, wenn  $(M, g)$  isometrisch zur glatten Produktmannigfaltigkeit  $(\mathbb{R} \times S, -\beta dt^2 + h_t)$ , wobei  $t: \mathbb{R} \times S \rightarrow \mathbb{R}$  die Projektion auf die erste Koordinate ist,  $\beta: \mathbb{R} \times S \rightarrow (0, \infty)$  glatt,  $h$  ein symmetrischer  $(0, 2)$ -Tensor auf  $\mathbb{R} \times S$  und  $\{t\} \times S$  für alle  $t$  eine glatte Cauchyhyperfläche mit Riemannsche Metrik  $g|_{\{t\} \times S} = h_t$  ist.*

## II.6. Singularitäten

Bei der Schwarzschildmetrik in Abschnitt II.3.5 haben wir uns schon im Ansatz damit beschäftigt, wie schwierig es ist, eine gute Definition für Singularitäten zu finden bzw. erst einmal eine Intuition, was das überhaupt sein soll. Für die Schwarzschildmetrik hatten wir gesehen, dass  $r = r_S$  nur eine Koordinatensingularität ist und nach Einführung neuer Koordinaten kein Problem mehr darstellte. In  $r = 0$  hingegen explodiert der Kretschmannskalar  $|R|_g^2$ , der unabhängig der gewählten Koordinaten ist. Das konnte damit keine Koordinatensingularität sein - man nennt dieses Phänomen eine gravitative Singularität.

Auch bei den FLRW-Raumzeiten hatten wir unter bestimmten Annahmen an die Hubblekonstante, der Energiedichte  $\rho$  und dem Druck  $\mathfrak{p}$  gesehen, dass es einen big bang oder big crunch geben muss, vgl. Lemma II.4.33. Auch das würden wir gerne als Singularität begreifen.

Eine oft verwendete Definition von Singularitäten sind z.B. Eine zeitorientierte Lorentzmannigfaltigkeit ist singular, wenn sie zeitartig oder lichtartig geodätisch unvollständig ist.

Zeitartig geodätisch unvollständig bedeutet insbesondere, dass ein zeitartiger Beobachter nach endlicher Eigenzeit aufhört zu existieren – man sagt, er sei in einer 'Singularität verschwunden'. Lichtartig geodätisch unvollständig ist weniger plausibel, warum das ein Hinweis auf ein singuläres Verhalten sein soll. Wahrscheinlich bildet diese Definition nur ab, dass es manchmal leichter ist, lichtartig geodätisch unvollständig zu zeigen und es meines Wissens nach noch kein Beispiel gefunden einer zeitorientierten Lorentzmannigfaltigkeit gefunden wurde, die zwar zeitartig geodätisch vollständig, aber nicht lichtartig geodätisch vollständig ist. Der umgekehrte Fall kann allerdings auftreten, vgl. Beispiel II.5.32.ii.

Wir wollen uns nun das erste Singularitätentheorem für eine größere Klasse von Mannigfaltigkeiten anschauen:

### II.6.1. Singularitätentheorem von Raychaudhuri und Komar

**Satz II.6.1** (Raychaudhuri [16], Komar [8]). *Sei  $(M = I \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, g = -dt^2 + g_{ij}(t)dx^i \otimes dx^j)$  nicht flach und Lösung der Einsteingleichung mit  $\Lambda = 0$ . Es gelte  $T_{00} + \frac{1}{2}\text{tr}_g T \geq 0$  und  $T_{00} \geq 0$  mit  $\text{tr}_g T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ . Falls  $T_{00} \equiv 0$  gilt, sei schon  $T_{\mu\nu} = 0$ . Dann ist  $I$  ein mindestens einseitig endliches Intervall. Insbesondere ist  $M$  nicht zeitartig geodätisch vollständig.*

Vorl. 22

**Bemerkung II.6.2.** Falls  $T$  der Energieimpulstensor einer perfekten Flüssigkeit mit Strömungsvektorfeld  $V = \partial_t$  ist, vgl. (II.23), also  $T_{00} = \rho$ ,  $T_{ii} = \mathfrak{p}$  und  $T_{\mu\nu} = 0$  für  $\mu \neq \nu$ . Dann entspricht  $T_{00} + \frac{1}{2}\text{tr}_g T \geq 0$ , der Bedingung  $\rho + 3\mathfrak{p} \geq 0$ . Das  $\rho + 3\mathfrak{p} \geq 0$  kam schon bei FLRW in (II.25) und Lemma II.4.33 vor. D.h. insbesondere, dass Lemma II.4.33 ein Spezialfall dieses Satzes darstellt.

Auf die Schwarzschildmetrik kann der letzte Satz nicht angewendet werden, da die Metrik nicht die obige Form hat.

*Beweis von Satz II.6.1.* Da  $g$  die Form,  $g = -dt^2 + g_{ij}(t)dx^i \otimes dx^j$  hat, sind die Kurven  $c(s) = (s, x)$  für alle  $x \in U$  zeitartige Geodätische. Wenn wir also zeigen, dass  $I$  endlich ist, folgt automatisch, dass  $M$  nicht zeitartig geodätisch vollständig ist.

Aus der Einsteingleichung  $\text{Ric}_{\mu\nu} - \frac{\text{scal}}{2}g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$  folgt durch  $g$ -Kontraktion von  $\mu\nu$ , dass  $-\text{scal} = \text{tr}_g T$  und damit

$$\text{Ric}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\text{tr}_g T. \tag{II.27}$$

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

Nach Voraussetzung ist somit  $\text{Ric}_{00} \geq 0$ .

Setzen wir  $\chi_{ij} = \partial_t g_{ij}(t)$ , dann kann man nachrechnen, dass bei der speziellen Form der Metrik Ric nur von  $\chi_i^i$  abhängt:

$$\text{Ric}_{00} = -\frac{1}{2}\partial_t \chi_i^i - \frac{1}{4}\chi_{ij}\chi^{ij} \geq 0. \quad (\text{II.28})$$

Zusammen mit  $\chi_{ij}\chi^{ij} = g_{kj}\chi_i^j g^{\ell j}\chi_\ell^i = \chi_i^k \chi_k^i$  und  $(\text{tr}A)^2 \leq n \text{tr}AA^T$  für  $n \times n$  Matrizen\* (hier  $n = 3$ ) erhalten wir so<sup>†</sup>

$$-\partial_t \chi_i^i \geq \frac{1}{6}(\chi_i^i)^2.$$

Sei nun  $\chi_i^i(t_0, x_0) < 0$  für ein  $(t_0, x_0) \in M$ . Dann folgt  $\chi_i^i(t, x_0) < \chi_i^i(t_0, x_0)$  für alle  $t \geq t_0$ . Wir setzen  $f(t) = -\chi_i^i(t, x_0)$  und haben damit  $\partial_t f^{-1} \leq -\frac{1}{6}$ , also  $f^{-1} \leq f_0^{-1} - \frac{1}{6}(t - t_0)$  mit  $f_0 = f(t_0) = -\chi_i^i(t_0, x_0) > 0$ . Für wachsendes  $t$  wird die rechte Seite immer negativer, aber  $f(t) > f_0$  für alle  $t > t_0$ . Damit kann  $f$  nicht für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert sein und  $I$  muss von oben beschränkt sein. Analog folgt  $I$  ist von unten beschränkt für  $\chi_i^i(t_0, x_0) > 0$  für ein  $(t_0, x_0) \in M$ .

Sei nun  $\chi_i^i \equiv 0$ . Dann folgt aus (II.28) zusammen mit  $g_{ij}$  Riemannsch, dass  $0 \geq \chi_{ij}\chi^{ij} = \chi_{ij}\chi_{k\ell}g^{ik}g^{j\ell} = |\chi_{ij}|_{g_{ij}}^2$  und damit  $\chi_{ij} \equiv 0$  ist. Also ist  $\text{Ric}_{00} = T_{00} + \frac{1}{2}\text{tr}_g T_{\mu\nu} = 0$  und damit  $T_{00} = \text{tr}_g T_{\mu\nu} = 0$ . Nach Annahme ist dann  $T_{\mu\nu} = 0$  und damit  $\text{Ric}_{\mu\nu} = 0$ . Aufgrund der Form von  $g$  verschwindet dann schon die Ricci-Krümmung auf  $\{t = \text{const}\}$  bzgl. der induzierten Metrik  $g_{ij}(t)$ . Für eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit bestimmt aber der Riccitenor schon den Riemannschen Krümmungstensor. Damit kann man nachrechnen, dass auch schon der Riemannsche Krümmungstensor von  $M$  verschwindet. Das ist ein Widerspruch. Also kann  $\chi_i^i$  nicht überall verschwinden.  $\square$

**Bemerkung II.6.3.** Die Bedingungen an  $T_{00}$  und  $T_{00} + \frac{1}{2}\text{tr}_g T$  werden als eine Art von Energiebedingung verstanden. Alle bekannten Singularitätentheoreme enthalten eine Art von Energiebedingung (Eigentlich ist Energie ja eine globale Größe, also eher positive Energiedichte. Das implementiert man über eine Art Positivitätsbedingung der quadratischen Form zu  $T$ . Aber da gibt es verschiedene Möglichkeiten, die für perfekte Flüssigkeiten 'im Großen und Ganzen das gleiche' bedeuten, da Drücke normalerweise nicht negativ sind.). Häufig auftretende Bedingungen fassen wir in folgender Tabelle zusammen. Die rechte Spalte gibt immer die jeweiligen Implikationen für eine perfekte Flüssigkeit an:

\*Überprüft man direkt auf Diagonalmatrizen mit der Ungleichung zum arithmetischen und quadratischen Mittel

<sup>†</sup>Diese Differentialgleichung ist eine Riccati-Differentialgleichung (bzw. eine spezielle Form davon). Diese kommt oft in Fragen zu 'wie verhalten sich nahe beieinanderliegende Geodätische' – im ART-Kontext ist das stark mit der Raychaudhuri-Gleichung verwandt. Im Riemannschen Kontext kommt das viel in der Vergleichsgeometrie vor.

Name		Für perfekte Flüssigkeiten
Lichtenergiebedingung (null energy condition)	$T(X, X) \geq 0$ für alle $X$ zukunftsgerichtet und lichtartig	$\rho + \mathfrak{p} \geq 0$
schwache Energiebedingung (weak energy condition)	$T(X, X) \geq 0$ für alle $X$ zukunftsgerichtet und zeitartig	$\rho + \mathfrak{p} \geq 0, \rho \geq 0$
dominante Energiebedingung (dominant energy condition)	schwache Energiebedingung und $-T(Y, \cdot)^\ddagger$ ist zukunftsgerichtet und kausal für alle zukunftsgerichteten kausalen $Y$	$\rho \geq  \mathfrak{p} $
starke Energiebedingung (strong energy condition)	$(T - \frac{1}{2}(\text{tr}_g T)g)(X, X) \geq 0$ für alle $X$ zukunftsgerichtet und zeitartig	$\rho + \mathfrak{p} \geq 0, \rho + 3\mathfrak{p} \geq 0$

Die Energiebedingung aus dem letzten Singularitätentheorem ist sogar noch etwas stärker als die starke Energiebedingung hier.

### II.6.2. Geometrie von Untermannigfaltigkeiten

Sei  $S$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit einer  $n$ -dimensionalen Riemannschen oder Lorentzischen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ , vgl. Def. II.5.45. Sei  $h := g|_S$  nichtentartet (ist kein Automorphismus, vgl. Bem. II.1.6). Ist  $h$  Riemannsch oder Lorentsch, so nennen wir  $(S, h)$  eine *Riemannsche* bzw. *Lorentzsche Untermannigfaltigkeit*.

Sei  $v \in T_p M$  für  $p \in S$ . Sei  $N_p S := \{v \in T_p M \setminus T_p S^* \mid g(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in S\}$ . Dann gilt  $T_p M = T_p S \oplus N_p S$ . Den Anteil von  $v$  in  $N_p S$  bezeichnen wir mit  $v^{\text{nor}}$  (der *normale* Anteil) und den Anteil von  $v$  in  $T_p S \subset T_p M$  mit  $v^{\text{tan}}$  (den *tangentialen* Anteil).

Seien  $\nabla^M$  bzw.  $\nabla^S$  die Levi-Civita Zusammenhänge zu  $(M, g)$  bzw.  $(S, g)$ . Dann gilt für  $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$  (Direktes Nachrechnen):

$$\nabla_X^S Y = (\nabla_X^M Y)^{\text{tan}}$$

und damit  $(\nabla_X^M Y - \nabla_X^S Y)(p) \in N_p S$ .

**Lemma II.6.4.** Die Abbildung  $II$  definiert auf  $\mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S)$  und gegeben durch  $II(X, Y) = \nabla_X^M Y - \nabla_X^S Y$ , heißt zweite Fundamentalform der Untermannigfaltigkeit,<sup>†</sup> ist symmetrisch und bilinear und es gilt  $II(X, Y)(p) \in N_p S$ .

*Beweis.* Bilinear folgt, da die Differenz zweier Zusammenhänge immer ein  $(0, 2)$ -Tensor ist. Symmetrie folgt aus  $\nabla_X^{M/S} Y - \nabla_Y^{M/S} X = [X, Y]$ .  $\square$

\* $T_p S$  kann man direkt als Teilmenge von  $T_p M$  auffassen, da jede Kurve in  $S$  auch eine in  $M$  ist.

†Die Metrik  $g$  wird auch als *erste Fundamentalform* bezeichnet.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

**Satz II.6.5.** Sei  $S \subset M$  eine Untermannigfaltigkeit wie oben. Dann gilt die Gaußgleichung

$$g(R^M(X, Y)Z, W) = g(R^S(X, Y)Z, W) - g(\Pi(X, W), \Pi(Y, Z)) + g(\Pi(X, Z), \Pi(Y, W)) \quad (\text{II.29})$$

für alle  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(S)$  und die Codazzigleichung

$$(R^M(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^M \Pi)(Y, Z) - (\nabla_Y^M \Pi)(X, Z) \quad (\text{II.30})$$

für alle  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(S)$  und wobei  $\perp$  der Anteil des Vektors ist, der normal auf  $S$  steht und  $(\nabla_X^M \Pi)(Y, Z) := (\nabla_X \Pi(Y, Z))^\perp - \Pi(\nabla_X^S Y, Z) - \Pi(Y, \nabla_X^S Z)$  sei.

*Beweis.* Sei  $R^M$  bzw.  $R^S$  der Riemannsche Krümmungstensor von  $(M, g)$  bzw.  $(S, g)$ . Sei  $\nu_i(p)$  eine lokale Orthonormalbasis von  $N_p S$ , die glatt vom Punkt abhängt. Dann sei  $\Pi(X, Y) = \Pi^i(X, Y)\nu_i$  und es gilt

$$\begin{aligned} \nabla_X^M \nabla_Y^M Z &= \nabla_X^M (\nabla_Y^S Z + \Pi(Y, Z)) \\ &= \nabla_X^S \nabla_Y^S Z + \Pi(X, \nabla_Y^S Z) + X \cdot \Pi^i(Y, Z)\nu_i + \Pi^i(Y, Z)\nabla_X^M \nu_i \\ R^M(X, Y)Z &= R^S(X, Y)Z + \Pi(X, \nabla_Y^S Z) + X \cdot \Pi^i(Y, Z)\nu_i + \Pi^i(Y, Z)\nabla_X^M \nu_i \\ &\quad - \Pi(Y, \nabla_X^S Z) - Y \cdot \Pi^i(X, Z)\nu_i - \Pi^i(X, Z)\nabla_Y^M \nu_i - \Pi([X, Y], Z) \\ &= R^S(X, Y)Z + \Pi^i(Y, Z)\nabla_X^M \nu_i + (\nabla_X^S \Pi^i)(Y, Z)\nu_i \\ &\quad - \Pi^i(X, Z)\nabla_Y^M \nu_i - (\nabla_Y^S \Pi^i)(X, Z)\nu_i. \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

Daraus folgt direkt durch

$$\begin{aligned} g(R^M(X, Y)Z, W) &= g(R^S(X, Y)Z, W) + \Pi^i(Y, Z)g(\nabla_X^M \nu_i, W) - \Pi^i(X, Z)g(\nabla_Y^M \nu_i, W) \\ &= g(R^S(X, Y)Z, W) + \Pi^i(Y, Z) \underbrace{g(\nu_i, \nabla_X^M W)}_{=\Pi^i(X, W)} - \Pi^i(X, Z) \underbrace{g(\nu_i, \nabla_Y^M W)}_{=\Pi^i(X, W)} \\ &= g(R^S(X, Y)Z, W) + g(\Pi(X, W), \Pi(Y, Z)) - g(\Pi(X, Z), \Pi(Y, W)) \end{aligned}$$

die Gaußgleichung.

Mit  $(R^S(X, Y)Z)^\perp = 0$  folgt aus (II.31) dann direkt die Codazzigleichung.  $\square$

**Definition II.6.6.** Der *mittlere Krümmungsvektor* ist definiert als  $H := \text{tr}_h \Pi^*$

**Bemerkung II.6.7.**

- (i)  $H(p) \in N_p S$
- (ii) Ist  $S$  eine orientierte Hyperfläche mit gewähltem Einheitsnormalenvektorfeld  $N$ , dann ist  $H \parallel N$  und der Proportionalitätsfaktor wird *mittlere Krümmung* genannt.

---

\*Manchmal/oft statt dieser Definition mit anderer Normalisierung:  $H := \frac{1}{\dim S} \text{tr}_h \Pi$ .

### II.6.2.1. Brennpunkte von Untermannigfaltigkeiten

**Definition II.6.8.** Sei  $S^m \subset M^n$  eine Untermannigfaltigkeit. Sei  $p \in S$  und sei  $\nu_1(q), \dots, \nu_{m-n}(q)$  eine Basis der Normalenraumes  $N_q S$  für  $q$  in einer Umgebungen  $U \subset S$  von  $p$ , welche glatt von  $q$  abhängt.

Sei  $\exp^\perp: \mathbb{R}^{m-n} \times U$  definiert durch  $(a, q) \mapsto \exp_q(a^i \nu_i(q))$ . Ein Punkt  $x = \exp^\perp(a, q)$  heißt *Brennpunkt* von  $S$ , falls  $d_x \exp^\perp$  nicht injektiv ist.

#### Bemerkung II.6.9.

- (i) Der Begriff des Brennpunktes ist unabhängig von der Basiswahl.
- (ii) Ist  $S = \{p\}$ , dann ist  $\exp^\perp = \exp$  und  $x = \exp_p(v)$  ist Brennpunkt von  $S$ , falls  $x$  konjugierter Punkt von  $p$  entlang der Geodätischen  $\exp_p(tv)$  ist.

**Satz II.6.10.** Sei  $M$  eine (zeitorientierte) Lorentzmannigfaltigkeit und  $\Sigma \subset M$  eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit. Sei  $c: [0, T] \rightarrow M$  eine (zukunftsgerichtete) kausale Kurve mit  $c(0) = p \in \Sigma$ . Dann gibt es beliebig nahe bei  $c$  eine (zukunftsgerichtete) zeitartige Kurve von  $\Sigma$  nach  $c(T)$  oder  $c$  ist bis auf Umparametrisierung eine (zukunftsgerichtete) lichtartige Geodätische mit  $\dot{c}(0) \in N_p \Sigma$ , so dass  $\Sigma$  längs  $c$  keine Brennpunkte vor  $c(T)$  hat.

Der Beweis geht konzeptionell ähnlich wie ÜA 43...

### II.6.3. Singularitätentheorem von Penrose

Das erste Theorem über die Existenz von Singularitäten, dass ohne Symmetrieannahmen und ohne nähere Spezifikation der Metrik auskommt, ist von Penrose (1965). Ziel war ein Theorem, dass das Auftreten einer Singularität in einem Stern, der in seinem Schwarzschildradius kollabiert.

**Satz II.6.11.** (Penrose [14])<sup>\*</sup> Sei  $(M, g)$  eine vierdimensionale Lorentzmannigfaltigkeit, die die folgenden Bedingungen erfüllt

- (i)  $Ric(X, X) \geq 0$  für alle lichtartigen Vektoren  $X^\dagger$
- (ii) Es gibt eine nichtkompakte Cauchyhyperfläche  $S$  in  $M$ .
- (iii) Es gibt eine nichtleere geschlossene raumartige achronale 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit  $\Sigma \subset S$ , deren mittlerer Krümmungsvektor zeitartig (und vergangenheitsgerichtet) ist.

Dann ist  $(M, g)$  nicht (zukunftsgerichtet) lichtartig geodätisch vollständig.

**Bemerkung II.6.12.** Bedingung (i) entspricht der Lichtenergiebedingung für Lösungen der Einsteingleichungen mit  $\Lambda = 0$  (vgl. Bemerkung II.6.3 zusammen mit (II.27)).

<sup>\*</sup>Dafür hat Penrose 2020 den Physiknobelpreis erhalten, siehe auch <https://mediatheque.lindau-nobel.org/files/38884>.

<sup>†</sup>Das ist die Energielichtbedingung für Lösungen der Einsteingleichung.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

Bevor wir das Theorem beweisen, schauen wir uns einige Beispiele an:

**Beispiel II.6.13.** (i) (Schwarzschildinnenraum) Wir setzen  $S = \mathbb{R} \times \{r_0\} \times S^2 \subset \mathbb{R} \times (0, r_S) \times S^2$  und wollen als erstes zeigen, dass  $S$  eine raumartige nichtkompakte Cauchyhyperfläche ist. (Da wir im Schwarzschildinnenraum sind, ist  $\partial_t$  raumartig und  $\partial_r$  zeitartig.) Es ist klar, dass  $S$  nichtkompakt und eine Riemannsche Hyperfläche mit Einheitsnormalenvektorfeld  $(\frac{r_S}{r} - 1)^{\frac{1}{2}} \partial_r$  ist. Man muss sich nun nur überlegen, dass jede zeitartige nichterweiterbare Kurve jedes Kompaktum des Schwarzschildinnenraums verlassen muss und damit alle  $r$  und  $t$ -Koordinaten abbildet und damit  $S$  schneidet. Sei dazu  $c(s) = (t(s), r(s), \gamma(s))$  eine zeitartige Kurve mit  $\gamma$  eine Kurve in  $S^2$ . Dann ist

$$0 > g(\dot{c}, \dot{c}) = -(1 - \frac{r_S}{r})\dot{t}^2 + (1 - \frac{r_S}{r})^{-1}\dot{r}^2 + r^2 g_{S^2}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$$

und damit  $(\dot{r})^2 > 0$ . Also ändert  $\dot{r}$  das Vorzeichen nicht und  $S$  wird höchstens einmal geschnitten. Weiterhin folgt aus

$$t(s_1) - t(s_0) = \int_{s_0}^{s_1} \dot{t}(u) du \leq \int_{s_0}^{s_1} |1 - \frac{r_S}{r(u)}|^{-1} \dot{r}(u) du = [r + r_S \ln |r - r_S|]_{r(s_0)}^{r(s_1)},$$

das jede nichterweiterbare zeitartige Kurve in einem Punkt den Radius  $r_0$  haben muss. Damit ist  $S$  eine nichtkompakte Cauchyhyperfläche.

Wir setzen  $\Sigma = \{0\} \times \{r_0\} \times S^2$ . Man kann nachrechnen, dass  $H = -\frac{1}{r_0} \partial_r$  ist. Damit ist  $H$  zeitartig und vergangenheitsgerichtet.

Da der Schwarzschildraum Riccifläch ist, sind alle Bedingungen von Penrose Singularitätentheorem erfüllt, und es muss lichtartig geodätisch unvollständig sein. Das ist natürlich richtig, wie wir schon früher überprüft hatten.

(ii) FLRW erfüllt für  $\rho + \mathbf{p} \geq 0$  auch die Voraussetzungen von Penrose Singularitätentheorem.

*Beweis von Satz II.6.11.* Wir wählen eine glatte Zeitfunktion  $t: M \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $S = t^{-1}(0)$ . Das ist möglich nach Folgerung II.5.46 und definiert uns eine Zeitorientierung und alle  $t^{-1}(s)$  sind Cauchyhyperfläche für alle  $s \in \mathbb{R}$ .

Sei  $n$  jeweils das zukunftsgerichtete Einheitsnormalenvektorfeld von  $t^{-1}(s)$  in  $M$  für alle  $s$ . Damit ist  $n \in \mathfrak{X}(M)$  mit  $g(n, n) = -1$ . Somit gibt es  $\psi_s: M \rightarrow M$  den Fluss entlang  $n$  (für alle  $s \in \mathbb{R}$ ). Sei  $\nu$  ein Einheitsnormalenvektorfeld von  $\Sigma$  in  $S$ . Da  $\Sigma \subset S$  beide Riemannsch sind, ist  $\nu$  raumartig. Aber  $\nu$  ist nicht eindeutig, da wir auch  $-\nu$  wählen könnten. Wir werden weiter unten mit beiden arbeiten, aber hier erst einmal schauen, was wir aus einem folgern können.

Für  $p \in \Sigma$  sei  $c_p$  die lichtartige Geodäte mit  $c_p(0) = p$  und  $\dot{c}_p(0) = \ell(p) := n(p) + \nu(p)$  (Es ist  $g(\dot{c}_p(0), \dot{c}_p(0)) = -1 + 1 = 0$ ).

Was können wir über die speziellen lichtartigen Geodätischen  $c_p$  sagen?

## II.6. Singularitäten

Für festes  $s \in \mathbb{R}$  sei  $\exp^\perp: (-\epsilon, \epsilon) \times \psi_s(\Sigma) \rightarrow M$  für ein  $\epsilon > 0$  definiert durch  $\exp(u, p) := c_p(u)$ .

Sei  $q = \exp^\perp(u_0, p)$  ein Punkt in dem  $d_{(u_0, p)}\exp^\perp$  injektiv ist. Sei  $\kappa: \tilde{U} \subset \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine lokale Karte um  $p$ . Dann sind  $(u, s, x = (x^1, x^2)) \in V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mapsto \exp^\perp(u, \psi_s(\kappa^{-1}(x)))$  lokale Koordinaten\* auf einer offenen Umgebung  $U \subset M$  um  $q$ . In diesen lokalen Koordinaten gilt  $g_{uu} = 0$  (da  $\partial_u$  lichtartig ist). Außerdem gilt auf  $g_{us} = -1$  und  $g_{ux^i} = 0$ , da diese Identitäten auf  $\psi_s(\Sigma)$  (also für  $u = 0$ ) gelten und

$$\begin{aligned} \partial_u g_{u\mu} &= g(\underbrace{\nabla_u \partial_u}_{\text{da } c_p(u) \text{ Geod.}}, \partial_\mu) + g(\partial_u, \nabla_u \partial_\mu) \stackrel{\text{torsionsfrei}}{=} g(\partial_u, \nabla_\mu \partial_u) = \frac{1}{2} \partial_\mu g(\partial_u, \partial_u) = 0 \end{aligned}$$

ist.

Damit hat die Metrik  $g$  in diesen lokalen Koordinaten die Form

$$g = \alpha ds \otimes ds - ds \otimes du - du \otimes ds + \beta_i (ds \otimes dx^i + dx^i \otimes ds) + \gamma_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Als Matrix ist  $g = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & \beta_i \\ -1 & 0 & 0 \\ \beta_i & 0 & \gamma_{ij} \end{pmatrix}$  und die Inverse ist  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -\alpha & \gamma^{ij} \beta_j \\ 0 & \gamma^{ij} \beta_j & \gamma^{ij} \end{pmatrix}$ .

Wegen  $0 > \det g = -\det \gamma_{ij}$ , muss damit  $g|_{\exp^\perp(u, \psi_s(\Sigma))}$  für festes  $u$  und  $s$  Riemannsch sein.

Außerdem rechnet man nach, dass

**Vorl. 23**

$$\text{Ric}_{uu} = -\partial_u \underbrace{(\gamma^{ij} \gamma_{ij, u})}_{=: \theta} - \gamma^{i\ell} \gamma^{jk} \gamma_{ki, u} \gamma_{\ell j, u}. \quad (\text{II.32})$$

Bevor wir im Beweis weitergehen, schauen wir uns erst einmal an, was die Bedeutung von  $\theta$  ist:

Oft wird  $\theta$  die Lichtexpansion (null expansion) genannt und man kann nachrechnen, dass  $\theta = \partial_u \ln(\det \gamma_{ij})^{\frac{1}{2}}$  ist. Damit misst  $\theta$  die Variation des Flächenelements der zweidimensionalen Fläche  $\exp(u, \psi_s(\Sigma))$  bei Änderung von  $u$ . Insbesondere sieht man: Eine Nullstelle von  $\det \gamma_{ij}$ , also eine Singularität von  $\theta$ , ist einen Brennpunkt zu  $\psi_u(\Sigma)$ .

Weiterhin ist mit  $\tilde{\ell} := 2n - \ell = n - \nu$

$$\begin{aligned} \text{II}(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) &= \nabla_{\partial_{x^i}}^M \partial_{x^j} - \nabla_{\partial_{x^i}}^S \partial_{x^j} = \Gamma_{ij}^s n + \Gamma_{ij}^u \ell \\ &= \frac{1}{2} g^{su} (-g_{ij, u}) n + \Gamma_{ij}^u \ell = \frac{1}{4} \gamma_{ij, u} (\ell + \tilde{\ell}) + \Gamma_{ij}^u \ell \\ H = \text{tr}_\gamma \text{II} &= \frac{1}{4} \gamma_{ij, u} \gamma^{ij} \tilde{\ell} + c \ell \text{ für } c = c(\alpha, \beta_i, \gamma_{ij}). \end{aligned}$$

---

\*Das ist das Analogon zu geodätischen Normalkoordinaten bzgl. eines Punktes aber nun bzgl. einer Untermannigfaltigkeit – nennt man Fermikoordinaten.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

Also ist  $\theta/4$  auch der Koeffizient vor  $\tilde{\ell}$ , wenn man den mittleren Krümmungsvektor in der Basis  $\{\ell, \tilde{\ell}\}$  darstellt.

Aus der Energielichtbedingung (energy null condition) folgt mit (II.32)

$$-\partial_u \theta \geq \gamma^{i\ell} \gamma^{jk} \gamma_{ki,u} \gamma_{\ell j,u} \geq \frac{1}{2} (\gamma^{i\ell} \gamma_{\ell i,u})^2 = \frac{1}{2} \theta^2,$$

wobei die letzte Ungleichung wieder  $(\text{tr}A)^2 \leq n \text{tr}AA^T$  wie im Beweis von Satz II.6.1 ist. Also  $\partial_u \theta + \frac{1}{2} \theta^2 \leq 0$ . Der Gleichheitsfall hat die Lösung  $\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta_0} + \frac{u}{2}$  mit  $\theta_0 := \theta(u=0)$ . Also ist  $\frac{1}{\theta} \geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{u}{2}$ .

Falls  $\theta_0 < 0$  ist, folgt aus  $\partial_u \theta + \frac{1}{2} \theta^2 \leq 0$ , dass  $\theta(u) < \theta_0 < 0$  für alle  $u > 0$  ist. Für  $u > \hat{u} := -\frac{2}{\theta_0}$ , wäre dann  $\theta(u)^{-1} \geq 0$ , was ein Widerspruch wäre. D.h. nach obigen Überlegungen muss es für ein  $u < \hat{u}$  einen konjugierten Punkt von  $\psi_u(\Sigma)$  geben.

Wir wollen nun obiges einmal für das raumartige Einheitsnormalenvektorfeld  $\nu$  und einmal für  $-\nu$  verwenden und nennen die zugehörigen  $\exp^\perp$ -Abbildungen  $\exp^\pm$  und die Lichtexpansionen  $\theta^\pm$ . Wir setzen  $\ell^\pm(p) := n(p) \pm \nu(p)$  für alle  $p \in \Sigma$ . Dann sind  $\ell^\pm(p)$  zukunftsgerichtete lichtartige Vektoren, die  $N_p \Sigma$  aufspannen. Damit ist der mittlere Krümmungsvektor  $H$  von  $\Sigma$  in  $M$  eine Linearkombination von  $\ell^\pm$ .

Aus obigen Bemerkungen zu  $\theta$  und  $H$  folgt, dass  $4H = \theta^+ \ell^- + \theta^- \ell^+$  ist.

Nach Annahme ist  $H(p) \in N_p \Sigma$  zeitartig und vergangenheitsgerichtet. Wegen  $g(4H, 4H) = -4\theta^+ \theta^-$  und  $0 < g(H, n) = -\theta^+ - \theta^-$ , folgt daraus  $\theta^\pm < 0$ . Da  $\Sigma$  kompakt ist, gibt es ein  $\theta_0 < 0$  mit  $\theta^\pm < \theta_0$ . Damit folgt aus obigen Überlegungen, dass die lichtartigen Geodätischen  $c_p(u)$ , die mit  $n(p) \pm \nu(p)$  in  $\Sigma$  starten, spätestens bei  $\hat{u} = -\frac{2}{\theta_0}$  auf einen Brennpunkt von  $\Sigma$  trifft. Nach Satz II.6.10 ist damit  $c_p$  für  $u > \hat{u}$  in  $I_+(\Sigma)$ .

Wir werden nun zeigen, dass es eine lichtartige zukunftsgerichtete Geodätische gibt, die orthogonal zu  $\Sigma$  startet, aber nicht für alle Parameter  $\mathbb{R}$  existiert:

Nehmen wir an, dass stimmt nicht, dann treten die Brennpunkte von oben für jedes  $c_p$  wirklich auf. Da  $\Sigma$  kompakt ist, ist auch  $A := \exp^+([0, \hat{u}], \Sigma) \cup \exp^-([0, \hat{u}], \Sigma)$  kompakt. Wieder nach Satz II.6.10 ist  $\partial I_+(\Sigma)$  dann eine Teilmenge von  $A$  und damit als abgeschlossene Menge wieder selbst kompakt.

Wir definieren nun eine Abbildung  $\pi: \partial I_+(\Sigma) \rightarrow \Sigma$  wie folgt: Sei  $X$  ein zeitartig es Vektorfeld. Die Flusslinien von  $X$  schneiden  $S$  genau einmal, da  $S$  eine Cauchyfläche ist. Nun soll  $\pi$  die Abbildung sein, die einem  $q \in \partial I_+(\Sigma)$  den Schnittpunkt der Flusslinie durch  $q$  mit  $S$  zuordnet. Diese Abbildung ist stetig. Da  $\partial I_+(\Sigma)$  kompakt ist, ist auch das Bild in  $S$  kompakt und damit abgeschlossen. Es bleibt zu zeigen, dass das Bild auch offen in  $S$  ist. Da  $S$  zusammenhängend ist, muss  $S$  damit auch schon kompakt sein, was uns den Widerspruch gibt.

Um zu zeigen, dass das Bild offen ist, überlegen wir uns zuerst, dass  $\pi$  injektiv ist: Sei  $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ , aber  $p_1 \neq p_2$ . Dann müssen  $p_1$  und  $p_2$  auf der gleichen Flusslinie zu  $X$  liegen. O.B.d.A. sei  $p_1 \in I_+(p_2)$ . Zusammen mit  $p_2 \in J_+(\Sigma)$  folgt mit Satz II.5.8  $p_1 \in I_+(\Sigma)$ . Da  $I_+(\Sigma)$  offen ist, ist dies ein Widerspruch zu  $p_1 \in \partial I_+(\Sigma)$ .

## II.7. Linearisierte Gravitationstheorie

Nehmen wir nun an, dass das Bild nicht offen ist. Dann gibt es ein  $p \in \partial I_+(\Sigma)$  und eine Folge  $q_n \in S \setminus \partial I_+(\Sigma)$  mit  $q_n \rightarrow q := \pi(p)$ . Sei  $r$  ein Punkt auf der zukunftsgerichteten Flusslinie von  $p$  aus und sei  $S_r := t^{-1}(t(r))$  die Cauchyfläche durch  $r$  bzgl. unserer gewählten Zeitfunktion  $t$ . Die Flusslinien von  $X$  durch  $q_n$  schneiden  $S_r$  genau einmal, sagen wir in  $r_n$ . Wegen stetiger Abhängigkeit des Flusses von den Anfangswerten haben wir  $r_n \rightarrow r$ . Da  $r \in I_+(\Sigma)$  und  $I_+(\Sigma)$  offen ist, ist  $r_n \in I_+(\Sigma)$  für  $n$  groß genug und wir haben eine Kurve von  $q_n \notin \pi(I_+(\Sigma))$  nach  $r_n \in I_+(\Sigma)$ . Damit muss die Flusslinie  $\partial I_+(\Sigma)$  schneiden und wir haben unseren Widerspruch.  $\square$

**Bemerkung II.6.14.** Oft wird statt unserer dritten Voraussetzung im Singularitätentheorem von Penrose geschrieben, dass es eine geschlossene zukunftsengefangene Fläche  $\Sigma \subset S$  gibt. Die Definition einer *zukunftsengefangenen Fläche*  $\Sigma \subset S \subset M$  ist, dass  $\Sigma$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von  $S$  ist, so dass die Zukunftslichtexpansionen  $\theta^\pm$  wie im obigen Beweis eingeführt, in allen Punkten von  $\Sigma$  negativ sind. Daraus folgt analog wie im obigen Beweis, dass der mittlere Krümmungsvektor  $H$  von  $\Sigma$  in  $M$  zeitartig und vergangenheitsgerichtet ist.

Analog gibt es den Begriff der vergangenheitsengefangenen Fläche  $\Sigma$ . Hier sollen  $\theta^\pm > 0$  sein (also  $H$  zeitartig und zukunftsgerichtet). Dies als dritte Voraussetzung führt zu vergangenheitsgerichteter lichtartiger Unvollständigkeit von  $M$ .

Wir führen noch ein weiteres Singularitätentheorem ohne Beweis an:

**Satz II.6.15** (Hawkings Singularitätentheorem). *Sei  $M^n$  eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentzmannigfaltigkeit mit  $\text{Ric}(X, X) \geq 0$  für alle  $X \in TM$  zeitartig. Sei  $S \subset M$  eine Cauchyhyperfläche mit mittlerem Krümmungsvektorfeld  $H$ . Sei  $\nu$  das zukunftsgerichtete Einheitsnormalenfeld an  $S$ . Gibt es ein  $a > 0$  mit  $g(H, \nu) \geq a$ , dann hat jede zukunftsgerichtete zeitartige Kurve, die in  $S$  startet, Länge  $\leq a^{-1}$ .*

## II.7. Linearisierte Gravitationstheorie

Wir wollen uns mit Störungstheorie erster Ordnung um Lösungen der Einsteingleichung beschäftigen. Wir beschränken uns hier auf Störungen der Minkoswkimetrik als Vakuumlösung.

Die Annahme ist also, dass sich unsere Metrik  $g$  lokal nur wenig von der Minkoswkimetrik  $\eta$  unterscheidet:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}$$

mit  $\epsilon > 0$  klein.

Damit erhalten wir mittels  $\delta_\gamma^\alpha = g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g^{\alpha\beta} (\eta_{\beta\gamma} + \epsilon h_{\beta\gamma})$  und dem Ansatz  $g^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} + \epsilon b^{\alpha\beta} + O(\epsilon^2)$ , dass

$$\begin{aligned} \delta_\gamma^\alpha &= \eta_{\beta\gamma} a^{\alpha\beta} \\ 0 &= \eta_{\beta\gamma} b^{\alpha\beta} + a^{\alpha\beta} h_{\beta\gamma}. \end{aligned}$$

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

Dies ergibt

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \epsilon \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} h_{\gamma\delta} + O(\epsilon^2)$$

und daraus erhalten wir für die Christoffelsymbole

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\alpha\delta} (\partial_{\beta} h_{\gamma\delta} + \partial_{\gamma} h_{\beta\delta} - \partial_{\delta} h_{\gamma\beta}) + O(\epsilon^2). \quad (\text{II.33})$$

Mit  $h_{\nu}^{\lambda} := \eta^{\lambda\mu} h_{\mu\nu}$ ,  $\square u := -\eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} u$  und  $f_{\alpha} := \partial_{\lambda} h_{\alpha}^{\lambda} - \frac{1}{2} \partial_{\alpha} h_{\lambda}^{\lambda}$  haben wir

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{\mu\nu} &= \epsilon (\partial_{\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} - \partial_{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) + O(\epsilon^2) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon (\square h_{\mu\nu} - \partial_{\lambda} \partial_{\mu} h_{\nu}^{\lambda} - \partial_{\lambda} \partial_{\nu} h_{\mu}^{\lambda} + \partial_{\nu} \partial_{\mu} h_{\lambda}^{\lambda}) + O(\epsilon^2) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon (\square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu} f_{\nu} - \partial_{\nu} f_{\mu}) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Die Linearisierung des Energieimpulstensors  $T_{\mu\nu} = \epsilon S_{\mu\nu} + O(\epsilon^2)$  zusammen mit (II.27) ergibt

$$\frac{1}{2} (\square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu} f_{\nu} - \partial_{\nu} f_{\mu}) = S_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \text{tr}_{\eta} S. \quad (\text{II.34})$$

Wäre  $f_{\alpha} \equiv 0$ , dann wären die linearisierten Vakuumgleichungen (mit  $\Lambda = 0$ ) einfach  $\square h_{\alpha\beta} = 0$  und damit ein System von hyperbolischen Differentialgleichungen. Eine Gleichung  $\square u = f$ ,  $f$  eine gegebene Funktion auf  $\mathbb{R}^4$  ( $u$  die gesuchte Funktion) hat immer eine Lösung. Bei gegebenen Anfangswerten  $u((0, z) \in \mathbb{R}^4)$  und  $\partial_t u((0, z))$  ist diese sogar eindeutig.

### II.7.1. Freiheit in der Koordinatenwahl

Da wir frei sind in der Wahl der Koordinaten, ergibt jede Lösung  $h$  und jeder Diffeomorphismus  $\varphi: M \rightarrow M$  mit  $\varphi^* h$  wieder eine Lösung. Man kann also keine eindeutige Lösung erwarten ohne die Wahl des Koordinatensystems einzuschränken:

Haben wir eine Einparameterfamilie von Diffeomorphismus  $\varphi_s$  mit  $\varphi_0 = \text{id}$ , dann ist  $X(p) = \frac{d}{ds} \big|_{s=0} \varphi_s(p)$  ein Vektorfeld und damit  $\tilde{h}_{\alpha\beta} = \frac{d}{ds} \big|_{s=0} \varphi_s^* g$ .

Seien  $y^{\alpha} = x^{\alpha} + \epsilon X^{\alpha}$  die neuen Koordinaten. Dann ist die neue Metrik im Punkt  $p$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu}(y(p)) &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial y^{\nu}} g_{\alpha\beta}(x(p)) \\ &= (\delta_{\mu}^{\alpha} - \epsilon X_{,\mu}^{\alpha}) (\delta_{\nu}^{\beta} - \epsilon X_{,\nu}^{\beta}) g_{\alpha\beta}(x(p)) \\ &= g_{\mu\nu}(x(p)) - \epsilon X_{,\mu}^{\alpha} g_{\alpha\nu}(x(p)) - \epsilon X_{,\nu}^{\beta} g_{\mu\beta}(x(p)) \\ &= g_{\mu\nu}(x(p)) - \epsilon (\eta_{\alpha\nu} X_{,\mu}^{\alpha} + \eta_{\alpha\mu} X_{,\nu}^{\alpha}) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Damit ist  $\tilde{h}_{\mu\nu}(y(p)) - h_{\mu\nu}(x(p)) = -\eta_{\alpha\nu}X_{,\mu}^\alpha - \eta_{\alpha\mu}X_{,\nu}^\alpha$ .

Wir wollen nun  $\tilde{f}_\alpha := \partial_\lambda \tilde{h}_\alpha^\lambda - \frac{1}{2} \partial_\alpha \tilde{h}_\lambda^\lambda$  berechnen:

$$\begin{aligned}\tilde{h}_\mu^\lambda &= h_\mu^\lambda - X_{,\mu}^\lambda - \eta_{\alpha\mu} \eta^{\nu\lambda} X_{,\nu}^\alpha \\ \tilde{h}_\lambda^\lambda &= h_\lambda^\lambda - 2X_{,\lambda}^\lambda \\ \tilde{f}_\alpha &= f_\alpha - X_{,\alpha\lambda}^\lambda - \eta_{\beta\alpha} \eta^{\nu\lambda} X_{,\nu\lambda}^\beta + X_{,\lambda\alpha}^\lambda = f_\alpha + \square X_\alpha.\end{aligned}$$

Um also  $\tilde{f}_\alpha = 0$  zu erreichen muss man  $\square X_\alpha = -f_\alpha$  lösen – wieder eine lineare hyperbolische Differentialgleichung.

Eine Wahl von Koordinaten, so dass  $f_\alpha = 0$  ist, nennt man *Lorentzzeichnung*. Wie bei jeder Eichung muss man sich auch hier überlegen, dass Koordinaten immer so gewählt werden können, dass diese Gleichheit erfüllt ist. Aber wir haben gesehen, dass dies einfach auf die Existenz von Lösungen von  $\square X_\alpha = f_\alpha$  zurückzuführen ist. Das ist immer möglich, wie wir oben schon bemerkt hatten.

In der Lösung für  $\square X_\alpha = f_\alpha$  können wir noch die Anfangswerte von  $X_\alpha$  frei bestimmen und so die Eichung 'verfeinern'.

Aus (II.34) ergibt sich in der Lorentzzeichnung

$$\square h_{\mu\nu} = 2S_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \text{tr}_\eta S. \quad (\text{II.35})$$

### II.7.2. Newtonscher Limes

Die Newtonsche Gravitationstheorie gibt in vielen Bereichen gute Voraussagen. Ein wichtiger Test der ART ist damit die Frage, ob die Voraussagen der ART in den Bereichen, wo man weiß, dass die Newtonsche Theorie gut ist, sich auf die Newtonschen reduzieren. Wir haben die Voraussagen der ART und der Newtonschen Gravitationstheorie in Abschnitt 1.1 für die Planetenbewegung verglichen. Nun wollen wir uns nun für Störungen der Minkoswkimetrik  $\eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$  anschauen, ob wir die Newtonschen Bewegungsgleichungen im Limes erhalten können.

Die Newtonschen Voraussagen stimmen i.A. gut bei schwacher Gravitation – wenn die relative Geschwindigkeit der Quellen viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist und der Spannungstensor im Energieimpulstensor viel kleiner als die Massenenergiedichte  $T_{00}$  ist.

Was heißt das für das Modell der perfekten Flüssigkeit aus Staub (also  $\mathbf{p} = 0$ )? Sei  $V$  das Strömungsvektorfeld des Staubes.  $V$  habe kleine räumliche Geschwindigkeit. D.h. wegen  $g(V, V) = -1$ , dass wir annehmen  $(V^0)^2 = 1 + O(\epsilon)$  und  $V^i = O(\epsilon)$ . Weiterhin sei die Energiedichte klein, also  $\rho = \epsilon \rho_0$  für festes  $\rho_0$ . Damit ist

$$T_{\mu\nu} = \rho g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} V^\alpha V^\beta = \epsilon \rho_0 \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} + O(\epsilon^2).$$

Damit ist  $\text{tr}_\eta T = -\epsilon \rho_0 + O(\epsilon^2)$ .

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

Für die linearisierte Einsteingleichung (II.35) folgt somit

$$\begin{aligned}\square h_{\mu\mu} &= \rho_0 \\ \square h_{\mu\nu} &= 0 \text{ sonst.}\end{aligned}$$

Für kleine Geschwindigkeiten der Änderungen muss  $h_{\mu\nu,0}$  klein sein. Dann folgt mit  $\square = \partial_t \partial_t - \Delta$ , dass  $-\Delta h_{\mu\mu} = \rho_0$  ist. Diese Gleichung erinnert an die Poissongleichung  $\Delta \Psi = 4\pi G \rho$  der Newtonschen Gravitationstheorie. Da sowohl  $h_{\mu\nu}$  als auch  $\Psi$  im Unendlichen verschwinden sollen, haben wir  $h_{\mu\nu} = -2\Psi \delta_{\mu\nu}$  (die Konstante kommt daher, dass wir in den Einsteingleichungen die Konstante vor dem Energieimpulstensors ignoriert hatten, diese aber beim Vergleich mit der Konstante in der Poissongleichung berücksichtigt werden muss.)

Überlegen wir uns nun, was das für die freie Bewegung von Testteilchen im Gravitationsfeld heißt. In der ART sollen sich diese auf Geodätische  $\gamma(s) = (t(s), x(s)) \in \mathbb{R}^4$  bewegen. Im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit soll  $\gamma$  kleine räumliche Geschwindigkeit haben soll, also  $(\dot{t})^2 \sim 1$  und  $\dot{x}^i \sim 0$ . Um es mit der Newtonschen Theorie zu vergleichen, interessieren wir uns für die räumlichen Koordinaten  $x^i$ :

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{00}^i = 0.$$

Mit der Lösung der  $h_{\mu\nu}$  von oben und der Gleichung (II.33) für die Christoffelsymbole folgt  $\Gamma_{00}^i = \epsilon \Psi_{,i} + O(\epsilon^2)$ . Also  $\ddot{x} = -\epsilon \nabla \Psi + O(\epsilon^2)$  die Newtonsche Bewegungsgleichung.

### II.7.3. Gravitationswellen

Die Idee ist, dass diese 'Welle' lokal durch eine beschleunigte Masse ausgelöst wird. Da sich in der Relativitätstheorie nichts schneller als mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, muss sich die Metrikänderung von ihrem Ursprung erst noch ausbreiten. In der Newtonschen Gravitationstheorie hingegen wirken sich Veränderungen der Massdichte instantan im gesamten Raum aus. Es kann also keine Gravitationswellen im Newtonschen geben.

Wir wollen nun untersuchen, ob es in der ART solche Wellen geben könnte. Dazu betrachten wir Lösungen der linearisierten Einsteingleichungen im Vakuum. Die Idee ist, dass der Bereich der Raumzeit in dem wir Messungen durchführen annähernd ein Vakuum ist und wir dort die Minkoswkimetrik haben. Weit weg davon befindet sich eine Gravitationsquelle, die z. B. beschleunigt wird. Dadurch ändert sich die Lösung der Einsteingleichung auch bei uns. Wir nehmen an, dass die Änderungen klein ist und unsere neue Lösung die linearisierte Vakuumeinsteingleichung erfüllen muss.

In der Lorentzzeichnung wollen wir also  $\square h_{\mu\nu} = 0$  lösen  $\Delta = \eta^{ij} \nabla_i \nabla_j$ . Als Ansatz nehmen wir eine ebene Welle  $h_{\mu\nu}(x) = \text{Re}(A_{\mu\nu} e^{i\eta(k,x)})$  mit  $x = (t = x^0, x^1, x^2, x^3)$  und  $k = (\omega := k^0, k^1, k^2, k^3)$ . Hier muss  $A$  eine symmetrische Matrix sein, da auch  $h$  symmetrisch sein soll. Dann ist

$$\square h_{\mu\nu} = \text{Re}(A_{\mu\nu} \underbrace{\eta^{\mu\lambda} \eta_{\mu\alpha} k^\alpha \eta_{\nu\beta} k^\beta}_{= \eta(k,k)} e^{i\eta(k,x)}).$$

## II.8. Zu Wellengleichungen auf Lorentzmannigfaltigkeiten

Also löst  $h_{\mu\nu}$  die Gleichung  $\square h_{\mu\nu} = 0$ , falls  $\eta(k, k) = 0$  ist, also  $k$  lichtartig ist – sich die Welle mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Der Vektor  $k$  heißt *Wellenvektor* der Welle. Eine allgemeine Lösung ist eine Kombination aus solchen einzelnen Wellen zu gegebenem Wellenvektor:

$$h_{\mu\nu}(x) = \operatorname{Re} \int_{\eta(k,k)=0} A_{\mu\nu}(k) e^{i\eta(k,x)} dk.$$

Wir können aber  $A_{\mu\nu}$  und  $k^\mu$  nicht unabhängig voneinander wählen. Da wir angenommen haben, dass wir uns in der Lorentzzeichnung befinden und damit  $\partial_\lambda h_\alpha^\lambda = \frac{1}{2} \partial_\alpha h_\lambda^\lambda$  für alle  $\alpha$  gelten muss. Für unser  $h_{\mu\nu}$  impliziert dies

$$A_\alpha^\lambda \eta_{\lambda\beta} k^\beta = \frac{1}{2} A_\lambda^\lambda \eta_{\alpha\beta} k^\beta.$$

Es bleibt noch zu überprüfen, dass wir wirklich eine nichttriviale 'Welle' gefunden haben. Bis jetzt könnte es noch immer sein, dass wir bloß durch komplizierte Wahl der Koordinaten nicht mehr sehen, dass die Metrik noch immer die Minkowskimetrik ist. Diese Bedenken kann man jedoch leicht aus der Welt schaffen, in dem man den Riemannschen Krümmungstensor berechnet und sieht, dass dieser nicht verschwindet.

2015 gab es den ersten direkten Nachweis von Gravitationswellen im LIGO-Experiment\*. Dies ist ein riesiges† Michelson-Interferometer, indem die lokalen Änderungen der Metrik durch die Gravitationswellen die Interferenz von Laserstrahlen verändern.

## II.8. Zu Wellengleichungen auf Lorentzmannigfaltigkeiten

Sei  $(M, g)$  eine Lorentzmannigfaltigkeit.

**Definition II.8.1.** Ein *Wellenoperator* auf  $(M, g)$  ist ein linearer Differentialoperator der in lokalen Koordinaten die Form

$$P = -g^{\alpha\beta} \partial_{x^\alpha} \partial_{x^\beta} + A_\alpha(x) \partial_{x^\alpha} + B(x),$$

wobei  $A_\alpha$  und  $B$  glatte Funktionen auf  $M$  sind.

**Beispiel II.8.2.** Der *d'Alembert Operator*  $\square_g = -\operatorname{div}_g \circ \operatorname{grad}_g$  ist ein Wellenoperator. Für den Minkowskiraum ist  $\square = \partial_t \partial_t - \sum_i \partial_{x^i} \partial_{x^i}$ .

Für allgemeines  $(M, g)$  ist in lokalen Koordinaten  $x^\mu$

$$\square_g = -g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu = -g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \text{Terme erster Ordnung}.$$

Wir schauen uns erst zwei einfachere Spezialfälle an und geben dann den Satz für den allgemeinen Fall:

\*<https://www.ligo.caltech.edu/>

†<https://de.wikipedia.org/wiki/LIGO>

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

### II.8.1. Wellengleichung im 2D-Minkowski

Für den Wellenoperator  $\partial_t^2 - \partial_x^2$  auf dem zweidimensionalen Minkowskiraum betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}(\partial_t^2 - \partial_x^2)u(t, x) &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}^2 \\ u|_{t=0} &= u_0 && \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R} \\ \partial_t u|_{t=0} &= u_1 && \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}\end{aligned}$$

bei gegebenen  $u_0(x)$  und  $u_1(x)$ .

In diesem Spezialfall eines Wellenoperators bietet sich die Einführung lichtartiger Koordinaten  $v = \frac{1}{2}(t+x)$  und  $w = \frac{1}{2}(t-x)$  an. Dann ist  $\partial_v = \partial_t + \partial_x$  und  $\partial_w = \partial_t - \partial_x$  und damit

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)u = \partial_v \partial_w u = 0.$$

Eine allgemeine Lösung hat somit die Form  $u(t, x) = f_1(t+x) + f_2(t-x)$  für geeignete Funktionen  $f_1, f_2$  in einer Variablen.

Für die Lösung für unser Anfangswertproblems von oben muss somit

$$\begin{aligned}u_0(x) &= f_1(x) + f_2(-x) \\ u_1(x) &= f_1'(x) + f_2'(-x) \quad \implies \quad f_1(x) - f_2(x) = \int_0^x u_1(s) ds + c\end{aligned}$$

gelten. Damit sind die  $f_i$  durch die Anfangswerte (bis auf eine Konstante  $c$ ) eindeutig bestimmt als

$$\begin{aligned}2f_0(x) &= u_0(x) + \int_0^x u_1(s) ds + c \\ 2f_1(x) &= u_0(x) - \int_0^x u_1(s) ds - c\end{aligned}$$

Aber die Konstante  $c$  hebt sich in der Summe  $u(t, x) = f_1(t+x) + f_2(t-x)$  weg. Somit haben wir gesehen, dass unser Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung

$$2u(t, x) = u_0(t+x) + u_0(x-t) + \int_{t+x}^{x-t} u_1(s) ds$$

besitzt.

An der Struktur der Lösung sehen wir insbesondere, dass sich die Lösung mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet: Haben die Anfangswerte  $u_0, u_1$  (zur Zeit  $t_0$ ) Träger in  $(a, b)$ , dann hat  $u(t_1 > t_0, \cdot)$  Träger in  $(a - (t_1 - t_0), b + (t_1 - t_0))$ . Oder andersherum formuliert, der Wert der Lösung im Punkt  $(t_1, x_0)$ , hängt höchstens von den Anfangswerten  $u_0, u_1$  im Bereich  $x \in (x_0 - (t_1 - t_0), x_0 + (t_1 - t_0))$  ab. Man nennt diese Eigenschaft *endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit (finite speed of propagation)*.

Allgemeiner führt diese Beobachtung zum Begriff des Abhängigkeitsbereiches:

**Definition II.8.3.** Sei  $(M, g)$  global hyperbolisch mit Cauchyfläche  $S$ . Sei  $U \subset S$  offen. Dann ist das *Abhängigkeitsgebiet* (*domain of dependence*)  $D(U)$  von  $U$  definiert als alle Punkte von  $M$ , so dass für jeden Punkt  $p \in D(U)$  in der Zukunft von  $U$  jede vergangenheitsgerichtete kausale Kurve  $U$  schneidet und für jeden Punkt  $p \in D(U)$  in der Vergangenheit von  $U$  jede zukunftsgerichtete kausale Kurve  $U$  schneidet.

### II.8.2. Auf global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wollen wir das Existenzresultat für das Cauchyproblem von Wellengleichungen auf allgemeinen global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten angeben. Wir beweisen das hier nicht, aber die Grundeigenschaften, wie die Energieungleichungen und die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, die wir in obigen Spezialfällen gesehen haben, bleiben erhalten:

Vorl. 24

**Satz II.8.4.** Sei  $(M, g)$  eine global hyperbolische Mannigfaltigkeit und  $S \subset M$  eine glatte Cauchyfläche in  $M$ . Sei  $n$  das zukunftsgerichtete Einheitsnormalenvektorfeld von  $S$  in  $M$  und sei  $P$  ein Wellenoperator auf  $(M, g)$ . Dann gibt es für alle  $u_0, u_1 \in C_c^\infty(M)$  und  $f \in C_c^\infty(M)$  eine eindeutige Lösung des Cauchyansfangswertproblem

$$\begin{aligned} Pu &= f \\ u|_S &= u_0 \\ (\nabla_n u)|_S &= u_1. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\text{supp } u \subset J(K) \text{ für } K := \text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1 \cup \text{supp } f.$$

In der linearisierte Gravitationstheorie in Abschnitt II.7 waren die auftretenden Differentialgleichungen genau von obiger Form – *lineare hyperbolische Differentialgleichungen*. Für das Cauchyproblem zu den Einsteingleichungen werden wir allerdings sehen, dass selbst bei geeigneter Koordinatenwahl zwar die Terme in den höchsten Ableitungen der Metrik die Form eines Wellenoperators haben werde aber zusätzlich noch nichtlineare Terme in den nullten und ersten Ableitungen auftauchen.

Dann haben wir nicht mehr allgemeine globale Existenz von Lösungen, sondern:

**Satz II.8.5.** Sei  $(M, g)$  global hyperbolisch und  $S$  eine Cauchyfläche. Wir betrachten das quasilineare zweite Ordnung hyperbolische System

$$h^{\mu\nu}(x, u, \partial_\alpha u) \nabla_\mu \partial_\nu u^\beta = F^\beta(x, u, \partial_\alpha u)$$

mit  $u = u^\beta \partial_\beta$  für glatte Funktionen  $h^{\mu\nu}$  und  $F^\beta$  und  $\nabla$  der Levi-Civita-Zusammenhang zur Metrik  $g$ . Sei  $u_0 = u_0^\beta \partial_\beta$  eine Lösung.

Für Anfangswerte genügend nahe an den Anfangswerten von  $u_0$  auf  $S$  gibt es eine offene Umgebung  $V$  von  $S$  in  $M$ , so dass das obige System eine eindeutige Lösung  $u$  in  $V$  hat und  $(V, h(x, u, \partial_\alpha u))$  global hyperbolisch ist. Außerdem hängt die Lösung stetig von den Anfangswerten ab und für  $B \subset S$  hängt die Lösung in  $D(B)$  nur von den Anfangswerten in  $B$  ab.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

*Beweisidee.* Iteratives System

$$h^{\mu\nu}(x, u_i, \partial_\alpha u_i) \nabla_\mu \partial_\nu u_{i+1}^\beta = F^\beta(x, u_i, \partial_\alpha u_i)$$

startend mit  $u_0$ . Das ist nun linear in  $u_{i+1}^\beta$  bei gegebenem  $u_i^\beta$ , und wir können den letzten Satz anwenden. Dann muss man zeigen, dass die entstehende Folge  $u_i^\beta$  zu einer Lösung konvergiert.  $\square$

### II.9. Das Cauchyproblem der Einsteingleichungen

Wir kennen Anfangswertprobleme für Differentialgleichungen aus vielen Bereichen, z.B. schon von den Bewegungsgleichungen  $\ddot{x} = -\nabla\Psi$  in der Newtonschen Gravitationstheorie. Ist dort  $\Psi$  im  $\mathbb{R}^3$  gegeben und  $x$  und  $\dot{x}$  zur Zeit  $t = 0$  gegeben, dann bestimmt das die Lösung eindeutig.

In der ART suchen wir die Raumzeit selber. Es stellt sich also die Frage, was sollten die Größen sein, die wir als Anfangswerte verwenden zum Lösen der Einsteingleichung?

Im Prinzip haben wir schon Beispiele gesehen, z.B. in Satz II.4.31 für die Lösungen der Friedmanschen Differentialgleichungen für FLRW für Staub und für die linearisierte Einsteingleichungen im Vakuum.

Kommen wir nun allgemein zu global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten  $(M, g)$  mit einer Zeitfunktion  $t: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $S := \{t = 0\}$  eine Cauchyfläche. Kann man die Einsteingleichung als Anfangswertproblem für  $g$  bzgl. der Zeitrichtung lösen? Falls ja, sollte  $g$  auf  $S$  (also für  $t = 0$ ) und, da in den Einsteingleichungen zweite Ableitungen von  $g$  in allen Koordinatenrichtungen enthalten sind, auch noch die Zeitableitung von  $g_s := g|_{\{t=s\}}$  auf  $S$  gegeben sein.

Hier kommt wieder zu tragen, dass auch der Energieimpulstensor nicht schon von vorher bekannt ist, sondern noch durch zusätzliche Materiegleichungen bestimmt wird. Das heißt auch hier müssten wir ein Anfangswertproblem daraus machen. Der Einfachheit halber, betrachten wir hier erst einmal nur Vakuumlösungen. Dann können wir dieses zusätzliche Problem ignorieren.

Als erstes werden wir sehen, dass man im Gegensatz zu obigen Spezialfällen im Allgemeinen  $h$  und die ersten Zeitableitungen von  $h$  nicht unabhängig voneinander wählen kann.

#### II.9.1. Die Zwangsbedingungen

Sei  $(M, g)$  global hyperbolisch mit Metrik der Form  $g = -\beta^2 dt^2 + h_t$ . Seien  $x^i$  lokale Koordinaten von  $S$ . Durch Paralleltransport entlang der Flusslinien von  $\partial_t$  erhalten wir mit  $(t, x^i)$  lokale Koordinaten von  $M$  mit  $\partial_t \perp \partial_{x^i}$ . Sei  $h_{ij} = h_t(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})$ .

Dann ist  $n = \beta^{-1} \partial_t$  ein Einheitsnormalenvektorfeld mit  $g(n, n) = -1$ . Sei  $K: \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \rightarrow C^\infty(S)$  definiert durch  $\Pi(X, Y) = K(X, Y)n$ .

## II.9. Das Cauchyproblem der Einsteingleichungen

Aus  $\nabla_X^M Y - \nabla_X^S Y = K(X, Y)n$ ,  $\nabla_X^S Y \perp n$  folgt

$$K(X, Y) = -g(\nabla_X^M Y, n) = g(\nabla_X^M n, Y). \quad (\text{II.36})$$

Weiterhin ist  $2g(\nabla_X^M n, n) = X.g(n, n) = 0$  und damit  $\nabla_{\partial_{x^i}}^M n = a_i^k \partial_{x^k}$ . Die  $a_i^k$  bestimmen sich durch

$$g(\partial_{x^\ell}, \nabla_{\partial_{x^i}}^M n) = a_i^k h_{k\ell} \implies a_i^k = h^{k\ell} K(\partial_{x^\ell}, \partial_{x^i}) = h^{k\ell} K_{\ell i}. \quad (\text{II.37})$$

Damit ist  $\nabla_{\partial_{x^i}}^M (\partial_t = \beta n) = \beta_{,i} n + \beta h^{k\ell} K_{\ell i} \partial_{x^k}$ . Außerdem impliziert  $g(\nabla_n^M n, \partial_{x^i}) = -g(n, \nabla_n^M \partial_{x^i}) = -g(n, \nabla_{\partial_{x^i}}^M n) = 0$ , dass  $\nabla_n^M n = 0$  und  $\nabla_{\partial_t}^M \partial_t = \beta_{,0} \partial_t$  ist.

Es gilt

$$K_{ij} = K(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) = \frac{1}{2} \beta^{-1} h_{ij,0}$$

und damit  $h_{ij,0} = 2\beta K_{ij}$  sowie  $\partial_n h_{ij} = 2K_{ij}$ .

In den Anfangswerten unseres Cauchyproblem kann also statt der normalen Ableitung der  $h_{ij}$  die zweite Fundamentalform gegeben werden.

Sollen  $h$  und  $K$  wirklich von einer Riemannschen Hyperfläche in einer Lorentzmannigfaltigkeit kommen, können Sie nicht unabhängig voneinander gewählt werden:

**Satz II.9.1.** *Sei  $(M, g)$  eine Lorentzmannigfaltigkeit. Sei  $S$  eine Cauchyhyperfläche von  $(M, g)$  mit zweiter Fundamentalform  $II$ , welche wie oben einen symmetrischen  $(0, 2)$ -Tensor  $K$  induziert. Dann gilt auf  $S$  für  $h := g|_S$*

$$\begin{aligned} 2G_{nn} &:= 2G(n, n) = \text{scal}^S + |K|_h^2 - (\text{tr}_h K)^2 \\ G_{ni} &:= G(n, \partial_i) = -(\text{div}_h (K - (\text{tr}_h K)h))_i \end{aligned}$$

Die erste Gleichung heißt Hamiltonsche Zwangsbedingung und die zweite Impulszwangsbedingung.

*Beweis.* Es ist  $G(n, n) = \beta^{-2} G(\partial_t, \partial_t) = \beta^{-2} G_{00}$  und  $G(n, \partial_i) = \beta^{-1} G_{0i}$ . Da  $G_{\mu\nu} = \text{Ric}_{\mu\nu}^M - \frac{\text{scal}^M}{2} g_{\mu\nu}$  ist, müssen wir  $\text{Ric}^M$  und  $\text{scal}^M$  ausgedrückt in  $K$  und Krümmungsgrößen von  $S$  bestimmen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten dies auszurechnen. Wir bleiben hier in den lokalen Koordinaten  $(t, x^i)$ . Ein Vorteil ist die Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs für Koordinatenvektorfelder.

---

\*Die Vorzeichen sind in verschiedenen Quellen verschieden. In Choquet-Bruhat ist z.B.

$$\begin{aligned} 2G_{nn} &= \text{scal}^S - |K|_h^2 + (\text{tr}_h K)^2 \\ G_{ni} &= (\text{div}_h (K - (\text{tr}_h K)h))_i. \end{aligned}$$

Das liegt daran, dass dort die Riccirkrümmung  $\text{Ric}_{\alpha\beta} = R_{\gamma\alpha\beta}^\gamma$  – also das negative unserer Konvention ist.

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

Für die Riccikrümmung haben wir

$$\begin{aligned}\text{Ric}_{ik}^M &= h^{\ell j} R_{ij\ell k}^M - \beta^{-2} R_{i0k0}^M \\ \text{Ric}_{00}^M &= (R^M)_{0i0}^i = h^{ir} R_{0i0r}^M \\ \text{Ric}_{0i}^M &= (R^M)_{0ji}^j = h^{jk} R_{0jik}^M = h^{jk} R_{kij0}^M\end{aligned}$$

und für die Skalarkrümmung bedeutet dies

$$\text{scal}^M = g^{\alpha\beta} \text{Ric}_{\alpha\beta}^M = h^{ik} \text{Ric}_{ik}^M - \beta^{-2} \text{Ric}_{00}^M = h^{ik} h^{\ell j} R_{ij\ell k}^M - 2\beta^{-2} h^{ir} R_{0i0r}^M.$$

Wir brauchen also  $R_{ij\ell k}^M$ ,  $R_{kij0}^M$  und  $(R^M)_{0i0}^r$ . Dazu benutzen wir zum einen die Gaußgleichung (II.29)  $R_{ij\ell k}^M = R_{ij\ell k}^S + K_{i\ell} K_{jk} - K_{ik} K_{j\ell}$  und die Codazzigleichung (II.30)  $(R^M)_{ijk0} = -\beta((\nabla_i K)_{kj} - (\nabla_j K)_{ik})$ .

Es fehlt uns noch der Krümmungstensor mit zwei Nullen als Indizes:

$$\begin{aligned}R_{0i0r}^M &= g(R^M(\partial_t, \partial_{x^i})\partial_t, \partial_{x^r}) \\ &= g(\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_{x^i}} \partial_t - \nabla_{\partial_{x^i}} \nabla_{\partial_t} \partial_t, \partial_{x^r}) = g(\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_{x^i}} (\beta n) - \nabla_{\partial_{x^i}} \nabla_{\partial_t} \partial_t, \partial_{x^r}) \\ &= g(\nabla_{\partial_t} (\beta_{,i} n + \beta^2 h^{k\ell} K_{\ell i} \partial_{x^k}) - \nabla_{\partial_{x^i}} (\beta_{,0} n), \partial_{x^r}) \\ &= (\beta h^{k\ell} K_{\ell i})_{,0} h_{kr} + \beta^2 h^{k\ell} K_{i\ell} K_{ks} h^{su} h_{ur} - \beta_{,0} K_{ik} h^{ks} h_{sr} \\ &= \beta h_{,0}^{k\ell} K_{\ell i} h_{kr} + \beta K_{ri,0} + \beta^2 h^{k\ell} K_{\ell i} K_{kr} \\ &= -\beta h^{k\ell} K_{\ell i} \underbrace{h_{kr,0}}_{=2\beta K_{kr}} + \beta K_{ri,0} + \beta^2 h^{k\ell} K_{\ell i} K_{kr} \\ &= \beta K_{ri,0} - \beta^2 h^{k\ell} K_{\ell i} K_{kr},\end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichheit aus  $0 = (h_{kr} h^{k\ell})_{,0} = h_{kr,0} h^{k\ell} + h_{kr} h_{,0}^{k\ell}$  folgt.

Damit haben wir

$$\begin{aligned}\text{Ric}_{ik}^M &= h^{\ell j} R_{ij\ell k}^M - h_{k\ell} \beta^{-2} (R^M)_{0i0}^r \\ &= \text{Ric}_{ik}^S + h^{\ell j} (K_{i\ell} K_{jk} - K_{ik} K_{j\ell}) - h_{k\ell} \beta^{-2} (\beta K_{ki,0} - \beta^2 h^{r\ell} K_{\ell i} K_{kr}) \\ &= \text{Ric}_{ik}^S + h^{\ell j} (K_{i\ell} K_{jk} - K_{ik} K_{j\ell}) - h_{k\ell} (\beta^{-1} K_{ki,0} - h^{r\ell} K_{\ell i} K_{kr})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ric}_{00}^M &= h^{ir} R_{0i0r}^M = h^{ir} (\beta K_{ri,0} - \beta^2 h^{k\ell} K_{\ell i} K_{kr}) \\ \text{Ric}_{0i}^M &= -h^{jk} \beta ((\nabla_k K)_{ij} - (\nabla_i K)_{jk}) = \beta (h^{jk} (\nabla_i K)_{jk} - (\text{div}_h K)_i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{scal}^M &= h^{ik} h^{\ell j} R_{ij\ell k}^M - 2\beta^{-2} h^{ir} R_{0i0r}^M \\ &= \text{scal}^S + h^{ik} h^{\ell j} (K_{i\ell} K_{jk} - K_{ik} K_{j\ell}) - 2\beta^{-2} h^{ir} (\beta K_{ri,0} - \beta^2 h^{k\ell} K_{\ell i} K_{kr}) \\ &= \text{scal}^S + |K|_h^2 - (\text{tr}_h K)^2 - 2h^{ir} (\beta^{-1} K_{ri,0} - h^{k\ell} K_{\ell i} K_{kr}).\end{aligned}$$

## II.9. Das Cauchyproblem der Einsteingleichungen

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} G(n, n) &= \beta^{-2} G_{00} = \beta^{-2} (\text{Ric}_{00}^M + \frac{1}{2} \text{scal}^M \beta^2) \\ 2G(n, n) &= 2h^{ir} (\beta^{-1} K_{ri,0} - h^{k\ell} K_{\ell i} K_{kr}) + \text{scal}^S + |K|_h^2 - (\text{tr}_h K)^2 - 2h^{ir} (\beta^{-1} K_{ri,0} - h^{k\ell} K_{\ell i} K_{kr}) \\ &= \text{scal}^S + |K|_h^2 - (\text{tr}_h K)^2 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} G(n, \partial_{x^i}) &= \beta^{-1} G_{0i} = \beta^{-1} \text{Ric}_{0i}^M \\ &= h^{jk} (\nabla_i K)_{kj} - (\text{div}_h K)_i. \end{aligned}$$

Das heißt, es bleibt zu zeigen, dass  $h^{jk} (\nabla_i K)_{kj} = (\text{tr}_h K)_i$  gilt, denn dann folgt mit  $\text{div}_h(fh) = df$  die Behauptung: ( $\Gamma$  seien hier die Christoffelsymbole zu  $\nabla^S$ )

$$\begin{aligned} (\text{tr}_h K)_i &= h^{kj} K_{kj} + h^{kj} K_{kj,i} \\ h^{jk} (\nabla_i K)_{kj} &= h^{jk} K_{kj,i} - h^{jk} K_{rj} \Gamma_{ik}^r - h^{jk} K_{rk} \Gamma_{ij}^r \\ h^{jk} (\nabla_i K)_{kj} - (\text{tr}_h K)_i &= -h^{kj} K_{kj} - h^{jk} K_{rj} h^{rs} (h_{is,k} + h_{ks,i} - h_{ik,s}) \\ &= h^{\ell j} h^{kr} h_{r\ell,i} K_{kj} - h^{jk} K_{rj} h^{rs} h_{ks,i} = 0 \quad \square \end{aligned}$$

Das Problem wäre also: Gegeben sei eine  $(n-1)$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(S, h)$  und eine symmetrische Bilinearform  $K$  auf  $S$ , die die Zwangsbedingungen aus Satz II.9.1 erfüllt. Gibt es eine Vakuumlösung  $(M^n, g)$  der Einsteingleichungen, so dass es eine isometrische Einbettung  $S \hookrightarrow M$  gibt, deren zweite Fundamentalform durch  $K$  gegeben ist?

**Definition II.9.2.** Das Tripel  $(S, h, K)$  nennen wir *Anfangswerte*. Die Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  (falls existent) nennen wir *Einsteinentwicklung* der Anfangswerte. Ohne die Bedingung, dass  $(M, g)$  eine Lösung der Einsteingleichungen sein soll, nennen wir  $(M, g)$  nur *Entwicklung*.

### II.9.2. Wohlgestelltheit der Vakuumeinsteingleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir schauen, was wir über die Existenz einer Einsteinentwicklung sagen können, im Falle von Vakuum, also  $\text{Ric}^M \equiv 0$ .

Aus Bemerkung II.1.22.iii

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \frac{1}{2} g^{\delta\kappa} (g_{\beta\kappa,\alpha\gamma} - g_{\beta\gamma,\kappa\alpha} - g_{\alpha\kappa,\beta\gamma} + g_{\alpha\gamma,\kappa\beta}) + \text{Terme in } g_{\alpha\beta} \text{ und erste Abl.}$$

folgt

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{\alpha\gamma} &= \frac{1}{2} g^{\delta\kappa} (g_{\delta\kappa,\alpha\gamma} - 2g_{\delta\gamma,\kappa\alpha} + g_{\alpha\gamma,\kappa\delta}) + \text{Terme in } g_{\alpha\beta} \text{ und erste Abl.} \\ &= \frac{1}{2} \square g_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} g^{\delta\kappa} (g_{\delta\kappa,\alpha\gamma} - 2g_{\delta\gamma,\kappa\alpha}) + \text{Terme in } g_{\alpha\beta} \text{ und erste Abl.} \quad (\text{II.38}) \end{aligned}$$

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

Wäre nur der erste Term  $\frac{1}{2}\square_g g_{\alpha\gamma}$  da, wäre  $\text{Ric}^M \equiv 0$  wieder ein System hyperbolischer Differentialgleichungen. Allerdings haben wir noch weitere zweite Ableitungen der  $g_{\alpha\beta}$  und selbst die Terme in den ersten Ableitungen von  $g_{\alpha\beta}$  sind hochgradig nichtlinear.

Wir kümmern uns erst einmal um die weiteren zweiten Ableitungen und erinnern wir uns an die linearisierte Theorie, wo wir ein ähnliches Problem durch eine geeignete Wahl von Koordinaten gelöst haben (dort die Lorentzzeichnung). Hier wählen wir *harmonische Koordinaten*, diese zeichnen sich dadurch aus, dass  $\square_g x^\alpha = 0$  ist.

Man beachte, dass bei gegebenen lokalen Koordinaten auf  $S$  und Wahl einer Zeitableitung dieser Koordinaten auf  $S$  (z.B.  $x^\alpha, t = 0$ ) ist dies ein System hyperbolischer Differentialgleichungen und hat damit nach Satz II.8.4 eine Lösung. (Man beachte, dass die Lösung von  $g$  abhängt, da die Metrik in  $\square_g$  eingeht.)

Was folgt aus der Wahl der harmonische Koordinaten?

$$\begin{aligned}\partial_\mu x^\alpha &= \delta_\mu^\alpha \\ \square_g x^\alpha &= g^{\lambda\mu}(\partial_\mu \partial_\lambda x^\alpha - \partial_\nu x^\alpha \Gamma_{\lambda\mu}^\nu) = -g^{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha.\end{aligned}$$

In harmonische Koordinaten ist also  $g^{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha \equiv 0$  und damit

$$H_\beta := g^{\lambda\mu}(2g_{\lambda\beta,\mu} - g_{\mu\lambda,\beta}) = 0.$$

Leiten wir die letzte Gleichung in  $\gamma$ -Richtung ab, erhalten wir

$$H_{\beta,\gamma} = g^{\lambda\mu}(2g_{\lambda\beta,\mu\gamma} - g_{\mu\lambda,\beta\gamma}) + \text{Terme in ersten Abl.} = 0$$

Setzt man dies wiederum in (II.38) ein, erhält man

$$\text{Ric}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\square_g g_{\alpha\gamma} + \text{Terme in } g_{\alpha\beta} \text{ und erste Abl.} \quad (\text{II.39})$$

In harmonische Koordinaten ist  $\text{Ric}^M = 0$  in den höchsten Ableitungen ein System hyperbolischer Differentialgleichungen.

Wir definieren in (möglicherweise) beliebigen Koordinaten den *reduzierten Riccitenor* als

$$\text{Ric}_{\mu\nu}^H := \text{Ric}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu H_\nu + \frac{1}{2}\partial_\nu H_\mu.$$

und die *reduzierten Einsteinvakuumgleichung* als

$$\text{Ric}^H \equiv 0.$$

Dann ist

$$\text{Ric}_{\mu\nu}^H = \frac{1}{2}\square_g g_{\mu\nu} + \text{Terme in } g_{\mu\nu} \text{ und erste Abl.}$$

## II.9. Das Cauchyproblem der Einsteingleichungen

(in harmonischen Koordinaten ist  $\text{Ric}_{\mu\nu} = \text{Ric}_{\mu\nu}^H$ ) und damit bilden die reduzierten Einsteinvakuungleichung ein quasilineares zweite Ordnung hyperbolisches System wie in Satz II.8.5 .

Wenn wir schon eine Lösung kennen, können wir Satz II.8.5 verwenden, um für nahe Anfangswerte weitere Lösungen zu erhalten. Anfangswerte wären  $g_{\mu\nu}$  und  $g_{\mu\nu,0}$  zur der Anfangscauchyfläche ( $S = \{t = 0\}$ ) .

Eine Lösung zu  $g_{ij} = h_{ij} = \delta_{ij}, g_{00} = -1, g_{0i} = 0, g_{\alpha\beta,\gamma} = 0$  (also insbesondere  $g_{ij,0} = 2K_{ij} = 0$ ) ist der Minkowskiraum, denn dass ist eine Lösung zu den Vakuumeinsteingleichungen und die Standardminkowskikoordinaten sind harmonische Koordinaten.

Wir wählen als Anfangswerte zu den reduzierten Einsteingleichungen

$$\begin{array}{ll} g_{ij} = h_{ij} & g_{ij,0} = 2K_{ij} \\ g_{00} = -1 & g_{i0} = 0 \\ g_{00,0} = 0 & g_{0k,0} = h^{ij}(2h_{ik,j} - h_{jk,i}) \\ g_{i0,j} = 0, & \end{array}$$

wobei die ersten Zeile aus den Anfangsdaten ( $h, K$ ) folgt (zusammen mit der Wahl  $g_{00} = -1$ ) und die anderen Zeilen so gewählt sind, dass  $H_\alpha = 0$  auf  $S$  gilt:

$$\begin{aligned} H_0 &= h^{ij}(2g_{i0,j} - g_{j0,i}) - g_{00,0} \quad \text{auf } S \\ H_k &= h^{ij}(2h_{ik,j} - h_{jk,i}) - g_{0k,0} \quad \text{auf } S. \end{aligned}$$

Wir werden gleich sehen, warum wir wollen, dass  $H_\alpha = 0$  auf  $S$  gilt.

Für  $(h_{ij}, K_{ij})$  in  $C^1$  nahe  $(\delta_{ij}, 0)$  sind diese Anfangswerte nahe denen zum Minkowskibeispiel von oben. Damit können wir Satz II.8.5 anwenden und erhalten eine eindeutige Lösung  $g$  der reduzierten Einsteinvakuungleichung auf einer Umgebung  $V$  von  $S$ , so dass  $(V, g)$  global hyperbolisch ist.

Aber eigentlich wollten wir ja nicht die reduzierten Einsteinvakuungleichungen lösen, sondern die unreduzierten. Wir werden sehen, dass die besondere Wahl der Anfangswerte, so dass  $H_\alpha = 0$  auf  $S$  gilt, schon impliziert, dass  $H_\alpha \equiv 0$  für die gesamte Lösung ist. Somit haben wir sogar harmonische Koordinaten und damit schon eine Lösung der Einsteinvakuungleichung.

Dazu betrachten wir den Einsteintensor

$$G_{\mu\nu} = \text{Ric}_{\mu\nu}^H - \frac{\text{scal}_H}{2} g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu H_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu H_\mu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha H^\alpha.$$

wobei  $\text{scal}_H := g^{\alpha\beta} \text{Ric}_{\alpha\beta}^H$  ist.

Für eine Lösung der reduzierten Einsteinvakuungleichung  $\text{Ric}_{\mu\nu}^H = 0$  (und damit  $\text{scal}_H = 0$ ) folgt:

## II. Allgemeine Relativitätstheorie

Aus der Zwangsbedingung  $G_{\mu 0} = 0$  auf  $S$  erhalten wir

$$0 = -\partial_\mu H_0 - \partial_0 H_\mu + g_{\mu 0} \partial_\alpha H^\alpha.$$

Also (für  $\mu = i$ )  $\partial_i H_0 = -\partial_0 H_i$  und (für  $\mu = 0$ )  $-2\partial_0 H_0 = \partial_\alpha H^\alpha$ . Da die Anfangswerte so gewählt sind, dass  $H_\alpha \equiv 0$  auf  $S$  gilt, sind damit auch  $\partial_i H_\alpha \equiv 0$  auf  $S$ . Damit haben wir  $\partial_0 H_\alpha = 0$  auf  $S$ .

Aus der Divergenzfreiheit des Einsteintensors folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla^\mu G)_{\mu\nu} = g^{\beta\mu} \nabla_\beta \left( -\frac{1}{2} \partial_\mu H_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu H_\mu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha H^\alpha \right) \\ &= g^{\beta\mu} \left( -\frac{1}{2} \partial_\beta \partial_\mu H_\nu - \frac{1}{2} \partial_\beta \partial_\nu H_\mu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\gamma} \partial_\beta \partial_\alpha H_\gamma \right) + A_{\beta\nu}^{\alpha\beta} \partial_\alpha H^\beta \\ &= -\frac{1}{2} g^{\beta\mu} \partial_\beta \partial_\mu H_\nu - \frac{1}{2} g^{\beta\mu} \partial_\beta \partial_\nu H_\mu + \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} \partial_\nu \partial_\alpha H_\gamma + A_\nu^{\alpha\beta} \partial_\alpha H_\beta \\ &= -\frac{1}{2} g^{\beta\mu} \partial_\beta \partial_\mu H_\nu + A_\nu^{\alpha\beta} \partial_\alpha H_\beta + B_\nu^\alpha H_\alpha \end{aligned}$$

für geeignete  $A_{\beta\nu}^{\alpha\beta}$ ,  $B_\nu^\alpha$  als Funktionen in  $g_{\kappa\lambda}$ , dem Inversen und bis zu zweiten Ableitungen davon.

Also ist  $H_\alpha$  Lösung einer linearen hyperbolischen Differentialgleichungssystem (bei gegebener Metrik  $g$ ) wie in Satz II.8.4, dessen Anfangswerte verschwinden. Damit ist  $H_\alpha$  überall gleich Null und damit löst  $g$  nicht nur die reduzierten Einsteingleichungen, sondern sogar die Einsteinvakuumgleichungen.

Sei nun ein Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(S, h)$  und sei  $K_p$  für jedes  $p \in S$  eine symmetrische Bilinearform, die glatt vom Punkt abhängt, so dass die Zwangsbedingungen mit  $G \equiv 0$  erfüllt. Sei  $p \in S$  beliebig. Dann gibt es eine Umgebung von  $p$  für die nach obigen Überlegungen, die Einsteinvakuumgleichungen lösbar sind.

**Satz II.9.3** (Choquet-Bruhat). *Sei  $(S, h)$  eine  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei  $K_p$  für jedes  $p \in S$  eine symmetrische Bilinearform, die glatt vom Punkt abhängt. Seien die Zwangsbedingungen für  $G \equiv 0$  erfüllt. Dann gibt es (bis auf Isometrie) eine eindeutige Lorentzmannigfaltigkeit  $(M, g)$ , so dass*

- (i)  $(M, g)$  ist eine Lösung der Vakuum-Einsteingleichungen
- (ii)  $(M, g)$  ist global hyperbolisch mit Cauchyfläche  $S$
- (iii) Es ist  $h = g|_S$  und die zweite Fundamentalform von  $S$  in  $M$  ist  $K$ .
- (iv) Jede Lorentzmannigfaltigkeit  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ , die Bedingung (i)-(iii) erfüllt, kann isometrisch in  $(M, g)$  eingebettet werden.

Eine solche Lösung  $(M, g)$  wird maximale Cauchyentwicklung von  $(S, h, K)$  genannt. Seien  $(S, h, K)$  und  $(\tilde{S}, \tilde{h}, \tilde{K})$  Anfangswerte, die die Zwangsbedingungen erfüllen, und auf eine geschlossenen Teilmenge  $B \subset S$ ,  $\tilde{B} \subset \tilde{S}$  mit  $B \cong \tilde{B}$  übereinstimmen. Dann sind die Lösungen auf den Abhängigkeitsgebieten  $D(B)$  und  $D(\tilde{B})$  isometrisch.

# A. Sternmodell

## A.1. Statische radialsymmetrische Sterne

Wir wollen uns ein einfaches Materiemodell für einen statischen radialsymmetrischen Stern anschauen. Dazu beginnen wir zunächst mit einem Newtonschen Modell.

### A.1.1. Newton

Um Newtonsch den Stern zu beschreiben, brauchen wir die Gleichung für das Gravitationspotential  $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$  und Materiegleichungen für  $\rho$ . Wir modellieren hier den Stern als perfekte Flüssigkeit, wie Abschnitt II.4.3. Dann sei unser Stern im hydrostatischen Gleichgewicht (Aus Navier-Stokes):  $\nabla\mathbf{p} = -\rho\nabla\Phi$  (Hier ist  $\mathbf{p}$  der Druck) und erfülle die polytrope Zustandsgleichung  $\mathbf{p} = K\rho^{\varkappa} := 1 + \frac{1}{n}$  mit Konstanten  $K$  und  $\varkappa$ , vgl. Bemerkung II.4.30.

Da wir Radialsymmetrie annehmen ist  $\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Phi) = 4\pi G\rho$ .

Zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned}\partial_r\Phi &= -\rho^{-1}\partial_r\mathbf{p} = -K\rho^{-1}\partial_r\rho^{\varkappa} \\ 4\pi G\rho &= -K\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\rho^{-1}\partial_r\rho^{\varkappa}).\end{aligned}\tag{A.1}$$

Setzen wir  $\rho = \rho_c\theta^n$ ,  $n = (\varkappa - 1)^{-1}$ ,  $\tilde{r} = ar$  und  $a^2 = \frac{4\pi G}{Kn\varkappa}\rho_c^{2-\varkappa}$ , dann muss

$$\frac{1}{\tilde{r}^2}\partial_{\tilde{r}}(\tilde{r}^2\partial_{\tilde{r}}\theta) + \theta^n = 0\tag{A.2}$$

gelten. Das ist die *Lane-Emden-Gleichung*.  $\theta$  ist per Definition dimensionslos und die Lösung von  $\theta$  hängt nur noch von  $n$  (also von  $\varkappa$ ) ab.

Lösungen für verschiedene  $n$  sind in Abbildung A.1 für die Anfangswerte  $\theta(0) = 1$  (d.h.  $\rho_c = \rho(0)$ ) und  $\partial_r\theta(0) = 0$  abgebildet. Wir wollen  $\partial_r\theta(0) = 0$ , da sonst es einen  $\delta$ -Term in der Poissongleichung  $\Delta\Phi = 4\pi\rho$  gäbe. Die Lösungen sind im Allgemeinen nicht analytisch, für spezielle Werte hingegen schon: Für  $n = 0$  ist  $\theta(\tilde{r}) = 1 - \frac{\tilde{r}^2}{6}$ , für  $n = 1$  ist  $\theta(\tilde{r}) = \frac{\sin\tilde{r}}{\tilde{r}}$  und für  $n = 5$  ist  $\theta(\tilde{r}) = \left(1 + \frac{\tilde{r}^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ .

Wir wollen einen Stern mit definierter Oberfläche bei Radius  $R$ , also soll dort  $\rho(R) = 0$  sein. Abbildung A.1 suggeriert, dass dies nicht für alle  $n$  der Fall ist, z.B. nicht für  $n = 5$  siehe oben. Falls doch, nennen wir die Nullstelle der Lane-Emden-Gleichung  $\tilde{R}_n$  und dann ist  $R = R_n = a^{-1}\tilde{R}_n$ .

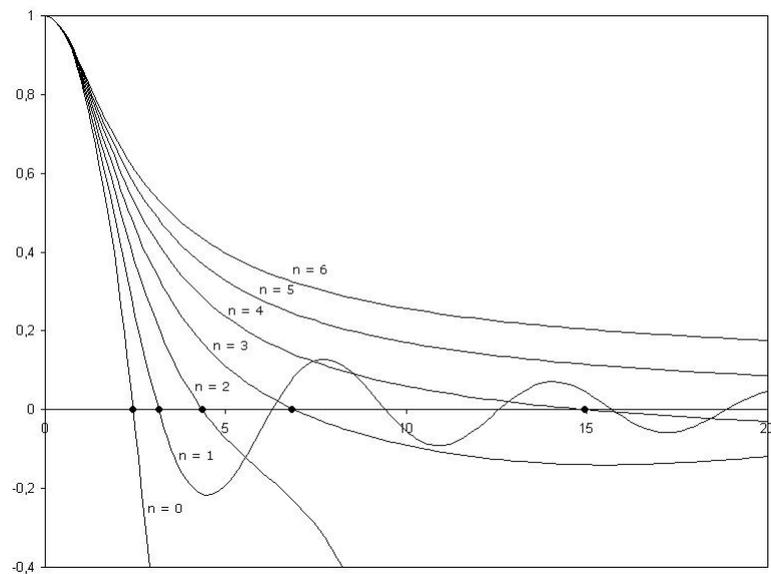


Abb. A.1.: Lösungen der Lane-Emden Gleichung (A.2) für verschiedene  $n$  (also verschiedene  $\kappa$ ) für die Anfangswerte  $\theta(0) = 1$  und  $\partial_r \theta(0) = 0$ .

Quelle: Von Lechatjaune - Eigenes Werk, Gemeinfrei,

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4202264>

## A.1. Statische radialsymmetrische Sterne

Wir werden  $\rho_c = \rho(0)$  noch mit der Masse des Sterns in Verbindung bringen:

$$M = \int_0^{R_n} \rho(u) 4\pi u^2 du = \int_0^{\tilde{R}_n} \rho_c \theta^n 4\pi a^{-3} v^2 dv = c_n \rho_c^{\frac{3}{2} \kappa - 2}$$

mit  $c_n$  einer Konstante, die nur von  $n$  abhängt. Insbesondere kann jeder Kombination von  $(R, M)$  durch geeignete Wahl von  $\rho_c$  erreicht werden, da  $R$  und  $M$  mit unterschiedlichen Potenzen von  $\rho_c$  gehen.

### A.1.2. ART

Wir wollen nun das Sternenmodell relativistisch rechnen auf  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  (noch immer radialsymmetrisch, siehe Definition unten) zu jeder Zeit  $t$ ). Wir wollen also die Einsteingleichung (für  $\Lambda = 0$ ) eine perfekte Flüssigkeit wie in (II.23) lösen:

$$G_{00} = \rho, \quad G_{ij} = \mathfrak{p} g_{ij}.$$

In der ART entspricht in diesem Modell die Gleichung fürs hydrostatische Gleichgewicht die Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensor (Das ist einfach wieder die Impulserhaltung, vgl. Seite 42.).

Zusätzlich brauchen wir noch eine Materiegleichung  $\rho = \rho(\mathfrak{p})$ , z.B. der Einfachheit halber wieder die polytrope Zustandsgleichung  $\mathfrak{p} = K \rho^\kappa$  (bzw. eine relativistische Version davon). Aber hier schauen wir einfach, was wir schon für eine allgemeine Materiegleichung der Form  $\rho = \rho(\mathfrak{p})$  sagen können.

Erst einmal müssen wir sagen, was radialsymmetrisch eigentlich heißen soll:

**Definition A.1.1.** Sei  $((t, x) \in M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, g)$  eine Lorentzmannigfaltigkeit. Seien  $M_s := \{t = s\} \subset M$  raumartige Untermannigfaltigkeiten, d.h.  $g_s := g|_{M_s}$  ist Riemannsche Metrik auf  $M_s$ . Sei  $\partial_t$  zeitartig. Dann nennen wir  $(V, g)$  *radial symmetrisch*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Für jedes  $s \in \mathbb{R}$  ist  $M_s$  diffeomorph zu  $\mathbb{R}^3$  ohne Umgebung des Ursprungs ist  $g_s$  sind die Rotationen um den Ursprung Isometrien.
- (ii) Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  ist sowohl die Länge von  $\partial_t$  und die Länge der orthogonalen Projektion auf  $TM_s$  invariant unter räumlichen Rotationen.

**Lemma A.1.2.** *Eine radial symmetrische Lorentzmannigfaltigkeit  $(V, g)$  besitzt lokale Koordinaten  $(t, r, \varphi, \theta)$ , so dass die Metrik die Form*

$$g = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \tag{A.3}$$

hat, wobei  $\lambda$  und  $\nu$  nur Funktionen von  $t$  und  $r$  sind.

*Beweisskizze – Übungsaufgabe 37.* Aus Übungsaufgabe 22.ii folgt  $g_s = e^{\tilde{\lambda}(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$ . Für die Metrik  $g$  haben wir damit den Ansatz  $-a^2(r, \tau) d\tau^2 + b(r, \tau)(d\tau \otimes dr + dr \otimes d\tau) + e^{\lambda(r, \tau)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$ . Um  $b(r, \tau)$  zu eliminieren führt man eine geeignete neue Zeitkoordinate  $t = t(r, \tau)$  ein.  $\square$

## A. Sternmodell

**Satz A.1.3.** (Birkhoff) Jede radialsymmetrische Lösung der Vakuum-Einsteingleichung mit  $\Lambda = 0$  ist isometrisch zur Schwarzschildmetrik.

*Beweis.* Übungsaufgabe 28 □

Der letzte Satz verallgemeinert damit unsere alte Schwarzschildrechnung, wo wir ausgerechnet hatten, dass stationäre radialsymmetrische Lösungen der Vakuum-Einsteingleichung mit  $\Lambda = 0$  die Schwarzschildmetriken sind.

Wir suchen hier jetzt auch erst einmal nach stationär radial symmetrischen Lösungen für das Sternmodell, wobei stationär impliziert, dass  $\nu$  und  $\lambda$  nur noch Funktionen von  $r$  sind.

Die Metrik (A.3) mit  $\nu = \nu(r)$  und  $\lambda = \lambda(r)$  ist eine Lösung der Einsteingleichungen mit  $\Lambda = 0$  für den Energie-Impuls-Tensor einer perfekten Flüssigkeit mit Druck  $\mathfrak{p}$  und Energiedichte  $\rho$ , falls

$$\mathfrak{p} = e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \quad (\text{A.4})$$

$$\rho = e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dr} = - \frac{\mathfrak{p} + \rho}{2} \nu' \quad (\text{A.6})$$

Wollen wir einen Stern mit definierter Oberfläche, muss es ein  $R$  mit  $\mathfrak{p}(R) = 0$  geben. Damit erhalten wir aus (A.6)

$$\nu(r) = \nu(R) - \int_0^{r-R} \frac{2\mathfrak{p}}{\mathfrak{p} + \rho(\mathfrak{p})} dr.$$

Für  $r > R$  gibt es dann keine Materie und die einzigen radial symmetrischen Lösungen sind die Schwarzschildmetriken, parametrisiert über den Schwarzschildradius. Da  $\rho$  und  $\mathfrak{p}$  auch in  $R$  stetig sind, folgt dass  $\lambda$  und  $\nu$  in  $r$  mindestens  $C^1$  ist. Wir können also  $\nu(R)$  durch matchen mit einer Schwarzschildlösung mit dem Schwarzschildradius  $r_S$  in Verbindung bringen:

$$e^{\nu(r)} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) e^{-\int_0^{r-r_S} \frac{2\mathfrak{p}}{\mathfrak{p} + \rho(\mathfrak{p})} dr}$$

für  $r \leq R$ . Damit wird  $\nu(r)$  durch  $\mathfrak{p}(r)$  bestimmt.

Wir setzen  $u(r) := \frac{r}{2}(1 - e^{-\lambda})$  und erhalten aus (A.5) und (A.4) zusammen mit (A.6)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= \frac{1}{2} \rho r^2 \\ \frac{d\mathfrak{p}}{dr} &= - \frac{\mathfrak{p} + \rho}{2r(r - 2u)} (r^3 \mathfrak{p} + 2u). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Dies ist ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in  $u$  und  $\mathfrak{p}$ .

Aus der ersten Differentialgleichung folgt  $e^{-\lambda} = 1 - \frac{1}{r} \int_0^r \rho v^2 dv$  und damit  $e^{-\lambda} \leq 1$ . Für eine glatte Metrik in Kugelkoordinaten muss  $\lambda(0) = 0$  und damit  $e^{-\lambda(0)} = 1$  sein.

Die Gesamtenergie des Sterns ist  $M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) e^{-\lambda(r)} dr$

$$\begin{aligned} M &\leq \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr = 2\pi(u(R) - u(0)) = 2\pi u(R) \\ &= \pi R(1 - e^{-\lambda(R)}) = \pi R \left(1 - \left(1 - \frac{r_S}{R}\right)\right) = \pi r_S. \end{aligned}$$

Wir hatten einige Naturkonstanten auf eins gesetzt, deshalb passen die Einheiten nicht.

Außerdem sehen wir wegen

$$M \leq 2\pi u(R) = \pi R(1 - e^{-\lambda}) \leq \pi R.$$

Im Gegensatz zum Newtonschen sind der Radius des Sterns und die Gesamtenergie des Sterns nicht mehr unabhängig.

Die Gleichung (A.7) ist die *Tolman-Oppenheimer-Volkoff*-Gleichung des relativistischen hydrostatischen Gleichgewichts.

Mit dieser Gleichung und der Annahme, dass der Druck  $\mathfrak{p}$  endlich sein soll, kann man eine bessere obere Schranke an die Gesamtenergie finden:  $M \leq \frac{8\pi}{9} R$ .

## A.2. Gravitativer Kollaps

Am Beispiel von sphärisch symmetrischem Staub wollen wir nun einen gravitativen Kollaps anschauen. Beim Staub (=perfekte Flüssigkeit mit verschwindendem Druck) sind die Trajektorien der Staubteilchen zeitartige Geodätische. Benutzen wir diese Geodätische als *Zeitlinien*, dann erhalten wir *mitbewegte Koordinaten*. Im sphärisch symmetrischen Fall hat die Metrik in diesen mitbewegten Koordinaten die Form

$$-dt^2 + \omega(t, r)^2 dr^2 + R(t, r)^2 (d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2).$$

Der  $r$ -Parameter nummeriert die einzelnen Staubsphären zur Anfangszeit. A priori sind das nur gute Koordinaten, so lange es kein *shell crossing* gibt, d.h. dass der Staub auf der  $r_1$ -Sphäre nach einiger Zeit mit dem Staub auf der  $r_2$ -Sphäre auf der gleichen Sphäre im Raum liegt. Das kann wirklich passieren, wie man schon im Newtonschen sehen kann: Hat eine äußere Staubsphäre eine sehr hohe Anfangsgeschwindigkeit in Richtung Ursprung und hat eine innere Staubsphäre Anfangsgeschwindigkeit Null, wird beide äußere Sphäre die innere im Kollabieren überholen.

### A. Sternmodell

Wir fixieren den  $r$ -Parameter durch  $r = R(0, r)$ . Da der Staub sich auf den Zeitlinien bewegt, ist der Energieimpulstensor durch  $T_{\mu\nu} = \rho(t, r)\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0}$  mit Energiedichte  $\rho$  gegeben.

Berechnen wir für obige Metrik die Einsteingleichungen erhalten wir

$$\rho = G_{tt} = \frac{1}{R^2 w^3} (2\dot{R}R\dot{w}w^2 + 2R'Rw' + \dot{R}^2 w^3 - 2R''Rw - (R')^2 w + w^3) \quad (\text{A.8})$$

$$0 = G_{tr} = \frac{2}{Rw^3} (R'\dot{w} - \dot{R}'w) \quad (\text{A.9})$$

$$0 = G_{rr} = \frac{1}{R^2 w^2} (2\ddot{R}Rw^2 + \dot{R}^2 w^2 - (R')^2 + w^2) \quad (\text{A.10})$$

$$0 = G_{\varphi\varphi} = G_{\theta\theta} = \frac{1}{Rw^3} (\ddot{w}w^2 R + \dot{R}\dot{w}w^2 + R'w' + \ddot{R}w^3 - R''w). \quad (\text{A.11})$$

Aus (A.9) folgt  $R'\dot{w} = \dot{R}'w$  und damit

$$R' = f(r)w \quad (\text{A.12})$$

für eine beliebige Funktion  $f = f(r)$ . Einsetzen in (A.8) ergibt

$$\rho = \frac{\dot{R}^2}{R^2} + 2\frac{\dot{R}'\dot{R}}{RR'} - 2\frac{ff'}{RR'} + \frac{f^2}{R^2} + \frac{1}{R^2},$$

$$\text{also } \rho R^2 R' = -\dot{R}^2 R' - 2\dot{R}'\dot{R}R + 2ff'R + f^2 R' - R' \quad (\text{A.13})$$

$$M(t, r) := \int_0^r \rho R^2 R' ds = f^2 R - R - \dot{R}^2 R. \quad (\text{A.14})$$

Einsetzen von (A.12) in (A.10) und (A.11) ergibt

$$0 = 2\ddot{R}R + \dot{R}^2 - f^2 + 1$$

$$0 = \ddot{w}R + \dot{R}\dot{w} + \ddot{R}w - f'.$$

Aus der Divergenzfreiheit des Energieimpulstensors folgt

$$0 = g^{\mu\alpha}(\nabla_\mu T)_{\nu\alpha} = g^{\mu\alpha}(\partial_\mu T_{\nu\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^\kappa T_{\kappa\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\kappa T_{\kappa\nu})$$

$$\nu = 0 \quad 0 = -\dot{\rho} + \Gamma_{00}^0 \rho - g^{\mu\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^0 \rho = -\dot{\rho} - \rho(\omega^{-1}\dot{\omega} + 2R^{-1}\dot{R})$$

$$\nu = i \quad 0 = \Gamma_{0i}^0 \rho$$

Nur die 0-Komponente der Divergenz enthält demnach eine nichttriviale Information:  $0 = \dot{\rho} + \rho(\omega^{-1}\dot{\omega} + 2R^{-1}\dot{R})$ . Damit erhalten wir

$$\rho(t, r) = \frac{1}{R^2 \omega} \varphi(r) \stackrel{(\text{A.12})}{=} \frac{f(r)\varphi(r)}{R^2 R'} \quad (\text{A.15})$$

für eine beliebige Funktion  $\varphi = \varphi(r)$ .

## A.2. Gravitativer Kollaps

Wegen  $R(0, r) = r$  ist  $R'(0, r) = 1$  und damit  $\rho_0(r) := \rho(0, r) = \frac{f(r)\varphi(r)}{r^2}$ . Zusammen ergibt sich mit (A.14)

$$M(t, r) = \int_0^r \rho_0(s) s^2 ds,$$

dass  $M(r) := M(t, r)$  nur von  $r$  abhängt.

Zusammen also

$$\dot{R}^2 - \frac{M(r)}{R} = f^2(r) - 1.$$

Da wir erst einmal an überhaupt einer Lösung interessiert sind, betrachten wir den Fall  $f(r) = 1$ :

$$\dot{R}R^{\frac{1}{2}} = \pm \sqrt{M(r)}.$$

Für eine kontrahierende Staubwolke suchen wir eine Lösung mit Minus, also

$$R(t, r)^{\frac{3}{2}} = A(r) - \frac{3}{2} \sqrt{M(r)} t$$

für eine Funktion  $A = A(r)$ . Wegen der Anfangsbedingung  $R(0, r) = r$  folgt  $A(r) = r^{\frac{3}{2}}$  und damit

$$R(t, r) = \left( r^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \sqrt{M(r)} t \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Das ergibt

$$R^{\frac{1}{2}} \dot{R} = r^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} M(r)^{-\frac{1}{2}} M'(r) t. \quad (\text{A.16})$$

Weiterhin folgt mit  $M'(r) = \rho_0(r) r^2$  und (A.13)

$$\rho(t, r) = \frac{r^2 \rho_0(r)}{\left( r^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \sqrt{M(r)} t \right) \left( r^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} M(r)^{-\frac{1}{2}} \rho_0(r) r^2 t \right)}$$

Außerdem folgt aus (A.16), dass zur Zeit

$$t_1(r) = \frac{2r^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{M(r)}}$$

die Staubsphäre zum Parameter  $r$  bei  $R = 0$  auftritt.

Wir machen einen Koordinatenwechsel von  $r, t$  zu  $R, t$ : Wegen  $f \equiv 1$  ist  $R' = \omega$  und damit

$$dR = R' dr + \dot{R} dt = \omega dr - R^{-\frac{1}{2}} \frac{3}{2} \sqrt{M(r)} dt.$$

Für die Metrik bedeutet das

$$g = - \left( 1 - \frac{\sqrt{M(r)}}{R} \right) dt^2 + 2R^{-\frac{1}{2}} \sqrt{M(r)} dR dt + dR^2 + R^2 d\Omega^2.$$

### A. Sternmodell

Dieser Koordinatenwechsel ist nur dann wohldefiniert, wenn  $R'$  nicht verschwindet. Aus (A.16) folgt, dass  $R'$  zur Zeit

$$t_2(r) = \frac{2r^{\frac{1}{2}}M(r)^{\frac{1}{2}}}{M'(r)} = \frac{2M(r)^{\frac{1}{2}}}{\rho_0(r)r^{\frac{3}{2}}}$$

verschwindet. Also für  $t \in (0, t_2(r))$  ist dieser Koordinatenwechsel erlaubt und wir sehen, dass für konstantes  $t$  der räumliche Anteil der Metrik dann einfach nur die euklidische Metrik ist.

Damit  $t_1(r)$  der Kollaps der  $r$ -Staubsphäre wirklich stattfindet, bevor wir in eine Koordinatensingularität ( $R' \equiv 0$ ) kommen, brauchen wir  $t_1(r) \leq t_2(r)$ . Also

$$\frac{1}{3}\rho_0(r)r^3 \leq M(r) = \int_0^r \rho_0(s)s^2 ds.$$

Wenn wir annehmen, dass  $\rho_0$  monoton von  $r = 0$  bis zur Sternoberfläche, sagen wir bei  $r = a$ , fällt, ist dies der Fall. Dann ist das erste Mal, dass eine Singularität auftritt, also eine erste Staubsphäre bei  $R = 0$  auftritt durch

$$t_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \left( t_1(r) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{r^3}{\int_0^r \rho_0(s)s^2 ds}} \right) = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \sqrt{\lim_{r \rightarrow 0} \frac{3r^2}{\rho_0(r)r^2}} = 2\sqrt{3}\rho_0(0)^{-\frac{1}{2}}.$$

Insbesondere sehen wir, dass die Singularität nicht instantan auftritt. Aber je größer  $\rho_0(0)$  ist, um kleiner ist  $t_0$ .

Bis jetzt haben wir im Falle von Staub mit monoton fallender Anfangsenergiegedichte  $\rho_0(r)$  auf  $r \in (0, a)$  die resultierende Metrik für  $r \in (0, a)$ ,  $t \in (0, t_2(r))$  erhalten. Nun wollen wir diese noch auf  $r \geq a$  (also  $R \geq (a^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{M_a}t)^{\frac{2}{3}}$ ) erweitern. Unsere Berechnungen von oben gelten auch für  $r \geq a$ ; allerdings ist dort  $\rho_0(r) = 0$  und  $M(r) = M_a := \int_0^a \rho_0(s)s^2 ds$ .

Die Metrik für  $r \geq a$  ist also

$$g_{\text{ext}} = - \left( 1 - \frac{\sqrt{M_a}}{R} \right) dt^2 + 2R^{-\frac{1}{2}} \sqrt{M_a} dR dt + dR^2 + R^2 d\Omega^2.$$

Das ist eine geboostete Schwarzschildmetrik – die Standardschwarzschildform erhält man durch einen Wechsel der Zeitkoordinate

$$d\tau = dt - \left( 1 - \frac{M_a}{R} \right)^{-1} \sqrt{\frac{M_a}{R}} dR.$$

Insgesamt haben wir für  $0 \leq R \leq \left( a^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{M_a}t \right)^{\frac{2}{3}}$  die innere Lösung von oben und für größere  $R$  die externe Metrik  $g_{\text{ext}}$ . Für  $R < M_a$  ist also die innere Staublösung hinter dem Schwarzschildhorizont und damit von außen nicht sichtbar. Das beginnt zur Zeit

$$t_3 = \frac{2}{3} \left( a^{\frac{3}{2}} - M_a^{\frac{3}{2}} \right) M_a^{-\frac{1}{2}}$$

## A.2. Gravitativer Kollaps

(im Falle  $a < M_a$  ist der Staubstern schon zur Zeit  $t = 0$  nicht sichtbar).

Würde die Singularität sichtbar sein, also nicht hinter einem Horizont verschwinden, nennt man sie *nackte Singularität*.

Aufgrund dessen hat Penrose folgende Vermutung aufgestellt:

*(Weak) Cosmic censorship conjecture:* Eine generische Lösung der Einsteingleichungen mit physikalisch vernünftigen Gravitationsquellen besitzt keine nackten Singularitäten.

Hier tritt neben der Frage was physikalisch vernünftige Gravitationsquellen sein sollen auch wieder die Frage nach einer guten Definition von Singularitäten auf.



## B. Übungsaufgaben

**Übungsaufgabe 1.** [Zur Newtonschen Mechanik] Sei  $\Psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Sei  $x = x(t)$  der Pfad eines Körpers der Masse  $m$ , der die Bewegungsgleichung  $\ddot{x} = -\nabla\Psi$  erfüllt.

- (i) Rechnen Sie nach, dass die Energie des Körpers  $E = \frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 + m\Psi(x)$  entlang  $x(t)$  konstant ist.
- (ii) (Bewegungsgleichung über die Lagrangefunktion  $L$ )  
Für  $y \in C^\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^3)$  sei

$$L(y) := \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1}{2}m|\dot{y}(t)|^2 - m\Psi(y(t)) \right) dt.*$$

Sei  $\delta \in C^\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^3)$  mit  $\delta(t_0) = \delta(t_1) = 0$ . Wir setzen  $y_\epsilon(t) = y(t) + \epsilon\delta(t)$ . Also ist  $y_\epsilon$  eine Kurve mit den gleichen Endpunkten wie  $y$ .

Dann heißt  $y(t)$  *kritischer Punkt* von  $L$ , wenn für alle  $\delta \in C^\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^3)$  mit  $\delta(t_0) = \delta(t_1) = 0$ ,  $\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}L(y_\epsilon) = 0$  gilt.

Berechnen Sie  $\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}L(y_\epsilon)$  und zeigen Sie, dass  $y(t)$  genau dann ein kritischer Punkt von  $L$  ist, wenn  $\ddot{y} = -\nabla\Psi$  ist, also für  $y$  die Bewegungsgleichung gilt.

- (iii) (Allgemeine Lagrangegleichungen) Sei nun  $\mathcal{L}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  glatt und setze für  $y \in C^\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$

$$S(y) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(y(t) = (y^1(t), \dots, y^n(t)), \dot{y}(t) = (\dot{y}^1(t), \dots, \dot{y}^n(t))) dt.$$

Zeigen Sie analog zu (ii), dass  $y$  ein kritischer Punkt von  $S$  ist, wenn die *Lagrangegleichungen*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^k} \quad \text{für } k = 1, \dots, n \quad (\text{B.1})$$

erfüllt sind.

**Übungsaufgabe 2.** Sei  $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  radialsymmetrisch und habe Träger in  $r \leq R$ . Wir setzen  $M := \int_0^R 4\pi u^2 \rho(u) du$ . Zeigen Sie, dass  $\Psi(r) = -\frac{MG}{r}$  für  $r > R$  eine Lösung von  $\Delta\Psi = 4\pi G\rho$  ist.

---

\*Beachten Sie, dass der Integrand von  $L$  die kinetische Energie minus die potentielle Energie ist – die Energie in (i) die Summe beider Energien ist.

## B. Übungsaufgaben

**Übungsaufgabe 3.** [Planetenbewegung mittels Newton] Nehmen wir an, dass  $\Psi(x) = -\frac{M}{|x|}$  das Gravitationspotential der Sonne sei.\* Wir setzen die Masse des Testkörpers  $m = 1$ . Hier nehmen wir an, dass wir den Gravitationseinfluss des Testkörpers vernachlässigen können, vgl. dazu ÜA 4, und dass wir die Planeten, wie Punktteilchen behandeln können, vgl. dazu ÜA 2.

- (i) Zeigen Sie, dass  $x \times \dot{x}$  konstant in  $t$  ist und folgern Sie daraus, dass die Bewegung auf einer Ebene durch  $x = 0$  stattfindet.

Von nun an können wir die Betrachtungen nur auf eine Ebene reduzieren.

- (ii) Berechnen Sie die kinetische Energie  $T$  und potentielle Energie  $V$  eines Testkörpers der Masse  $m$  im Gravitationsfeld der Sonne in Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$ . Berechnen Sie die Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten.

Hinweis: Nutzen Sie (B.1) mit  $\mathcal{L} = T - V$ . Es ist besser die  $\frac{d}{dt}$  Ableitungen nicht gleich auszurechnen.

- (iii) Folgern Sie, dass  $\ell := r^2 \dot{\varphi}$  konstant ist und berechnen Sie  $E := T + V$  als Funktion von  $r, \dot{r}, \ell$ .

(Nach (i) ist  $E$  konstant in der Zeit. Die Konstanten<sup>†</sup>  $\ell$  und  $E$  werden damit durch die Anfangswerte  $(r(0), \varphi(0), \dot{r}(0), \dot{\varphi}(0))$  bestimmt.)

- (iv) Folgern Sie aus (ii) und (iii), dass  $\ddot{r} = -\frac{dW(r)}{dr}$  für ein geeignetes  $W(r)$  gilt. Skizzieren Sie, den qualitativen Verlauf von  $W(r)$ .  $W(r)$  wird *effektives Potential* genannt. Für welche Anfangswerte gibt es Lösungen mit  $a \leq r(t) \leq b$  für  $[a, b] \subset (0, \infty)$  und alle  $t$ ?

Hinweis: Für solche Lösungen muss es Punkte mit  $\dot{r} = 0$  geben.<sup>‡</sup>

- (v) Wir wollen nun die Spur  $r = r(\varphi)$  der Planetenbewegung bestimmen. Die Ableitung bzgl.  $\varphi$  bezeichnen wir mit  $'$  (also  $r' = \frac{dr}{d\varphi}$ ) im Gegensatz zur Zeitableitung  $\dot{r}$ . Wir setzen  $u = 1/r$ . Rechnen Sie die Differentialgleichung  $\ddot{r} = \dots$  aus (iv) in eine für  $u''$  um, vgl. Bemerkung I.1.2.

**Übungsaufgabe 4.** [Planetenbewegung nach Newton Teil 2] In der letzten Aufgabe haben wir eigentlich angenommen, dass der Testkörper/der Planet gar keinen Effekt

\*vgl. ÜA 2. Wir setzen  $G = 1$ .

<sup>†</sup>Das sind also *Erhaltungsgrößen* –  $\ell$  ist der Drehimpuls und  $E$  die Energie.

<sup>‡</sup>Das gilt allgemein sobald die Bewegung eine Gleichung der Form  $\dot{r}^2 = Z(r)$ ,  $Z$  glatt und z.B. in den Nullstellen von  $Z$  nichtverschwindende erste Ableitung, (hier wäre  $Z(r) = \frac{2}{m}(E - W(r))$ ): Haben wir eine gebundene Lösung kann  $\dot{r}$  nicht für alle Zeiten im Betrag größer einem  $\delta > 0$  sein. D.h.  $\dot{r}$  muss beliebig nahe an Null kommen und sich damit einer Nullstelle  $r_0$  von  $Z(r)$  zumindest annähern. Es ist dann:  $Z(r) = a(r - r_0) + \mathcal{O}(|r - r_0|^2)$  und damit (o.B.d.A.  $r > r_0, a > 0$ ):

$$\int_R^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{Z(r)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_R^{r_0} \frac{1}{\sqrt{r - r_0}} (1 + \mathcal{O}(|r - r_0|)) dr < \infty.$$

Es wird  $r_0$  also in endlicher Zeit erreicht und damit gibt es einen Punkt mit  $\dot{r} = 0$ .

auf die Sonne hat, bzw. dass wir diesen vernachlässigen können. Wie gerechtfertigt ist das eigentlich? Dazu verwenden wir hier den Lagrangeformalismus: Die Sonne bewege sich entlang  $x(t) \in \mathbb{R}^3$  und habe die Masse  $M$ , der Planet entlang  $y(t) \in \mathbb{R}^3$  und Masse  $m$ . Die Lagrangefunktion ist  $\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2}_{\text{gesamte kinetische Energie}} - m\Psi(x - y)$  mit

$\Psi(x) = -\frac{M}{|x|}$  das Gravitationspotential.

- (i) Führen Sie die Koordinatentransformation  $z = x - y$  und  $u = \frac{1}{M+m}(M\dot{x} + m\dot{y})$  aus und berechnen Sie  $\mathcal{L}(z, u, \dot{z}, \dot{u})$ . Was ist die Bedeutung von  $z$  und  $u$ ?
- (ii) Berechnen Sie für  $z$  und  $u$  mittels (B.1) die Bewegungsgleichungen.
- (iii) Was bedeutet die Gleichung für  $u$ ?
- (iv) Vergleichen Sie die Gleichung für  $z$  mit  $\ddot{y} = -\nabla\Psi(y)$ , die wir erhalten, wenn wir annehmen dass die Sonne starr in  $x = 0$  sitzt und die Gravitation des Planeten keine Auswirkungen hat. Wann ist diese Annahme sinnvoll?
- (v) Statt den Lagrangeformalismus hätten wir auch direkt die Bewegungsgleichungen für  $(x, y) \in \mathbb{R}^6$  verwenden können - wie sehen diese aus?

**Übungsaufgabe 5.** [Zu Lorentztransformationen]

Ein Beobachter bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v = (v^0, v^1, 0, 0)$  im Minkowskiraum (also gilt insbesondere  $\eta(v, v) = -1$ ).

- (i) Finden Sie einen Lorentz-Boost, so dass sich der Beobachter in den neuen Koordinaten in (räumlicher) Ruhe befindet – in *Eigenzeitkoordinaten* ( $y^0(\tau) = \tau, y^i(\tau) = 0$ ). Ist diese Transformation eindeutig?
- (ii) Ein Körper befinde sich in einem konstantem Abstand  $r$  zum Beobachter. Es ist klar, was dies in Eigenzeitkoordinaten des Beobachters bedeutet – der Körper bewegt sich auf der Geraden  $t \mapsto (t, y^1, y^2, y^3)$  mit  $\sum_i (y^i)^2 = r^2$ . Wie bewegt sich dieser Körper in den alten Koordinaten?
- (iii) In den Eigenzeitkoordinaten ist das *Jetzt* (alles was sich für den Beobachter gleichzeitig ist) des Beobachters die Ebene  $\{\tau = 0\}$ . Wie sieht das Jetzt des Beobachters konkret in den alten Koordinaten aus?
- (iv) Zeigen Sie allgemein, dass das Jetzt eines Beobachters im Punkt  $x$  mit der Geschwindigkeit  $v$ , die Hyperebene  $v^\perp = \{y \in M \mid \langle v, y \rangle_L = 0\}$  ist.
- (v) Zeigen Sie, dass alle Elemente von  $v^\perp$  raumartig sind.

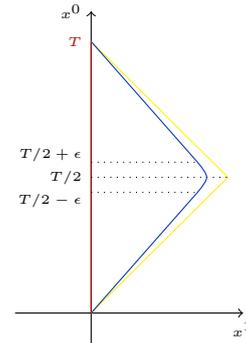
**Übungsaufgabe 6** (Das 'Garagenparadox'). Lösen Sie diese Aufgabe aus [18]: "The lack of a notion of absolute simultaneity in special relativity leads to many supposed paradoxes. One of the most famous of these involves a car and a garage of equal proper length. The driver speeds toward the garage, and a doorman at the garage is instructed

## B. Übungsaufgaben

to slam the door shut as soon as the back end of the car enters the garage. According to the doorman, 'the car Lorentz contracted and easily fitted into the garage when I slammed the door.' According to the driver, 'the garage Lorentz contracted and was too small for the car when I entered the garage.' Draw a spacetime diagram showing the above events and explain what really happens. Is the doorman's statement correct? Is the driver's statement correct? For definiteness, assume that the car crashes through the back wall of the garage without stopping or slowing down."

**Übungsaufgabe 7.** (Zwillingsparadox) Ein Beobachter (Zwilling 1 - rot im Bild) sei in einem Bezugssystem in Ruhe – bewegt sich dort also auf der Kurve  $t \mapsto (x^0 = t, \vec{0})$ . Zwischen  $t = 0$  und  $t = T$  vergeht für diesen Beobachter die Eigenzeit  $T$ .

Zwilling 2 (blau) bewegt sich in diesem Bezugssystem mit konstanter Geschwindigkeit in eine Richtung bis zu einer Zeit kurz vor  $\frac{T}{2}$ , beschleunigt kurzzeitig so stark, dass seine Geschwindigkeit kurz nach  $\frac{T}{2}$  genau das Vorzeichen gedreht hat und fliegt mit konstanter Geschwindigkeit zurück zu Zwilling 1. Um so näher die Geschwindigkeit an der Lichtgeschwindigkeit ist und um so kürzer die Zeit für die Richtungsumkehr ist, um so näher wird die Eigenzeit des zweiten Zwillinges an der Null sein.



Das erscheint vielleicht im ersten Moment paradox – und auch heute gibt es noch vereinzelt Leute, die sagen, dass dies eine ungelöste Inkonsistenz der SRT ist. Die Argumentation geht meistens wie folgt:

Man kann das obige Szenario so inszenieren, dass beide Zwillinge in Inertialsystemen für 99.999999999999% des Szenarios in Ruhe sind. Außerdem hängt der Zeitdilatationseffekt nur von der Geschwindigkeit ab. Die Zeit in der der Zwilling beschleunigt wird, um die Richtung umzukehren, kann beliebig klein gemacht werden. Allerdings gibt es das Relativitätsprinzip in der SRT, das besagt, dass alle Inertialsysteme äquivalent seien. Dann darf es nicht sein, dass die Eigenzeiten beider Zwillinge so stark voneinander abweichen.

Was ist das Problem mit obiger Erklärung?

### Übungsaufgabe 8.

- (i) Zeigen Sie, dass im Minkowskiraum  $M = \mathbb{R}^n$  für alle  $x, y \in M$ , die licht- oder zeitartig sind, die *inverse Cauchy-Ungleichung* gilt:

$$\eta(x, y)^2 \geq \eta(x, x)\eta(y, y).$$

Charakterisieren Sie den Gleichheitsfall.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass es für  $x \in M$  zeitartig und  $y \in M$  immer ein  $a \in \mathbb{R}$  und  $z \in M$  mit  $y = ax + z$  und  $\eta(x, z) = 0$  gibt.

- (ii) Nutzen Sie (ii) um die *inverse Dreiecksungleichung* zu beweisen: Seien  $x, y \in M$  zeitartig oder lichtartig, so dass auch  $x + y$  zeit- oder lichtartig ist. Wir setzen  $|x| := \sqrt{|\eta(x, x)|}$ . Dann gilt

$$|x + y| \geq |x| + |y|.$$

**Übungsaufgabe 9.** Seien  $x = (x^0, \dots, x^n) \mapsto y = (y^0, \dots, y^n)$  ein Diffeomorphismus und

$$g_{\mu\nu}(x) := \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \text{ sowie } \Gamma_{\mu\nu}^\lambda := \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

- (i) Rechnen Sie nach:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (g_{\mu\kappa,\nu} + g_{\nu\kappa,\mu} - g_{\mu\nu,\kappa}).$$

Hinweis: Berechnen Sie  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\eta}$ .

- (ii) Bestimmen Sie alle Lorentzmetriken  $(g_{\mu\nu} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})_{\mu\nu}$  für die  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv 0$  für alle  $\mu, \nu, \lambda$  gilt.

**Übungsaufgabe 10.**

- (a) Sei  $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(x) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$  wie in (II.3). Rechnen Sie nach, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen von (B.1) die Geodätengleichung (II.1) ergibt.
- (b) Sei  $(M = I \times N, g = \pm du^2 + f^2(u)h)$ , wobei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall (mit Koordinate  $u$ ) und  $h$  eine Riemannsche Metrik auf der  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $N$  sei. Dann ist  $g$  für  $+$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$  und für  $-$  eine Lorentz-Metrik auf  $M$ . Sei  $(x^1, \dots, x^n)$  ein lokales Koordinatensystem auf  $N$ , in dem  $h$  die Form  $h_{ij} dx^i dx^j$  habe. Was diese Notationen genau bedeutet, kommt in (II.6) und Beispiel II.1.9.ii. Hier benötigen wir nur, dass die Lagrange-Funktion für das Energiefunktional dann gleich  $\mathcal{L}(u, x^i, \dot{u}, \dot{x}^i) = \frac{1}{2} (\pm \dot{u}^2 + f^2(u) h_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j)$  ist.

- (i) Wie sieht die Geodätengleichung aus?
- (ii) Zeigen Sie, dass für den Fall  $f \equiv 1$ , also  $g = -du^2 + h$ , die Geodätischen (= Lösungen der Geodätengleichung) von  $M$  alle die Form  $c(t) = (at, \gamma(t))$  für ein konstantes  $a$  und eine Geodätische  $\gamma$  von  $(N, h)$  haben.
- (iii) Zeigen Sie, dass im Fall  $(N = S^1, h = d\varphi^2)$  alle Geodätische eine Gleichung  $\ddot{u} = c^2 \frac{f'(u)}{f^3(u)}$  und  $f^2(u) \dot{\varphi} = c$  für ein konstantes  $c \in \mathbb{R}$  erfüllen. Was sind dann die Geodätischen in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong (0, \infty) \times S^1$  mit  $f(u) = u^*$ ? Plotten Sie die Lösungen (am besten nur die Spur der Geodätischen und in Polarkoordinaten).

---

\*Die Metrik  $du^2 + u^2 d\varphi^2$  ist dann die euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  in Polarkoordinaten geschrieben. Also  $u$  ist die radiale Koordinate.

## B. Übungsaufgaben

### Übungsaufgabe 11.

- (i) Seien  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Seien  $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  und  $\kappa': U \subset M \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^m$  Karten. Seien  $x^\alpha$  die lokalen Koordinaten zu  $\kappa$  und  $y^\alpha$  die zu  $\kappa'$ .

Nach Bemerkung II.1.5(ii) ist  $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}|_p := (d_p \kappa)^{-1}(e_\alpha)$  für die Standardbasis  $e_\alpha$  vom  $\mathbb{R}^m$  für  $V$  und  $p \in U$ . Analog ist  $\frac{\partial}{\partial y^\alpha}|_p$  definiert.

Sei ein glattes Vektorfeld  $X$  auf  $U$  gegeben durch  $X(p) = X^\alpha(\kappa(p)) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}|_p$  für glatte  $X^\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}$ . Rechnen Sie nach, dass dargestellt in den Koordinaten  $y^\alpha$  dann

$$X(p) = X^\alpha(\kappa(p)) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}(\kappa(p)) \frac{\partial}{\partial y^\beta}|_p$$

mit  $(D_{\kappa(p)}(\kappa' \circ \kappa^{-1}))^\beta_\alpha = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}(\kappa(p))$  (wobei  $(\dots)^\beta_\alpha$  der  $(\beta, \alpha)$ .te Eintrag der Matrix in den Klammern ist) gilt.

- (ii) Seien  $M$  und  $N$  zwei glatte Mannigfaltigkeiten und  $f: M \rightarrow N$ , so dass für eine Karte  $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  um  $p$  (d.h.  $p \in U$ ) und eine Karte  $\tilde{\kappa}: \tilde{U} \subset N \rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$  um  $f(p)$  die Abbildung

$$\tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1}: V \rightarrow \tilde{V}$$

stetig/glatt in  $\kappa(p)$  ist. Zeigen Sie, dass dies dann auch für alle anderen Karten um  $p$  bzw.  $f(p)$  gilt.

### Übungsaufgabe 12.

- (i) Zeigen Sie, dass der de-Sitterraum  $S_1^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \eta(x, x) = r^2\}$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{n+1}$  und damit eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

Hinweis: Verwenden Sie dazu das Kriterium vom regulären Wert.

- (ii) Wir definieren  $g(X, Y) = \eta(X, Y)$  für  $X, Y \in T_p S_1^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Zeigen Sie, dass  $g$  eine Lorentzmetrik auf  $S_1^n(r)$  definiert.

Hinweis: Betrachten Sie die Normalenvektoren an  $S_1^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  und überlegen Sie, was diese über den Index von  $g$  aussagt.

- (iii) Zeigen Sie, dass der Anti-de-Sitterraum  $H_1^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid r^2 - (x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2 = 0\}$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Wir definieren  $g(X, Y) = \eta_2(X, Y)$  für  $X, Y \in T_p H_1^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\eta_2(x, y) = -(x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2$ . Zeigen Sie, dass  $g$  eine Lorentzmetrik auf  $H_1^n(r)$  definiert.
- (iv) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \eta(x, x) = -1\}$  mit der durch das Minkowskiprodukt  $\eta$  auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  induziertem Bilinearprodukt eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

**Übungsaufgabe 13.**

- (i) Seien  $M$  und  $N$  zwei glatte Mannigfaltigkeiten und  $f: M \rightarrow N$  glatt. Sei  $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  eine Karte um  $p$  und  $\tilde{\kappa}: \tilde{U} \subset N \rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$  eine Karte um  $f(p)$ . Rechnen Sie nach, dass  $d_{f(p)}\tilde{\kappa}[f \circ c]_{f(p)} = D_{\kappa(p)}(\tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1})(d_p\kappa([c]_p))$  gilt.
- (ii) Wie sieht  $d_p f$  in lokalen Koordinaten aus? Benutzen Sie  $x^\alpha$  für  $\kappa$  und  $y^\beta$  auf  $\tilde{\kappa}$ , dann ist  $f: x = (x^1, \dots, x^m) \mapsto (y^1 = f^1(x), \dots, y^n = f^n(x))$ .\*
- (iii) Überprüfen Sie für den Levi-Civita-Zusammenhang die Eigenschaften (ii)-(iv) in Lemma II.1.10 in lokalen Koordinaten.

**Übungsaufgabe 14.** Für  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  sei

$$X(f) := df(X): M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto d_p f(X(p)).$$

Zeigen Sie:

- (i)  $X(fg) = X(f)g + fX(g)$ ,  $X(f+g) = X(f) + X(g)$  und  $(X+Y)(f) = X(f) + Y(f)$  für alle  $f, g \in C^\infty(M)$ ,  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$
- (ii) Jede Abbildung  $T: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  mit  $T(fg) = T(f)g + fT(g)$  und  $T(af+g) = aT(f) + T(g)$  für alle  $f, g \in C^\infty(M)$  und  $a \in \mathbb{R}$  definiert ein glattes Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  mit  $T(f) = X(f)$ . Solche Abbildungen  $T$  heißen *Derivationen*.†

**Übungsaufgabe 15.** Sei  $\mathcal{A}_s^r M$  die Menge aller multilinearen Abbildungen ( $r > 0$ )

$$T: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{s\text{-mal}} \rightarrow \underbrace{\mathfrak{X}(M) \otimes \dots \otimes \mathfrak{X}(M)}_{r\text{-mal}},$$

die  $T(f_1 X_1, \dots, f_s X_s) = f_1 \dots f_s T(X_1, \dots, X_s)$  für alle  $f_i \in C^\infty(M)$  und  $X_i \in \mathfrak{X}(M)$  erfüllen.

Zeigen Sie, dass die Abbildung  $\mathcal{A}_s^r M \rightarrow \mathcal{T}_s^r M$ ,  $T \mapsto \tilde{T}$ , mit

$$\tilde{T}(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) := \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r (T(X_1, \dots, X_s))$$

wohldefiniert und eine Bijektion ist. Hierbei ist  $T(X_1, \dots, X_s) = \sum_{k=1}^{\ell} Y_{k1} \otimes \dots \otimes Y_{kr}$  für geeignete Vektorfelder  $Y_{ki} \in \mathfrak{X}(M)$  und damit  $\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r (T(X_1, \dots, X_s)) = \sum_{k=1}^{\ell} \prod_{i=1}^r \omega^i(Y_{ki})$  ist.

**Übungsaufgabe 16.** Sei  $(M, g)$  Lorentz- oder Riemannsche Mannigfaltigkeit.

- (i) Berechnen Sie  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} dx^\beta$  und  $\nabla_X \omega$  für  $\omega \in \Omega^1(M)$  und  $X \in \mathfrak{X}(M)$  in lokalen Koordinaten.

---

\*Dabei sieht man auch, dass  $d_p f(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}|_p) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}(p)$  ist, was die Schreibweise  $X(f)$  für  $df(X)$  und die Schreibweise  $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}|_p$  für einen Basistangentenvektor erklärt.

†Diese Charakterisierung von Vektorfeldern als Derivationen wird manchmal auch als Definition von Vektorfeldern verwendet.

B. Übungsaufgaben

- (ii) Berechnen Sie  $\nabla g^*$ , wobei  $g^*$  der  $(2,0)$ -Tensor mit  $g^*(\omega, \eta) := g(\omega^\#, \eta^\#)$  ist.

**Übungsaufgabe 17.** Sei  $(M, g)$  Lorentz- oder Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie die zweite Bianchiidentität, d.h.

$$(\nabla_U R)(\omega, X, Y, Z) + (\nabla_X R)(\omega, Y, U, Z) + (\nabla_Y R)(\omega, U, X, Z) = 0$$

für alle  $X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M)$  und  $\omega \in \Omega^1(M)$ .

**Übungsaufgabe 18.**  $g(R(\cdot, \cdot), \cdot, \cdot)$  ist ein  $(0,4)$ -Tensor mit lokaler Darstellung

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} dx^\gamma \otimes dx^\delta \otimes dx^\beta \otimes dx^\alpha := g_{\alpha\lambda} R_{\beta\gamma\delta}^\lambda dx^\gamma \otimes dx^\delta \otimes dx^\beta \otimes dx^\alpha$$

und  $R_{\beta\gamma\delta}^\lambda$  definiert wie in Satz II.1.21.

- (i) Für eine  $m$ -dimensionale Riemannsche/Lorentzmannigfaltigkeit  $(M, g)$  und ein  $p \in M$ : Beachtet man die Symmetrien von  $R$  aus Satz II.1.21, wie viele der Koeffizienten  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  können in  $p$  maximal voneinander verschieden sein? (Für  $m = 2$  sollte die Antwort eins lauten.)
- (ii) Sei  $M = \mathbb{R}^2$  mit euklidischer Metrik in Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$ , also  $g = dr^2 + r^2 d\varphi^2$ . Berechnen Sie alle Christoffelsymbole  $\Gamma_{ij}^k$  mit  $i, j, k \in \{r, \varphi\}^*$  und  $R_{r\varphi r\varphi}$ .

**Übungsaufgabe 19.**

- (i) Sei  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine  $(N-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei  $g$  die vom euklidischen  $\mathbb{R}^n$  induzierte Metrik. Sei  $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{N-1}$  eine Karte mit lokalen Koordinaten  $x^i$ . Zeigen Sie, dass in diesen lokalen Koordinaten die Metrik die Darstellung

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial x^i}, \frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial x^j} \right\rangle$$

besitzt.

- (ii) Zeigen Sie, dass  $\nabla_{\partial_i} \partial_j|_p = \pi_p \left( \frac{\partial^2 \kappa^{-1}}{\partial x^i \partial x^j} (\kappa(p)) \right)$  ist, wobei  $\pi_p: \mathbb{R}^N \rightarrow T_p M \subset \mathbb{R}^N$  die Orthogonalprojektion auf  $T_p M$  ist.

Hinweis: Verwenden Sie (i) sowie Metrizität und Torsionsfreiheit von  $\nabla$  um  $g(\partial_{x^k}, \nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j})$  zu berechnen.

**Übungsaufgabe 20.** Seien  $(N_i, h_i)$  für  $i = 1, 2$  Riemannsche oder Lorentzsche Mannigfaltigkeiten (nicht beide Lorentzsch). Sei  $M = N_1 \times N_2$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $T_{p=(p_1, p_2)} M \cong T_{p_1} N_1 \times T_{p_2} N_2$  ist.

---

\*Anstatt den Koordinaten hier Nummern zu geben. Verwenden wir hier als Indizes direkt die Koordinatenbezeichnung, also wäre  $g_{rr} = 1$ ,  $g_{\varphi\varphi} = r^2$  und  $g_{r\varphi} = g_{\varphi r} = 0$ .

(ii) Zeigen Sie, dass  $h = h_1 + h_2$  eine Riemannsche oder Lorentzische Metrik auf  $M$  ist. Hierbei sei  $h_p(X, Y) := h_1|_{p_1}(X_1, Y_1) + h_2|_{p_2}(X_2, Y_2)$  wobei  $X = (X_1, X_2)$ ,  $Y = (Y_1, Y_2)$  die Identifizierung aus (i) ist.

(iii) Zeigen Sie, dass

$$\nabla_X^h Y = (\nabla_{X_1}^{h_1} Y_1, \nabla_{X_2}^{h_2} Y_2),$$

$$R^h(X, Y)Z = R^{h_1}(X_1, Y_1)Z_1 + R^{h_2}(X_2, Y_2)Z_2$$

und

$$\text{Ric}^h(X, Y) = \text{Ric}^{h_1}(X_1, Y_1) + \text{Ric}^{h_2}(X_2, Y_2)$$

für alle  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$  ist. Hierbei ist  $X = (X_1, X_2)$ , ... wie oben und  $\nabla^h$  der Levi-Civita-Zusammenhang für  $(M, h)$ ,  $R^h$  der Krümmungstensor für  $(M, h)$  etc.

### Übungsaufgabe 21.

- (i) Sei nun  $(M = \mathbb{R} \times N, g = -dt^2 + h)$  mit  $(N, h)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit (Solche  $(M, g)$  heißen *ultrastatisch*). Zeigen Sie, dass  $(M, g)$  genau dann eine Lösung der Vakuumgleichung mit  $\Lambda \equiv 0$  ist, falls  $\text{Ric}^h \equiv 0$  ist.
- (ii) Gibt es ultrastatische Lösungen der Vakuumgleichung falls  $\Lambda \neq 0$  ist?
- (iii) (Einstein static universe) Gibt es ultrastatische Lösungen für Staub konstanter Dichte (d.h.  $T_{00}$  ist konstant und alle anderen  $T_{\mu\nu}$  sind Null – hierbei bezieht sich der Index 0 auf die  $t$ -Koordinate) und  $\Lambda > 0$  bzw.  $\Lambda < 0$ ?

Hinweis: Für die induzierte Metrik von  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  gilt  $\text{Ric} = (n-1)g$  und von  $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  (hier induziert von Minkowski wie in ÜA 12.iv) gilt  $\text{Ric} = -(n-1)g$ .

### Übungsaufgabe 22.

- (i) Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche oder Lorentzmannigfaltigkeit. Sei  $f: M \rightarrow M$  eine Isometrie. Sei  $\kappa: U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  eine Karte von  $M$  mit lokalen Koordinaten  $x^i$  um  $p \in U$ . Sei  $f(p) \in U$ . Zeigen Sie:

$$g_{\alpha\beta}(p) = \frac{\partial f^\gamma}{\partial x^\alpha}(p) \frac{\partial f^\delta}{\partial x^\beta}(p) g_{\gamma\delta}(f(p)).$$

- (ii) Sei  $(M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, g)$ . Die Metrik sei in Kugelkoordinaten

$$(r, \varphi, \theta) \mapsto (x = r \cos \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \cos \theta, z = r \sin \theta)$$

gegeben durch

$$g = a(r, \varphi, \theta)^2 dr^2 + b(r, \varphi, \theta)(dr \otimes d\varphi + d\varphi \otimes dr) + c(r, \varphi, \theta)(dr \otimes d\theta + d\theta \otimes dr) + r^2 d\Omega^2$$

mit  $d\Omega^2 = \cos^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2$  die Standardmetrik auf  $S^2$ ,  $a, b, c$  glatte Funktionen auf  $M$  und  $a$  nirgends verschwindend. Seien Rotationen um den Ursprung Isometrien von  $(M, g)$ . Zeigen Sie, dass dann  $b \equiv 0$ ,  $c \equiv 0$  und  $a$  nur von  $r$  abhängt.

## B. Übungsaufgaben

**Übungsaufgabe 23.** [Periheldrehung] Wir betrachten die Differentialgleichung für  $u = \frac{r_S}{r}$  als Funktion von  $\varphi$  der Spur zeitartiger Geodäten

$$u'^2 = \underbrace{\frac{E^2}{\lambda^2} - (1-u)(u^2 + \frac{1}{\lambda^2})}_{=: P(u)}.$$

Wir nehmen an, dass unsere Geodäte ein *gebundener Zustand und keine Kreisbahn* ist.

- (i) Zeigen Sie, dass  $P(u)$  drei reelle Nullstellen  $0 < u_1 < u_2 < u_3$  besitzt und sich die  $u$ -Koordinate der Geodäten in  $[u_1, u_2]$  bewegt.
- (ii) Benutzen Sie <https://personal.math.ubc.ca/~cbm/aands/>, insbesondere die Seiten 589–591 und 597, um die Periheldrehung  $\varphi = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{P(u)}}$  in der Form  $\varphi = 2\mu F(\frac{\pi}{2} \setminus \alpha) = 2\mu K(m)$  als vollständiges elliptisches Integral zuschreiben. Was ist hier  $\alpha$ ,  $\mu$  und  $m$  in Abhängigkeit von den  $u_i$ ?
- (iii) Halten Sie den minimalen Abstand  $r_{\min}$  und den maximalen Abstand  $r_{\max}$  zur Sonne fest und entwickeln Sie  $\varphi$  in  $r_S$ , also  $\varphi = 2\pi + \varphi_{\text{per}} + O(r_S^2)$ .

**Übungsaufgabe 24.** Sei  $f: (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow M$  eine glatte Abbildung, so dass für alle  $s$  die Abbildung  $f_s := f(s, \cdot): M \rightarrow M$  eine Isometrie von  $(M, g)$  mit  $f_0 = \text{id}$  ist. Für  $p \in M$  definieren wir  $X(p) := \frac{d}{ds} \big|_{s=0} f_s(p)$ . Zeigen Sie, dass  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ist und  $X$  die Gleichung\*  $(\nabla_\alpha X)_\gamma + (\nabla_\gamma X)_\alpha = 0$  erfüllt. (Ohne lokale Koordinaten liest sich diese Gleichheit als: für alle  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  gilt  $g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0$ .)

### Übungsaufgabe 25.

- (i) Verifizieren Sie, dass ein Beobachter, der im Schwarzschildaußenraum startet,  $r = r_S$  in endlicher Eigenzeit erreichen kann.<sup>†</sup>  
Hinweis: Überlegen Sie sich, dass es eine solche Kurve der Form  $\gamma(s) = (f(s), r(0) - s, 0, 0)$  gibt (d.h. nicht, dass man  $f$  explizit finden muss...). Alternativ: (II.16) oder andere Koordinaten verwenden...
- (ii) Kann ein Beobachter, der im Schwarzschildinnenraum startet,  $r = 0$  in endlicher Eigenzeit erreichen?
- (iii) Sei  $\gamma$  ein Beobachter, der bezüglich der Schwarzschildkoordinaten in Ruhe bewegt. Dieses  $\gamma$  beobachte wie ein anderes Teilchen sich entlang einer Kurve  $(t(s), r(s), 0, 0)$  auf  $r = r_S$  hinzu. Sieht  $\gamma$  das Teilchen jemals bei  $r = r_S$  verschwinden? Falls nein, warum ist das kein Widerspruch zu (i)?

\* $\nabla_\alpha X (= \nabla_{\partial_\alpha} X)$  ist ein Vektorfeld (also in Koordinaten mit oberen Indizes). Also ist  $(\nabla_\alpha X)_\gamma$  die  $\gamma$ -Komponente der durch Herunterziehen mit  $g$  entstandene 1-Form:  $(\nabla_\alpha X)_\gamma = g_{\beta\gamma} (\nabla_\alpha X)^\beta$

<sup>†</sup>Im Sinne von: Es gibt eine zeitartige nach Eigenzeit parametrisierte Kurve  $\gamma: [0, T) \rightarrow M$ ,  $M$  der Schwarzschildraum und  $T < \infty$ , so dass für  $\gamma(s) = (t(s), r(s), \varphi(s), \theta(s))$  mit  $r(s) \rightarrow r_S$  für  $s \rightarrow T$  und  $r(0) > r_S$ .

### Übungsaufgabe 26. [GPS]

- (i) Ein Beobachter/Satellit bewege sich auf einer stabilen geodätischen Kreisbahn\*  $r = r_{\text{Sat}}$  in der Schwarzschildraumzeit. Berechnen Sie  $\frac{d\tau_{\text{Sat}}}{dt}$  (ausgedrückt nur im Schwarzschildradius der Erde und  $r_{\text{Sat}}$ ), wobei  $\tau_{\text{Sat}}$  die Eigenzeit des Satelliten ist.
- (ii) Wir befinden uns auf der Erdoberfläche. Berechnen Sie das Verhältnis der Eigenzeit  $d\tau_{\text{Sat}}$  zu unserer Eigenzeit  $d\tau_{\text{Wir}}$  unter Vernachlässigung der Erdrotation und unter der Annahme, dass in der Umgebung der Erde die Raumzeit die Schwarzschildmetrik (mit geeignetem Schwarzschildradius) trägt.
- (iii) GPS-Satelliten schicken zu Ihrem Navigationssystem auf der Erde ein (Licht-)Signal mit einem Zeitstempel (bzgl. einer Atomuhr im Satelliten), wann das Signal abgeschickt wurde. An ihrem Navigationssystem trifft dieses Signal dann an nach einer bestimmten Lichtlaufzeit an und der Eintritt wird mit der Ihrer Eigenzeit abgespeichert. Ohne Kenntnis der Relativitätstheorie würde man den Abstand des Satelliten jetzt als (Zeitstempel Ankunft - Zeitstempel Absendezeit)  $\cdot c$  für  $c$ =Lichtgeschwindigkeit ermitteln. Wenn die Zeiten auf der Erde und dem Satelliten, wie in der ART, nicht mehr global sind sondern von einander um  $\delta$  abweichen, führt das ohne eine Korrektur zu einem Abstand von zum Satelliten der um  $c \cdot \delta$  falsch ist. Um wieviel würde so ein GPS nach einem Tag falsch gehen, wenn man diese Korrektur nicht macht und am Beginn des Tages die Eigenzeiten überein stimmten. Vernachlässigen die Unterschiede in den Laufzeiten des Signals bzgl. unterschiedlicher Satellitenpositionen.
- GPS-Satellit befinden sich in einer Höhe von 20 200 km. Die Erde hat einen Radius von 6371 km und einen Schwarzschildradius von 8,8 mm
- (iv\*) Wenn wir Frage (iii) nur im Rahmen der SRT beantworten würden, was ist dann die Antwort.
- (v\*) Wir haben oben die Rotationsgeschwindigkeit der Erde vernachlässigt. (Warum) War das gerechtfertigt (um die richtige Größenordnung der Korrektur zu erhalten)?

---

\*Kreisbahn bzgl. Schwarzschildkoordinaten

## B. Übungsaufgaben

**Übungsaufgabe 27.** (i) Wir betrachten den zweidimensionalen Minkowskiraum  $(\mathbb{R}^2, -dt^2 + dx^2)$ . Zeigen Sie, dass diese Mannigfaltigkeit maximal ist, in dem Sinne, dass für jede zeit- oder raumartige Geodätische  $\gamma: [0, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die in keiner kompakten Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  enthalten ist, schon  $a = \infty$  sein muss.

(ii) Betrachten Sie  $M = (0, \infty) \times \mathbb{R} \ni (t, x)$  mit der Metrik  $-t^2 dt^2 + dx^2$ . Führen Sie als neue Koordinaten  $(\tilde{t} = f(t), x)$  für eine geeignete Funktion  $f$  ein, um zu sehen, dass  $t = 0$  nur eine Koordinatensingularität ist. Geben Sie eine maximale Erweiterung an.

**Übungsaufgabe 28.** (Birkhoff) Zeigen Sie analog zu [schwarzschild.py](#), dass jede radial symmetrische Vakuumlösung der Einsteingleichungen mit  $\Lambda = 0$  isometrisch zur Schwarzschildlösung ist.

Eine allgemeine radial symmetrische Lorentzmannigfaltigkeit  $(V, g)$  besitzt lokale Koordinaten  $(t, r, \varphi, \theta)$ , so dass die Metrik die Form

$$g = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

hat, wobei  $\lambda$  und  $\nu$  nur Funktionen von  $t$  und  $r$  sind. (Zeigen wir später).

Hinweis: Wenn man so wie bei Schwarzschild vorgeht, wird man am Ende noch eine Transformation der  $t$ -Koordinate durchführen müssen  $\tilde{t} = f(t)$ , damit die Metrik in  $(\tilde{t}, r, \varphi, \theta)$  Koordinaten, genau wie in Schwarzschildkoordinaten aussieht.

**Übungsaufgabe 29.** [Parallelverschiebung] Sei  $(M, g)$  eine Lorentzmannigfaltigkeit und  $c: I \rightarrow M$  eine glatte Kurve auf  $M$ .

(i) Sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Berechnen Sie  $\nabla_{\dot{c}} X$  in lokalen Koordinaten.

(ii) Zeigen Sie, dass es für gegebenes  $p = c(t_0) \in M$  und  $v \in T_p M$  immer ein eindeutiges Vektorfeld  $Y$  entlang  $c^*$  mit  $Y(t_0) = v$  und  $\nabla_{\dot{c}} Y = 0$

Wir setzen  $\parallel_{t_0, t_1}^c: T_{c(t_0)} M \rightarrow T_{c(t_1)} M$ ,  $X_0 \mapsto X(t_1)$ , wobei  $X(t)$  die eindeutige Lösung von  $\nabla_{\dot{c}} X = 0$  mit  $X(t_0) = X_0$  sei. Diese Abbildung heißt *Paralleltransport (oder Parallelverschiebung) entlang  $c$* .

(iii) Zeigen Sie, dass  $\parallel_{t_0, t_1}^c: (T_{c(t_0)} M, g_{c(t_0)}) \rightarrow (T_{c(t_1)} M, g_{c(t_1)})$  eine lineare Isometrie ist.

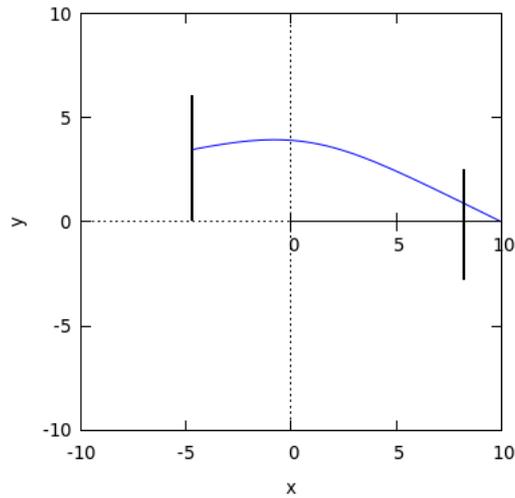
(iv) Sei  $(e_\alpha(t_0))_\alpha$  eine Basis von  $T_{c(t_0)} M$  und sei  $e_\alpha(t) := \parallel_{t_0, t}^c e_\alpha(t_0)$ . Folgern Sie, dass die  $(e_\alpha(t))_\alpha$  eine Basis von  $T_{c(t)} M$  bilden.

---

\* $Y$  heißt Vektorfeld entlang  $c$ , falls es eine glatte Abbildung  $Y: t \in I \mapsto Y(t) \in T_{c(t)} M$  ist

### Übungsaufgabe 30.

Wir betrachten den Schnitt des Schwarzschildraums mit  $\theta \equiv 0$ . Sie befinden in Ruhe bzgl. der Schwarzschildkoordinaten in  $r = 100r_s$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\theta = 0$ . Auch in Ruhe befindet sich (unrealistischerweise) ein Lineal der Länge  $5r_s$  senkrecht zur ( $\varphi = 0$ )-Linie bei  $r = 5r_s$  und  $\varphi = -\pi$ , vgl. Abb. Auch in Ruhe befindet sich ein Bildschirm senkrecht und symmetrisch zur ( $\varphi = 0$ )-Linie bei  $r = 9r_s$ . Jede lichtartige Geodäte, die auf dem Lineal startet und bei Ihnen ankommt, trifft unterdessen auf dem Bildschirm und hinterlasse dort die Information, wo sie auf dem Lineal gestartet ist.



Verwenden Sie ein Python / ein Computeralgebrasystem o.ä.\* um das Bild auf dem Bildschirm zu berechnen. Visualisieren Sie das Bild (bilden Sie zum Vergleich auch das Lineal und das darauf von Ihnen gewählte Bild bzw. Skala ab). Eine Möglichkeit ist es eine diskrete Menge von lichtartigen Geodäten zu berechnen, die an Ihrem Standort starten und in verschiedenen Winkeln auf den Bildschirm treffen und auszurechnen, wo diese auf den Bildschirm treffen.†

**Übungsaufgabe 31.** Berechnen Sie (durch Nachrechnen der Killinggleichung) eine Basis der Killingvektorfelder auf der Standardsphäre  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . (Hinweis: Ein Ansatz könnte sein, dass in Kugelkoordinaten jedes Vektorfeld die Form  $a(\varphi, \theta)\partial_\varphi + b(\varphi, \theta)\partial_\theta$ .)

**Übungsaufgabe 32.** Sei  $X$  ein Killingvektorfelder von  $(M, g)$  und  $f: p \in M \mapsto \frac{1}{2}g_p(X(p), X(p)) \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie:

- (i)  $\text{grad}_g f = -\nabla_X X^\ddagger$
- (ii) Sei  $\gamma_p(s)$  die Lösung von  $\dot{\gamma}_p(s) = X(\gamma_p(s))$  mit  $\gamma_p(0) = p$ , wobei  $p$  kritischer Punkt von  $f$  ist, also  $(\text{grad}_g f)(p) = 0$ , ist. Dann ist  $\gamma_p(s)$  eine Geodätische.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass dann alle Punkte von  $\gamma_p$  kritische Punkte von  $f$  sind.

\*Wenn Sie einen Raytracer verwenden können, können Sie natürlich auch einen solchen hierfür verwenden und das in 2D machen.

†Zur numerischen Lösung der Geodätengleichung, vgl. Abbildung II.4. Beachten Sie, dass dies nur eine diskrete Anzahl von Punkten der Geodäte ergibt, von denen im Zweifel keiner auf Bildschirm oder Lineal liegt (Näherungen verwenden). Es bietet sich an, mit Geodäten zu starten, die einen größeren Winkel zur  $\varphi = 0$  Linie haben, da diese weniger vom schwarzen Loch abgelenkt werden. Wenn ihr Winkel zu flach wird, wird die Geodäte sich erst ums schwarze Loch winden, bevor sie das Lineal trifft. Im Limes dauert das beliebig lange - hören Sie also ggf. rechtzeitig auf. Um das Bild auf dem Bildschirm zu veranschaulichen, könnten Sie z.B. eine Skala oder einen Farbverlauf auf dem Lineal verwenden.

‡Definition des Gradienten:  $(\text{grad}_g f)^\# = df$ , bzw. äquivalent: Für alle  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  gilt  $g(\text{grad}_g f, Y) = df(Y)$ .

## B. Übungsaufgaben

**Übungsaufgabe 33.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche oder Lorentzmannigfaltigkeit. Sei  $p \in M$  und  $E \subset T_p M$  ein zweidimensionaler Untervektorraum von  $T_p M$ , so dass  $g_p|_{E \times E}$  nichtentartet ist. Wir definieren für eine Basis  $X, Y$  von  $E$ :

$$\sec_p(E) := \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}. \quad (\text{B.2})$$

Zeigen Sie:

- (i)  $\sec_p(E)$  ist unabhängig der gewählten Basis  $X, Y$  von  $E$ .
- (ii) Sei die Dimension von  $M \geq 3$  und  $\sec_p(E) = \kappa(p)$  für ein  $\kappa \in C^\infty(M)$  und alle  $E \subset T_p M$ . Dann ist  $\kappa$  schon konstant.

Hinweis: Folgern Sie  $g_p(R(X, Y)Z, W) = \kappa(p)(g_p(X, Z)g_p(Y, W) - g_p(Y, Z)g_p(X, W))$  für alle  $X, Y, Z, W \in T_p M$  und benutzen Sie dann die zweite Bianchi-Identität für  $X, Y, Z \in T_p M$  drei paarweise orthonormale Vektoren.

**Übungsaufgabe 34.** Wir betrachten  $(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$  mit der Metrik

$$g = -dt^2 - \sqrt{2} \frac{r^2}{a} (d\varphi \otimes dt + dt \otimes d\varphi) + \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) d\varphi^2,$$

wobei bei  $(r, \varphi)$  Polarkoordinaten zu  $(x, y)$  seien.

- (i) Zeigen Sie, dass  $g$  glatt auf  $r = 0$  fortsetzbar ist und damit auf ganz  $\mathbb{R}^3$  eine Lorentzsche Metrik ist.
- (ii) Finden Sie jeweils eine geschlossene zeitartige, lichtartige und raumartige Kurve in  $(\mathbb{R}^3, g)$ .
- (iii) Finden Sie die Spuren  $t = t(r)$  lichtartiger Geodätische der Form  $\gamma(s) = (t(s), r(s), 0)$ .
- (iv) Was können Sie über die Menge aller  $q \in \mathbb{R}^3$ , für die es eine zeitartige Kurve  $\gamma$  von  $0 \in \mathbb{R}^3$  nach  $q$  mit  $g(\partial_t, \dot{\gamma}) < 0$  gibt, sagen?

Anmerkung:  $\partial_t$  ist hier ein globales zeitartiges Vektorfeld und kann benutzt werden, um zukunftsgerichtete Kurven zu definieren – durch die Bedingung  $g(\partial_t, \dot{\gamma}) < 0$ . Dann ist die hier gesuchte Menge die *chronologische Zukunft* von 0.

- (v) Welche Koordinatenvektorfelder  $\partial_r, \partial_\varphi, \partial_t$  sind Killingvektorfelder?
- (vi\*) Finden Sie ein Killingvektorfeld der Form  $\partial_r + f_1(r)\partial_\varphi + f_2(r)\partial_t$  und folgern Sie, dass  $(\mathbb{R}^3, g)$  homogen in allen Punkten ist.

Anmerkung: Man muss nicht alles per Hand ausrechnen...

**Übungsaufgabe 35.** Beweisen Sie Lemma II.4.35.

**Übungsaufgabe 36.** Sei  $M = I \times \mathbb{R}^3$ ,  $g = -dt^2 + f(t)^2 g_E$  mit  $g_E$  die euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^3$ .

Wir nehmen an, dass wir und die Galaxien fundamentale Beobachter in  $M$  seien. Wir messen die Rotverschiebung (zur Zeit  $t = s$ ) für eine Galaxie, die im Jetzt  $M_s := M \cap \{t = s\}$  den räumlichen Abstand  $R_s$  zu uns habe. Um im zweidimensionalen Minkowskiraum die gleiche Rotverschiebung zu erreichen, sei die dazu nötige relative Geschwindigkeit der Galaxie zu uns gleich  $v_s \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass in erster Ordnung das Hubble-Gesetz

$$v_s \sim H(s) \cdot R_s$$

gilt.

Gilt das Hubble-Gesetz auch für Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker Mannigfaltigen ( $M = I \times N$ ,  $g = -dt^2 + f(t)^2 h$ ) mit  $(N, h)$  maximal symmetrisch zur Schnittkrümmung  $k$ ?

**Übungsaufgabe 37.** Sei  $(V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, g)$  in lokalen Koordinaten  $(\tau, r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^4$  gegeben durch

$$g = a(\tau, r) d\tau^2 + b(\tau, r) (d\tau \otimes dr + dr \otimes d\tau) + e^{\lambda(\tau, r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

- (i) Berechnen Sie  $g$  in neuen Koordinaten  $(t = t(\tau, r), r, \varphi, \theta)$ .
- (ii) Zeigen Sie, dass falls

$$a(\tau, r) \frac{\partial t}{\partial r} = b(\tau, r) \frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{B.3}$$

gilt,  $g$  in den neuen Koordinaten die Form  $g = -m(\tau, r) dt^2 + n(\tau, r) dr^2 + r^2 d\Omega^2$  für geeignete  $m(\tau, r)$  und  $n(\tau, r)$  hat.

- (iii) Um zu zeigen, dass (B.3) eine Lösung hat, kann man die *Methode der Charakteristiken* verwenden. Die Idee dabei ist: Die Lösung  $t = t(\tau, r)$  kann als zweidimensionale Fläche  $\{(\tau, r, t(\tau, r))\}$  im  $\mathbb{R}^3$  aufgefasst werden. Ausgehend von einem Punkt auf einer Anfangskurve  $\Gamma: s \in \mathbb{R} \mapsto (\tau_0(s), r_0(s), t_0(s)) \in \mathbb{R}^3$  konstruiert man eine *charakteristische Kurve*  $\gamma_s: u \mapsto (\tau(u), r(u), t(u))$  in der Fläche  $u$ , d.h.  $\gamma_s(0) = \Gamma(s)$  und  $\frac{d\tau}{du} = a(\tau(u), r(u))$  und  $\frac{dr}{du} = -b(\tau(u), r(u))$  und  $\frac{dt}{du} = 0$  gilt. Alle diese Kurven werden zu der Fläche  $F: (s, u) \mapsto (\tau(u, s), r(u, s), t(u, s))$  (B.3) zusammengeklebt.

Zeigen Sie, dass falls  $\Gamma$  *nichtcharakteristisch*, d.h. falls  $a(\Gamma^1(s), \Gamma^2(s)) \partial_s \Gamma^2(s) + b(\Gamma^1(s), \Gamma^2(s)) \partial_s \Gamma^1(s) \neq 0$ , ist, ist  $(s, u) \mapsto (\tau(u, s), r(u, s))$  lokal (nahe  $(\Gamma^1(s), \Gamma^2(s))$ ) invertierbar und  $t(\tau, r) := t(u(\tau, r), s(\tau, r))$  löst die Gleichung (B.3).

**Übungsaufgabe 38.** Sei  $(M, g)$  eine Lorentzmannigfaltigkeit. Sei  $c: [0, 1] \rightarrow M$  eine lichtartige Kurve von  $c(0) = p$  nach  $c(1) = q$ , die nicht die Spur einer Geodätischen ist. Zeigen Sie, dass es dann eine zeitartige Kurve von  $p$  nach  $q$  gibt.

Hinweis: Als Ansatz kann man eine Variation  $c_s(t) = c(s, t)$  mit Variationsvektorfeld  $X(t) (= \partial_s|_{s=0} c(s, t)) = \alpha(t) Y(t) + \beta(t) \nabla_{\dot{c}} \dot{c}(t)$  für geeignete Funktionen  $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow M$  und ein

## B. Übungsaufgaben

geeignetes Vektorfeld  $Y$  längs  $c$  (z.B. ein paralleles) so finden, dass  $g(\nabla_{\dot{c}}X, \dot{c}) < 0$  ist, die Variation in  $s$  entwickeln und dann argumentieren, dass  $c_s$  für  $s$  klein genug zeitartig ist.

**Übungsaufgabe 39.** Wählen Sie auf den folgenden Mannigfaltigkeiten eine Zeitorientierung (sofern möglich) und bestimmen Sie  $I_+(p)$  für ein  $p \in M$ .

(i)  $M = S^1 \times \mathbb{R} \ni (r, t), g = dr^2 - dt^2$

(ii)  $M = S^1 \times \mathbb{R} \ni (t, r), g = dr^2 - dt^2$

(iii) Der de Sitter-Raum aus Beispiel II.1.9.

(iv)  $M = I \times \mathbb{R}^3, g = -dt^2 + f(t)^2 g_E$  für ein glattes  $f \in C^\infty(I, \mathbb{R}_{>0})$  (Hier ist  $g_E$  die euklidische Metrik auf  $\mathbb{R}^3$ ).

**Übungsaufgabe 40.** Sei  $(M, g)$  eine kompakte Lorentzmannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass es eine geschlossene zeitartige Kurve gibt.

**Übungsaufgabe 41.** Sei  $(M = \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), g = \frac{1}{\cos^2 x}(-dt^2 + dx^2))$ . Zeigen Sie,

(i)  $(M, g)$  ist geodätisch vollständig.

Hinweis: Nicht versuchen alle Geodätischen explizit zu bestimmen. Sich erst überlegen, wo kann so eine Geodätische 'aufhören zu existieren' (gibt im Prinzip zwei Fälle) und sich dann überlegen, dass der Parameter der Geodätischen bis dahin doch gegen  $\pm\infty$  gehen muss (Durch Abschätzen geeigneter Integrale und verwenden, dass man Geodätische ist). (Z.B. falls  $\gamma(s) = (t(s), x(s))$  erfüllt, dass  $t(s) \rightarrow \infty$  für  $s \rightarrow s_{max}$ , betrachte  $t(s) - t(s_0) = \int_{s_0}^s \dot{t}(u) du \dots$ )

(ii) Es gibt Punkte  $p, q \in M$ , zwischen denen es beliebig lange zeitartige Kurven gibt.

(iii\*)  $\exp_{(0,0)}$  ist nicht surjektiv.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass alle zeitartigen Geodätischen, die in  $(0, 0) \in M$  starten, durch den Punkt  $(\pi, 0)$  laufen.

**Übungsaufgabe 42.** Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Lorentzmannigfaltigkeit mit gewählter Zeitorientierung. Zeigen Sie

(i)  $I_+(p)$  ist offen

(ii)  $J_+(p)$  muss nicht abgeschlossen sein

(iii)  $J_+(p) \subset \overline{I_+(p)}$

(iv)  $I_+(p) = \text{Innere}(J_+(p))$ .

**Übungsaufgabe 43.** Sei  $c_i: [0, 1] \rightarrow M$  für  $i = 1, 2$  zwei zukunftsgerichtete kausale Geodätische mit  $c_1(0) = p, c_1(1) = c_2(0) = x$  und  $c_2(1) = q$  und  $\dot{c}_1(1) \neq \dot{c}_2(0)$ . Zeigen Sie, dass es eine kausale zukunftsgerichtete Kurve  $\gamma$  von  $p$  nach  $q$  mit  $L(\gamma) > L(c_1) + L(c_2)$  gibt.

**Übungsaufgabe 44.** Sei  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Seien  $(r, \varphi)$  Polarkoordinaten auf  $M$ . Sei  $g = -dr^2 + r^4 d\varphi^2$ . Bestimmen Sie die lichtartigen Geodätischen und skizzieren Sie deren Verhalten.

**Übungsaufgabe 45.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche oder Lorentzmannigfaltigkeit. Sei  $c: I \rightarrow M$  eine glatte Kurve und sei  $X$  ein glattes Vektorfeld längs  $c$  (also  $X(t) \in T_{c(t)}M$  für alle  $t \in I$  und in jeder Karte hängt  $X$  glatt von  $t$  ab.). Für  $t_1, t_2 \in I$  sei  $\parallel_{t_1, t_2}^c: T_{c(t_1)}M \rightarrow T_{c(t_2)}M$  der Paralleltransport entlang  $c$ , vgl. ÜA 29. Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \parallel_{t, t_0}^c X(t) = (\nabla_{\dot{c}} X)(t_0).$$

**Übungsaufgabe 46.** Wir betrachten den zweidimensionalen Minkowskiraum und darin  $S = \{(x^0, x^1) \in \mathbb{R}^2 \mid -(x^0)^2 + (x^1)^2 = -1, x^0 > 0\}$ . Begründen oder widerlegen Sie:

- (i)  $S$  ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$
- (ii)  $S$  ist achronal.
- (iii)  $S$  ist Cauchyhyperfläche für  $\mathbb{R}^2$
- (iv)  $I_+(S) \cup S \cup I_-(S) = I_+(0 \in \mathbb{R}^2)$ . Was würde das dann bedeuten?



# Literaturverzeichnis

- [1] BERNAL, A. N., AND SÁNCHEZ, M. Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes. *Comm. Math. Phys.* 257, 1 (2005), 43–50.
- [2] BORCHERS, H. J., AND HEGERFELDT, G. C. The structure of space-time transformations. *Comm. Math. Phys.* 28 (1972), 259–266.
- [3] EINSTEIN, A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik und Chemie* 17 (1905), 891–921.
- [4] GROSSE, N. Analysis II, Skript, SS 2021, Uni Freiburg. [https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisII/Analysis2\\_SS-21\\_Skript.pdf](https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisII/Analysis2_SS-21_Skript.pdf)  
Übungsaufgaben unter [https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisII/Analysis2\\_SS-21\\_uebungen\\_gesamt.pdf](https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisII/Analysis2_SS-21_uebungen_gesamt.pdf).
- [5] GROSSE, N. Differentialgeometrie I. [http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Skripte/DiffGeo\\_WS-1920\\_Skript.pdf](http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Skripte/DiffGeo_WS-1920_Skript.pdf).
- [6] GROSSE, N. Differentialgeometrie II. [http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/DiffGeo2\\_SS20.pdf](http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/DiffGeo2_SS20.pdf).
- [7] GUILLEMIN, V., AND POLLACK, A. *Differential topology*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.
- [8] KOMAR, A. Necessity of singularities in the solution of the field equations of general relativity. *Phys. Rev., II. Ser.* 104 (1956), 544–546.
- [9] LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*, second ed., vol. 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2013.
- [10] LOVELOCK, D. The four-dimensionality of space and the Einstein tensor. *J. Mathematical Phys.* 13 (1972), 874–876.
- [11] MISNER, C. W., THORNE, K. S., AND WHEELER, J. A. *Gravitation*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1973.
- [12] NOMIZU, K., AND OZEKI, H. The existence of complete Riemannian metrics. *Proc. Amer. Math. Soc.* 12 (1961), 889–891.

*Literaturverzeichnis*

- [13] O'NEILL, B. *Elementary differential geometry*, second ed. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2006.
- [14] PENROSE, R. Gravitational collapse and space-time singularities. *Phys. Rev. Lett.* *14* (1965), 57–59.
- [15] PETERSEN, P. *Riemannian geometry*, second ed., vol. 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2006.
- [16] RAYCHAUDHURI, A. Relativistic cosmology. i. *Phys. Rev.* *98* (May 1955), 1123–1126.
- [17] STEENROD, N. *The topology of fibre bundles.*, 1st paperback edition ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1999.
- [18] WALD, R. M. *General relativity*. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1984.