

Allgemeine Relativitätstheorie

Universität Freiburg, WS 2018/19

Nadine Große

Skript - Version vom 2. Juni 2019

Wenn Sie (Tipp-)Fehler finden, bin ich dankbar, wenn Sie mir diese mitteilen.

Inhaltsverzeichnis

I. Vor der allgemeinen Relativitätstheorie	1
I.1. Newtonsche Gravitationstheorie:	1
I.2. Spezielle Relativitätstheorie (SRT)	3
I.2.1. Kinematik und Dynamik	7
I.3. Gravitation in SRT?	8
II. Allgemeine Relativitätstheorie	9
II.1. Das Äquivalenzprinzip	9
II.1.1. Interpretation der Raumzeit als Lorentz-Mannigfaltigkeit	11
II.1.2. Kovarianzprinzip - Tensoren	15
II.1.3. Korrespondenzprinzip	23
II.1.4. Gezeitenkräfte	23
II.2. Feldgleichungen	25
II.3. Die Schwarzschildlösung	28
II.3.1. Geodätengleichung und Erhaltungsgrößen	29
II.3.2. Qualitatives Verhalten der Geodätischen	30
II.3.3. Newtonsch im Limes?	32
II.3.4. Lichtablenkung	34
II.3.5. Planetenbewegung und Periheldrehung	35
II.3.6. $r = r_S$ - eine echte Singularität? Nein!	37
II.4. Kosmologie und Isometrien	40
II.4.1. Killingvektorfelder	40
II.4.2. Kosmologische Raumzeiten	47
II.4.3. Materiemodell für perfekte Flüssigkeiten	48
II.4.4. Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker	49
II.4.5. Zur Messungen der Hubble-Konstante – Rotverschiebung	50
II.4.6. Andere kosmologische Modelle	53
II.5. Kausalität	53
II.5.1. Grundlegende Begriffe	53
II.5.2. Riemannsche vs. Lorentzeigenschaften	56
II.5.3. Global hyperbolisch	59
II.6. Singularitäten	62
II.6.1. Singularitätentheorem von Raychaudhuri und Komar	63
II.6.2. Geometrie von Untermannigfaltigkeiten	64
II.6.3. Singularitätentheorem von Penrose	66
II.7. Linearisierte Gravitationstheorie	69
II.7.1. Freiheit in der Koordinatenwahl	69
II.7.2. Newtonscher Limes	70
II.7.3. Gravitationswellen	71
II.8. Zu Wellengleichungen auf Lorentz-Mannigfaltigkeiten	71
II.8.1. Wellengleichung im $2D$ -Minkowski	72
II.8.2. Klein-Gordon Gleichung auf ultrastatischen Mannigfaltigkeiten	73
II.8.3. Auf global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten	75
II.9. Das Cauchyproblem der Einsteingleichungen	75
II.9.1. Die Zwangsbedingungen	76
II.9.2. Wohlgestelltheit der Vakuum-Einsteingleichungen	78
A. Ableitung der Schwarzschildlösung mittels des Computeralgebrasystems Maxima	81

B. Sternmodell	85
B.1. Statische radialsymmetrische Sterne	85
B.1.1. Newton	85
B.1.2. ART	86
B.2. Gravitativer Kollaps	88
C. Übungsaufgaben	93
Literatur	109

I. Vor der allgemeinen Relativitätstheorie

I.1. Newtonsche Gravitationstheorie:

Vorl. 1

- Allgemein in der Newtonschen Theorie: absolute Zeit
- *Galileisches Relativitätsprinzip*: Alle Bezugssysteme (*Bezugssystem* = Festlegen der räumlichen Koordinaten (x^1, x^2, x^3) zu jedem Zeitpunkt und eines Zeitnullpunkts), die durch Translation, räumliche Rotation auseinander hervorgehen oder gleichförmig (unbeschleunigt) zueinander bewegt sind, sind äquivalent (= alle Naturgesetze* haben für alle Beobachter in solchen Bezugssystemen die gleiche Form).[†] Diese Art der Transformationen heißen *Galileo-Transformationen*:

$$x' = Ax + a + vt$$

wobei $A \in SO(3)$ eine konstante Rotationsmatrix ist, $t \in \mathbb{R}$ ist die Zeit, und $a, v \in \mathbb{R}^3$.[‡]

- Eine (sich möglicherweise zeitlich verändernde) *Masseverteilung* $\rho(t, x)$ erzeugt ein *Gravitationspotential* Ψ bestimmt durch:

$$\Delta\Psi = 4\pi G\rho,$$

wobei in euklidischen Koordinaten zu jedem Zeitpunkt $\Delta\Psi := \left(\frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2} \right) \Psi$ ist. Hierbei ist G die *Gravitationskonstante* – eine Naturkonstante $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$. Man beachte, dass das Gravitationspotential durch obige Gleichung nicht eindeutig bestimmt ist, sondern Addition einer Konstante immer wieder eine Lösung bestimmt.

- Ein *Inertialsystem* ist ein Bezugssystem, in dem sich jeder kräftefreie Körper relativ zu diesem Bezugssystem gleichförmig bewegt (schließt insbesondere den Ruhefall ein). In solchen Inertialsystemen bewegt sich ein Körper im Gravitationspotential Ψ gemäß den Bewegungsgleichungen $\ddot{x} = -\nabla\Psi$. Hat der Körper die Masse m , nennt man $-m\nabla\Psi$ die Kraft auf diesen Körper.
- Die obigen Bewegungsgleichungen implementieren schon das *Äquivalenzprinzip*: Ein Beobachter kann in einem geschlossenen Labor, ohne Information von außen, aus dem mechanischen Verhalten von Gegenständen im Labor nicht ablesen, ob er sich in Schwerelosigkeit oder im freien Fall befindet. Das heißt, dass Gravitationskräfte äquivalent zu Trägheitskräften sind und Gravitationskräfte durch Wechsel in ein beschleunigtes Bezugssystem lokal eliminiert werden können. Das entspricht der Gleichheit von *träger Masse* (= der Massebegriff, der an Beschleunigung durch Bewegung koppelt) und *schwerer Masse* (= der Massebegriff, der an die Gravitation koppelt). In der Bewegungsgleichung von oben ist das schon drin und die Massen sind 'rausgekürzt'. Eigentlich stände dort

$$m_{\text{träge}}\ddot{x} = -m_{\text{schwere}}\nabla\Psi \quad (\text{Kräftegleichgewicht}). \quad (\text{I.1})$$

- Die Energie $E = \underbrace{\frac{1}{2}m|\dot{x}|^2}_{\text{kinetische Energie } T} + \underbrace{m\Psi}_{\text{potentielle Energie } V}$ ist konstant entlang einer Lösung $x(t)$ der obigen Bewegungsgleichung, s. Übungsaufgabe A.i. (Ist $\nabla\Psi$ konstant gleich $g\partial_{x^3}$ [§], dann ist $m\Psi =$

*die Newton kannte

[†]Damit legt man insbesondere einen Begriff von *ruhend in einem Bezugssystem* fest: Ein Körper ist in einem Bezugssystem in Ruhe, wenn es zu jedem Zeitpunkt, die gleichen räumlichen Koordinaten hat.

[‡]Es kann auch $A \in O(3)$ und zusätzlich $t \mapsto -t$ erlaubt sein, also räumliche Spiegelung und Zeitspiegelungen einschließen. Das hängt davon ab, welche Naturgesetze man genau betrachtet. Lässt man zum Beispiel Reibung zu, sind Zeitspiegelungen keine erlaubte Transformation sein. Weiterhin gibt es rechts- und linkshändige Neutrinos, die sich echt anders verhalten, s. <https://de.wikipedia.org/wiki/Paritätsverletzung>.

[§] $\partial_{x^3} := \frac{\partial}{\partial x^3}$ ist der Einheitsvektor in x^3 -Richtung

I. Vor der allgemeinen Relativitätstheorie

mgx^3 (bis auf eine Konstante.)

- *Variationelle Beschreibung (Prinzip der stationären Wirkung)* – siehe Übungsaufgabe A. Ordnet man einer Bewegung $x = x(t)$ zwischen zwei Punkten $q_0 = x(t_0)$ und $q_1 = x(t_1)$ die *Wirkung* $L(x)$, also das Integral

$$L(x) := \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

über die Lagrangefunktion $\mathcal{L} = T - V$ zu, dann erfüllt $x(t)$ genau dann die Bewegungsgleichung, wenn die Wirkung unter allen Bewegungen $x(t)$ mit $q_0 = x(t_0)$ und $q_1 = x(t_1)$ *extremal* ist. D.h. $x(t)$ erfüllt genau dann die Bewegungsgleichung, wenn für alle $\delta \in C^\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^3)$ mit $\delta(t_0) = \delta(t_1) = 0$ und $x_\epsilon(t) := x(t) + \epsilon\delta(t)$

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} L(y_\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = 0$$

gilt. In diesem Fall heißt $x(t)$ auch *kritischer Punkt* von L .

Beispiel I.1.1. Ist unsere Masseverteilung einfach nur ein (idealisiertes) Punktteilchen der Masse M im Punkt $y \in \mathbb{R}^3$, ist $\rho(t, x) = M\delta_y$ und $\Psi(t, x) = -\frac{GM}{r}$, wobei $r = |y-x|$ ist (=Newtonsches Gravitationsgesetz für ein Punktteilchen/Planet). Dann ist die Energie eines Testteilchen m , welches nur unter dem Einfluss des Gravitationsfeldes von M im freien Fall ist:

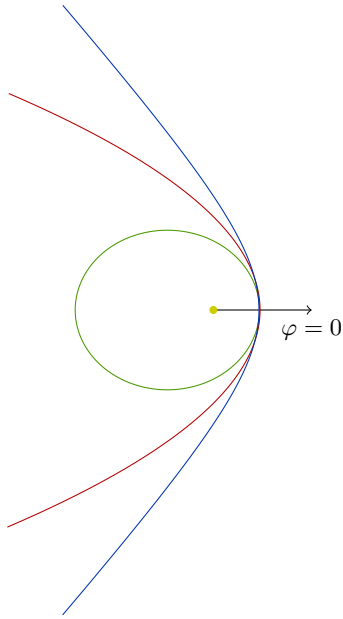
$$E = \frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 - \frac{GMm}{|x|}.$$

Ist unsere Masseverteilung zwar nicht nur idealisiert in einem Punkt aber innerhalb eines Balles vom Radius R und darin radialsymmetrisch, dann wird Ψ für $r > R$ auch durch $\Psi(t, x) = -\frac{GM}{r}$ mit $M = \int_0^R \rho(r)4\pi r^2 dr$ beschrieben, vgl. Übungsaufgabe B.

Bemerkung I.1.2 (Planetenbewegung unter Newton). Nehmen wir an, dass $\Psi(x) = -\frac{GM}{|x|}$ das Gravitationspotential der Sonne sei, die sich im Koordinatenursprung befindet. Die folgenden Aussagen werden in Übungsaufgabe 1 unter der Annahme, dass ein Testkörper auf die Position der Sonne keinen Einfluss hat, und in Übungsaufgabe 2 ohne diese Annahme, detailliert nachgerechnet. Dann bewegen sich Testkörper in diesem Gravitationspotential auf zeitlich unveränderlichen Ebenen in welche die Sonne liegt. Es können drei Fälle auftreten: Die Bewegung in dieser Ebene verläuft entlang einer Ellipse, einer Parabel oder einer Hyperbel: Beschreibt man die Bahnkurve unter Verwendung von (zweidimensionalen) Polarkoordinaten (r, φ) und betrachtet $r = r(\varphi)$ (die Spur der Bewegung), dann erhält man für $u = 1/r$ die Gleichung

$$u'' + u - \frac{GM}{\ell^2} = 0. \tag{I.2}$$

Hierbei $u' := \frac{du}{d\varphi}$ und $\ell = r^2\dot{\varphi}$ ist der *Drehimpuls*, eine *Erhaltungsgröße* – also in der Zeit konstant und kann deshalb aus den Anfangswerten berechnet werden.



Ansatz für die Lösung:

$$u = \frac{1}{p}(1 + \epsilon \cos \varphi)$$

(Dann ist $r = r(\varphi)$ die Darstellung einer Ellipse ($\epsilon \in [0, 1)$)/Parabel ($\epsilon = 1$)/Hyperbel ($\epsilon > 1$) in Polarkoordinaten deren Mittelpunkt in einem Brennpunkt ist.) Man sieht, dass $p = \frac{\ell^2}{M}$ ist. Nehmen wir an, dass zur Zeit Null der Planet sich am sonnen nächsten Punkt befindet. Der ist immer in einem Radius $r_0 > 0$ – vgl. Übungsaufgabe 1.iii. Des Weiteren sei dort $\varphi = 0$. Dann sind die Anfangswerte $r(0) = r_0, \dot{r}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0$ und wir erhalten $p = \frac{r_0^4 \omega_0^2}{M}$ und $u(0) = r_0^{-1} = \frac{M}{\ell^2}(1 - \epsilon)$, also $\epsilon = \frac{\ell^2}{Mr_0} - 1$.

I.2. Spezielle Relativitätstheorie (SRT)

In der Newtonschen Mechanik haben wir die *Newtonsche Geschwindigkeitsaddition*: Haben wir drei Körper bzw. Testteilchen A, B, C , dann messe A in einem Bezugssystem, in welchem er in Ruhe ist, die Relativgeschwindigkeit u von C und u' von B . Analog messe B die Relativgeschwindigkeit v von C . Dann gilt $u = v + u'$. Das müsste dann insbesondere auch gelten, wenn eines der Teilchen Licht ist.

Aber Experimente zeigen, dass die Lichtgeschwindigkeit (bzgl. eines festen Hintergrundsystems) konstant ist (Sie hängt insbesondere nicht von Geschwindigkeit der emittierenden Quelle ab). Insbesondere ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum in allen Bezugssystemen gleich.*

Will man also auch Bewegungen von Teilchen, deren Geschwindigkeiten nicht mehr genügend klein verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit sind, oder von Licht selbst beschreiben, reicht die Newtonsche Theorie nicht mehr aus.

Für seine spezielle Relativitätstheorie (SRT) verfasste Einstein zwei Postulate:†

Dazu ist ein Inertialsystem noch immer ein Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Körper gleichförmig bewegt.

- (1) Das Relativitätsprinzip: Die Gesetze der Physik (Newton II ($F = ma$), Elektrodynamik) sind in allen Inertialsystemen die gleichen. Es gibt insbesondere kein bevorzugtes Inertialsystem.
- (2) Die Geschwindigkeit von Licht im Vakuum ist konstant und hängt insbesondere nicht von der Geschwindigkeit der Quelle ab. Nichts bewegt sich schneller als die Lichtgeschwindigkeit.

Das erste Postulat ist immer noch das im Newtonschen – allerdings wird das hier nicht mehr implizieren, dass die zwei Inertialsysteme mittels einer Galileo-Transformation auseinander hervorgehen, da diese die Newtonsche Geschwindigkeitsaddition impliziert, was der konstanten Lichtgeschwindigkeit im zweiten Postulat widerspricht.

In einem Bezugssystem $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ sind durch die konstante Geschwindigkeit insbesondere die Bahnkurven von Lichtteilchen festgelegt – nämlich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit $c \sim 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, die wir vereinfachend in Zukunft auf $c = 1$ setzen. Solche Bahnkurven nennen wir *lichtartige Geraden*.

*Experiment (1887): https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson%E2%80%93Morley_experiment

†Einstein verfasste die SRT insbesondere für die Elektrodynamik [3]. Die Maxwellgleichungen (~ 1865 , <https://de.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Gleichungen>) kann man aber auch so lesen, dass sie schon eine konstante Lichtgeschwindigkeit voraussetzen. Aber es gab zu dieser Zeit verschiedene konkurrierende Theorien des Elektromagnetismus, z.B. basierend auf Äther. Dieses Äther sollte eigentlich im obigen Experiment von Michelson und Morley nachgewiesen werden.

I. Vor der allgemeinen Relativitätstheorie

Satz I.2.1 (Borchers-Hegerfeldt [2]). * Sei $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Sei $T: M \rightarrow M$ eine bijektive Abbildung, welche lichtartige Geraden auf lichtartige Geraden abbildet. Dann ist T eine affine Abbildung. Die Menge solcher Abbildungen bilden eine Gruppe[†], die durch

(i) die Lorentzgruppe (Das ist die Isometriegruppe von M mit dem Innenprodukt $\langle v, v \rangle_L := -(v^0)^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$.)

(ii) Translationen von M

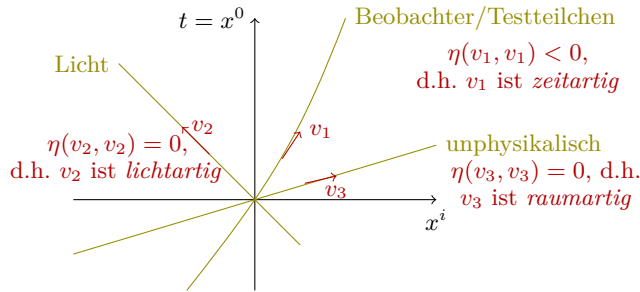
(iii) Dilatationen (Multiplikation mit einem Skalar)

erzeugt wird.

Wir ignorieren vorerst die Dilatationen, dazu mehr auf Seite 6. Um die Erkenntnis des Auftretens der Lorentzgruppe zu implementieren, wird die SRT im Minkowskiraum M definiert: $M = \mathbb{R}^4$ mit dem inneren Produkt η , beschrieben durch die Matrix $J := \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, d.h. für $v, w \in \mathbb{R}^4$ gilt

$$\eta(v, w) := \langle v, Jw \rangle = x^T Jw = -v^0 w^0 + v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3 + v^4 w^4 =: \eta_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta. \ddagger$$

Analog definiert man den n -dimensionalen Minkowskiraum.



Wir schreiben auch $|v|_L^2 := \eta(v, v)$ – beachten Sie, dass $|v|_L^2$ auch negativ sein kann. Wählen wir Einheiten so, dass die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ ist. Dann hat Licht zu jedem Zeitpunkt einen Geschwindigkeitsvektor v mit $|v|_L^2 = 0$, einen sogenannten lichtartigen Vektor. Für ein Teilchen mit räumlicher Geschwindigkeit kleiner der Lichtgeschwindigkeit ist, der Geschwindigkeitsvektor im Minkowskiraum zeitartig, d.h. $|v|_L^2 < 0$. Raumartige Vektoren, also $|v|_L^2 > 0$, entsprechen einer räumlichen Geschwindigkeit größer der Lichtgeschwindigkeit und sind daher nach Postulat unphysikalisch.

Wir wollen nun die Lorentzgruppe näher bestimmen:

Lemma I.2.2. Sei M der $m + 1$ -dimensionale Minkowskiraum. Sei $\varphi: M \rightarrow M$ eine bijektive Abbildung, die das Minkowskiprodukt erhält, d.h.

$$\eta(\varphi(x), \varphi(y)) = \eta(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in M.$$

Dann ist φ linear, und es gibt eine Matrix $A \in O(m, 1) := \{A \in M_{\mathbb{R}}(m+1) \mid A^T J A = J\}$, so dass $\varphi(x) = Ax$ gilt. Solche Abbildungen heißen Lorentztransformationen.

Beweis. Sei $w_{x,y} := \varphi(x + y) - \varphi(x) - \varphi(y)$, Angenommen $w_{x,y} \neq 0$. Dann gibt es einen Vektor w' mit $\eta(w', w_{x,y}) \neq 0$, und wir haben

$$0 \neq \eta(\varphi(x + y) - \varphi(x) - \varphi(y), w') = \eta(x + y, \varphi^{-1}(w')) - \eta(x, \varphi^{-1}(w')) - \eta(y, \varphi^{-1}(w')) = \eta(0, \varphi^{-1}(w')) = 0.$$

Analog sieht man $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$. Also ist φ linear und kann durch eine Matrix A beschrieben werden.

Wir haben also

$$x^T J y = \eta(x, y) = \eta(Ax, Ay) = (Ax)^T J (Ay) = x^T A^T J A y$$

für alle $x, y \in M$. □

* gilt analog auch für $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$

† Diese Gruppe ist auch die Invarianzgruppe der Maxwellgleichungen, die die Propagation von elektromagnetischer Strahlung, wie z.B. Licht, beschreiben.

‡ In dieser Schreibweise steht $\eta_{\alpha\beta}$ für die Einträge der Matrix $J = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Griechische Indizes α, β, \dots stehen im Folgenden immer für Koordinaten einschließlich der nullten, der Zeitkoordinate, während wir für rein räumliche Koordinaten i.A. lateinische Indizes i, j, \dots verwenden werden. Weiterhin ist der letzte Ausdruck eigentlich eine Summe über alle α, β , aber wir verwenden die Einsteinsche Summenkonvention, in der über wiederkehrende Indizes, die einmal oben und einmal unten stehen, automatisch summiert wird.

Bemerkung I.2.3. $\mathcal{L}^\uparrow(m+1) := \{A \in O(m, 1) \mid a_{11} > 0\}$, die zeitorientierungserhaltenden Lorentztransformationen, sind eine Untergruppe von $O(m, 1)^*$. Die folgenden Transformationen erzeugen $\mathcal{L}^\uparrow(m+1)$.

(i) Rotationen in räumliche Richtungen:

$$R := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \quad B \in SO(m) = \{A \in O(m) \mid \det A = 1\}.$$

(ii) Räumliche Spiegelungen: Wir betrachten erst einmal den Fall $m = 2$: Ist $B \in O(2) \setminus SO(2)$, hat also die Form $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$, dann erhält man in (i) noch immer ein Element aus $\mathcal{L}^\uparrow(3)$ (=Rotation um den Winkel α und dann Spiegelung an der x_2 -Achse). Insbesondere ist $S_2 := \text{diag}(1, 1, -1) \in \mathcal{L}^\uparrow(3)$. Analog ist $S_n := \text{diag}(1, \dots, 1, -1) \in \mathcal{L}^\uparrow(n+1)$.

(iii) *Lorentz-Boosts*:

$$L_\eta^1 := \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta & 0 \\ \sinh \eta & \cosh \eta & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$$

und analog für alle $i = 1, \dots, m$

$$L_\eta^i := \begin{pmatrix} \cosh \eta & 0 & \sinh \eta & 0 \\ 0 & \text{Id}_{i-1, i-1} & 0 & 0 \\ \sinh \eta & 0 & \cosh \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{Id}_{m-i, m-i} \end{pmatrix} \quad \eta \in \mathbb{R}$$

Diese Matrizen kann man als die 'Rotationen im hyperbolischen' ansehen, da $\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1$ ist, vgl. auch Übungsaufgabe 3.

Eigenzeit eines Testteilchens: Ist ein Testteilchen in einem Bezugssystem $(t = x^0, x^i)$ in Ruhe, sei t die auch für das Testteilchen vergehende Zeit, die *Eigenzeit*. Es bewege sich in diesem Bezugssystem nun ein Beobachter räumlich mit konstanter Geschwindigkeit \vec{x} – also im Minkowskiraum entlang $x(t) = (t, \vec{x}t)^T$ (wir ignorieren hier Translationen). Da die Geschwindigkeit des Beobachters kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein sollte, muss $|\vec{x}| < 1$ sein. Welche Zeit vergeht für ihn? Dazu verwenden wir eine Lorentztransformation A , so dass $Ax(t)$ die Form $(s(t), \vec{0})^T$ hat, also sich der Beobachter bzgl. des neuen Bezugssystems in Ruhe befindet, vgl. Übungsaufgabe 3. Eine solche Lorentztransformation existiert immer, ist jedoch nicht eindeutig. Allerdings ist $s(t)$ modulo Vorzeichen eindeutig bestimmt: Da A das Minkowskiprodukt erhält, gilt $-s(t)^2 = -t^2 + |\vec{x}|^2 t^2 = -\eta(\dot{x}, \dot{x})t^2$.

Vorl. 2

Nun ist für den Beobachter $s(t)$ die verstreichende Eigenzeit und nicht das ursprüngliche t , was einfach nur die Parametrisierung beschrieb. Parametrisieren wir $x(t)$ um, als $\gamma(\tau) = x\left(\frac{\tau}{\sqrt{1-|\vec{x}|^2}}\right) = \left(\frac{\tau}{\sqrt{1-|\vec{x}|^2}}, \frac{\tau}{\sqrt{1-|\vec{x}|^2}}\vec{x}\right)^T$, dann ist $A\gamma(\tau) = (\tau, \vec{0})^T$, also ist der Beobachter *nach Eigenzeit parametrisiert*.

Habe der Beobachter nun keine konstante räumliche Geschwindigkeit, dann gibt es keine Lorentztransformation, die seine Kurve auf die x^0 abbildet. Aber infinitesimal ist das natürlich immer möglich[†] und definiert so auch den Begriff der Eigenzeit: $d\tau = \sqrt{-\eta(\dot{x}(t), \dot{x}(t))}dt$ – d.h. zwischen $x(t_0)$ und $x(t_1)$ vergeht für den Beobachter die Eigenzeit

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{-\eta(\dot{x}(t), \dot{x}(t))} dt.$$

Ist der Beobachter schon in Eigenzeit parametrisiert, ist insbesondere $\eta(\dot{x}(t), \dot{x}(t)) = -1$ für alle t . Im folgenden seien unsere Beobachter immer schon in Eigenzeit und in unsere 'feste Zeitrichtung' parametrisiert, also eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve $\gamma: I \rightarrow M$ mit $\eta(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = -1$ (*zeitartig*: $\eta(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) < 0$ und *zukunftsgerichtet*: $\dot{\gamma}^0(t) > 0$).

*vgl. ??

[†]d.h. für jeden Punkt der Kurve gibt es eine Lorentztransformation, die den Geschwindigkeitsvektor auf $(-1, \vec{0})^T$ abbildet und damit infinitesimal die Eigenzeit definiert. Das ist analog zur Aussage in der Kurventheorie im euklidischen \mathbb{R}^n , dass jede reguläre Kurve $x(t)$ (*regulär* = nirgends Geschwindigkeit $\dot{x} = 0$) nach Bogenlänge parametrisiert werden kann, d.h. $\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle_{\text{eukl.}} = 1$.

I. Vor der allgemeinen Relativitätstheorie

In Koordinaten x^i wird die allgemeine Formel für die Eigenzeit eines Beobachters oft als

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\text{I.3})$$

geschrieben. Das ist erst einmal nur eine formale Schreibweise, die an die Tensorschreibweise* angelehnt ist. Wie muss man das lesen? Erstens ist hier dx^α als *Einsform* gemeint, d.h. als lineare Abbildung $dx^\alpha: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $dx^\alpha(\partial_{x^\beta}) = \delta_\alpha^\beta$ geschrieben. Für einen Beobachter, der sich entlang $x(t) = (x^0(t), \dots, x^n(t))$ bewegt ist im Punkt $x(t)$ der Geschwindigkeitsvektor $\dot{x}(t) = \dot{x}^\alpha(t)\partial_{x^\alpha}$. Dann ist $dx^\alpha(\dot{x}(t)) = \dot{x}^\alpha(t)$ bzw. $dx^\alpha = \dot{x}^\alpha(t)dt$. Also ist formal $\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -\eta_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha(t) \dot{x}^\beta(t) dt^2 = -\eta(\dot{x}(t), \dot{x}(t)) dt^2$ und damit das formale Quadrat von $d\tau = \sqrt{-\eta(\dot{x}(t), \dot{x}(t))} dt$.

Wie ist das mit der Eigenzeit von Licht? Sei $x(t)$ die Kurve eines Lichtteilchens, dann ist $\eta(\dot{x}, \dot{x}) = 0$ für alle t . Es gibt also keine Lorentztransformation, die $x(t)$ auf ein Bezugssystem abbildet, in dem das Lichtteilchen in Ruhe ist. Benutzt man aber einfach ganz analog die gleiche Definition von Eigenzeit wie oben, so ist $d\tau = \sqrt{-\eta(\dot{x}(t), \dot{x}(t))} dt = 0$. Für Licht vergeht also keine Eigenzeit. Wegen Stetigkeit erkennt man schon, um so näher die räumliche Geschwindigkeit eines Teilchens in einem festen Bezugssystem an der Lichtgeschwindigkeit ist, desto weniger Eigenzeit vergeht für das Teilchen (s. eine einfache Form des Zwillingsparadoxons, Übungsaufgabe 4.iii).

Was ist mit den Dilatationen aus Satz I.2.1? In den obigen Betrachtungen haben wir bis jetzt nur die Lorentztransformationen verwendet. Die Translation haben auf die Geschwindigkeit und damit auf die Eigenzeit keinen Einfluss. Verwenden wir eine Dilatation, so würde sich die Eigenzeit eines Beobachters skalieren. Wir wollen aber (erstes Postulat), dass in jedem Inertialsystem die gleichen Gesetze der Physik gelten, also auch die gleiche Eigenzeit vergeht. Also sind die Dilatationen keine Transformation zwischen Inertialsystemen.† Die Invarianzgruppe der SRT‡ ist also die *Poincaré-Gruppe*, also die Gruppe, die durch die Lorentzgruppe und Translationen erzeugt wird:

Was bedeutet die konstante Lichtgeschwindigkeit für die Synchronisation von Uhren?

Während man in der Newtonschen Theorie, 'beliebig schnell' kommunizieren kann und damit einen Begriff von absoluter Gleichzeitigkeit hat (=alle Uhren zu einer Zeit 'beliebig genau' synchronisieren kann), ist Kommunikation nun durch die Lichtgeschwindigkeit begrenzt.

In einem Bezugssystem kann ich Uhren synchronisieren (ich weiß ja, wie lange das Licht irgendwo hin braucht), aber diese Synchronisation wird vom Bezugssystem abhängen, vgl. Abbildung I.1.

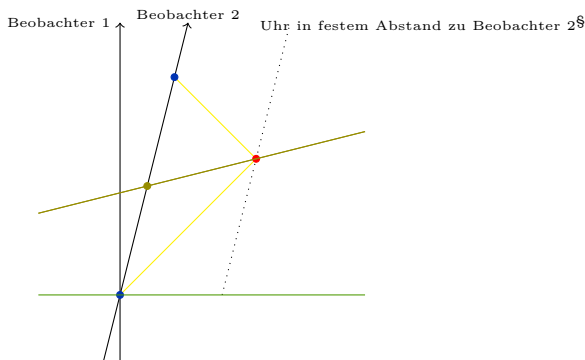


Abb. I.1.: Wie synchronisiert ein Beobachter seine Uhren?

Hat ein Beobachter 2 eine Uhr in einem festen Abstand zu sich, schickt er einen Lichtstrahl (gelb im Bild) los zu dieser Uhr. In dem Moment, wo dieser Lichtstrahl an dieser Uhr ankommt (roter Punkt), wird er dort zurückgeschickt. Der Beobachter hat die Zeit gemessen, die zwischen Abschicken und Zurückkommen des Lichtes vergangen ist. Da die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, hat das Licht die Hälfte dieser Zeit

*vgl. (II.6)

†licht ??

‡=die Gruppe der Transformationen, die ein Inertialsystem in ein anderes Inertialsystem überführt

§vgl. Übungsaufgabe 3

gebraucht, um zur Uhr zu gelangen. Zur Hälfte der verstrichenen Zeit, war der Beobachter gerade in dem olivenen Punkt. Also gibt die olivene Gerade das Jetzt (alles was sich für den Beobachter gleichzeitig ist) des zweiten Beobachters zum olivenen Zeitpunkt an. Hat der Beobachter 2, den Geschwindigkeitsvektor v , so ist die olivene Gerade parallel zu $v^\perp = \{y \in M \mid \eta(v, y) = 0\}$ – Übungsaufgabe 3. Im Gegensatz dazu ist das Jetzt des Beobachter 1 (in Ruhe zum Bezugssystem, also Geschwindigkeit $(-1, 0, 0, 0)$ durch die Hyperebenen mit $t = const$ gegeben.

I.2.1. Kinematik und Dynamik

Ein Beobachter in Ruhe (Geschwindigkeit $\hat{x} = (1, \vec{0})^T$) misst die Relativgeschwindigkeit eines Testteilchens der Vierergeschwindigkeit \hat{z} als $\hat{v} = (0, \vec{v})$ mit $\hat{z} = a(\hat{x} + \hat{v})$. Die Rolle von a ist nur Skalierung – wegen $\eta(\hat{z}, \hat{z}) = -1$ muss $a = (1 - \eta(\hat{v}, \hat{v}))^{-\frac{1}{2}}$ sein. Beachte: Da der Beobachter sich mit Geschwindigkeit kleiner Lichtgeschwindigkeit bewegt, ist $\eta(\hat{v}, \hat{v}) < 1$.

Was bedeutet das für unseren Beobachter bzgl. eines anderen Bezugssystems, das aus obigem Ruhesystem durch die Lorentztransformation A entsteht? Dann hat der Beobachter die Geschwindigkeit $x = A\hat{x}$. Sein Jetzt spielt sich nicht mehr in der $t = const$ Ebene ab, sondern in $x^\perp := \{y \in M \mid \eta(x, y) = 0\}$. Alle Vektoren in x^\perp sind raumartig, vgl. Übungsaufgabe 3. Das heißt, was der Beobachter x mit der Relativgeschwindigkeit v wahrnimmt, ist ein Teilchen mit der Geschwindigkeit:

$$z = \frac{x + v}{\sqrt{1 - \eta(v, v)}}$$

also $v = Av$ wegen Linearität. Wegen $\eta(x, v) = 0$ ist $\eta(z, x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \eta(v, v)}}$.

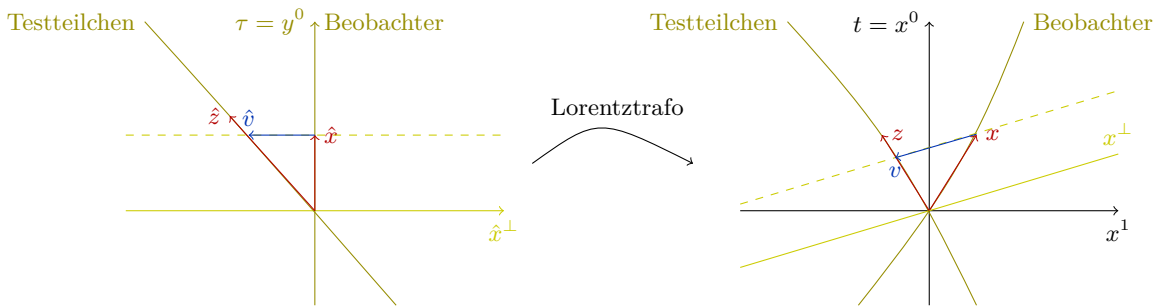


Abb. I.2.: Relativgeschwindigkeit $v = -\frac{z}{\eta(x, z)}$ – x von z für den Beobachter mit Geschwindigkeit x . (Der Winkel von x zur $t = 0$ Ebene ist immer der gleiche wie der der Zeitachse zur x^\perp .)

Newtonsch wird Dynamik durch Kräfte/Impulse beschrieben – Impuls=Masse \times Geschwindigkeit. Wir definieren nun analog den Impuls mit der Geschwindigkeit z des Teilchens im Minkowskiraum als $p = m_0 z$, wobei m_0 die Ruhemasse des Teilchens ist [Ist das Teilchen in Ruhe, also $\gamma(t) = (t, \vec{0})$, dann ist $p = (m_0, \vec{0})$]. Der Impuls wird nun *Energie-Impuls-Vektor* genannt und oft statt als Vektor als 1-Form definiert: $p := -m_0 \eta(z, \cdot)$. Analog wie in der Kinematik kann der Beobachter mit Geschwindigkeit x nur in der x^\perp -Ebene beobachten. D.h. beobachtet er ein Teilchen mit Ruhemasse m_0 und der Relativgeschwindigkeit v , hat das Teilchen den Impuls:

$$p = -\frac{m_0 \eta(x + v, \cdot)}{\sqrt{1 - \eta(v, v)}}$$

Ist das Teilchen relativ zum Beobachter in Ruhe, ist $v = 0$ und damit $E := p(x) = m_0$ (E ist die Energie, Lichtgeschwindigkeit $c = 1$, in der Ruhe: $E = m_0 c^2$). Die Energie ist der Teil des Energie-Impuls-Vektors, der parallel zu x ist. Im allgemeinen bewegten Zustand ist dann

$$E := p(x) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \eta(v, v)}}$$

– und damit ist die Energie abhängig von der Relativgeschwindigkeit. Der Teil des Energie-Impuls-Vektors der in x^\perp liegt, ist der (*Dreier*)Impuls (= räumliche Impuls).

I. Vor der allgemeinen Relativitätstheorie

Bremsen wir ein Teilchen mit $E = \frac{m_0}{\sqrt{1-\eta(v,v)}}$ abrupt auf Relativgeschwindigkeit Null ab. Dann muss $E - m_0c^2 = E - m_0$ die 'abgegebene' (z.B. in Wärme umgewandelte) Energie sein:

$$E - m_0 = m_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\eta(v,v)}} \right)$$

Konsistenzcheck im Grenzfall $\eta(v,v) \ll 1$ und im Ruhesystem $v = (0, \vec{v})$: Es ist $\eta(v,v) = |\vec{v}|^2$ und

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\eta(v,v)}} = \frac{1}{2}\eta(v,v) + O(\eta(v,v)^2).$$

Damit ist $\frac{1}{2}m_0|\vec{v}|^2$ der dominierende Term – also genau die kinetische Energie in der Newtonschen Theorie.*

I.3. Gravitation in SRT?

Bis jetzt haben wir nur SRT nur ohne Gravitationsfelder betrachtet. Es stellt sich die Frage, ob die Newtonsche Formulierung des Gravitationsgesetzes

$$\ddot{x} = -\nabla\Phi, \quad \Delta\Psi = 4\pi G\rho$$

nicht irgendwie doch mit der SRT kompatibel ist.

Das erste Problem ist, dass wir für SRT für die Bewegungsgleichung eine Formulierung mit Vierervektoren benötigen. Außerdem ist die zweite Gleichung $\Delta\Psi = 4\pi G\rho$ nicht lorentz-invariant, sondern: Ändert man die Dichte ρ in einer kleinen Umgebung ändert sich automatisch das Potential Ψ im ganzen Raum - instantan, also schneller als das Licht.†

*Normalerweise ist Energie immer nur bis auf eine Konstante bestimmt, so dass man eigentlich die Ruheenergie einfach weglassen möchte. Aber im Relativistischen ist $E = \frac{m_0}{\sqrt{1-\eta(v,v)}} \sim m_0 + \frac{m_0|v|^2}{2}$ für kleine Geschwindigkeiten v . Will man, dass Massen im nichtrelativistischen Limes Gravitation erzeugen, kann man die Konstante m_0 nicht einfach weglassen.

†vgl. [7, §7.1] für eine erweiterte Diskussion

II. Allgemeine Relativitätstheorie

II.1. Das Äquivalenzprinzip

Das *Äquivalenzprinzip*, wie es schon bei Galileo/Newton vorkam, vgl. (I.1), wurde von Einstein ausgenutzt, um es zur Grundlage für einen Ansatz zu machen, Gravitation kompatibel zur SRT zu beschreiben:

Vorl. 3

In einem geschlossenen System, ohne Informationen von außen, kann man nicht entscheiden, ob die Bewegung durch eine Beschleunigung des Systems oder ein Gravitationsfeld erzeugt wird. Die träge Masse ist gleich der schweren Masse.

Auswirkung des Äquivalenzprinzips auf frei fallende Teilchen

Wir betrachten ein Teilchen, auf welches ausschließlich die Gravitation wirkt. Nach dem Äquivalenzprinzip gibt es (unabhängig von der Masse des fallenden Teilchens) lokal ein Koordinatensystem $y = (y^0, \dots, y^n) \in V' \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $y^\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, in welchem die Bewegung $y^\alpha(\tau)$ des Teilchens in seiner Eigenzeit τ ($d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$, vgl. (I.3)), die einer gleichförmigen Bewegung ist:*

$$\frac{d^2 y^\alpha}{d\tau^2} = 0.$$

Wir wollen uns nun anschauen, was dies für ein anderes Koordinatensystem $x = x(y) \in V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ † bedeutet: Dann ist $\frac{d}{d\tau} y^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}$ und $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta} = \delta_\beta^\alpha$ (alles mit Einsteinscher Summenkonvention, vgl. Seite 4). Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 y^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \\ 0 &= \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \underbrace{\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}}_{=: \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x)} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Auch die Eigenzeit kann in den neuen Koordinaten geschrieben werden:

$$d\tau^2 = - \underbrace{\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}}_{=: g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)} dx^\mu dx^\nu.$$

Dann ist $g_{\mu\nu}: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion.

Wir werden das bald geometrisch interpretieren – die $g_{\mu\nu}$ als *Lorentzmetrik* und (II.1) als zugehörige Geodätengleichung. Zunächst aber sammeln wir, was wir über g und Γ wissen?

- (i) Wie $\eta = (\eta_{\alpha\beta})$ fassen wir die $g_x = (g_{\mu\nu}(x))$ für jedes x als Matrix zusammen. Während η unabhängig vom Punkt x ist, ist das für g_x i.A. nicht der Fall. Aber wir haben eine glatte Funktion $g: U \rightarrow \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n+1)$, $x \mapsto g_x$.

*Dieses Koordinatensystem bildet im Allgemeinen nur den freien Fall dieses Teilchens dann auf eine Gerade in diesem Koordinatensystem ab. Für ein benachbartes Teilchen braucht man im Allgemeinen ein anderes Koordinatensystem. Man hätte hier auch gleich ein Koordinatensystem, in dem das Teilchen in Ruhe ist. Das ändert aber nichts für die folgende Rechnung.

†Bei uns seien immer nur glatte Funktionen erlaubt. $x \mapsto y$ soll lokal ein Diffeomorphismus sein, d.h. glatt und auch die Umkehrung $y \mapsto x$ ist glatt.

II. Allgemeine Relativitätstheorie

- (ii) Welche Matrizen g_x können auftreten? Nach Definition von g gibt es einen Basiswechsel, so dass g_x wieder die Matrix $J = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ ist – also g_x hat *Index* 1.
- (iii) Wie im Minkowskiraum gibt es in jedem Punkt x Vektoren $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, die *zeit-/licht-/raumartig* sind, also für die $g_x(v, v) < / = / > 0$ gilt. Man kann nachrechnen, dass zeitartig sein etc. nicht von den gewählten Koordinaten abhängt.
- (iv) Beziehung g und Γ – Übungsaufgabe 6: Es gilt

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (g_{\mu\kappa,\nu} + g_{\nu\kappa,\mu} - g_{\mu\nu,\kappa}), \quad (\text{II.2})$$

wobei $f_{,\nu} := \frac{\partial f}{\partial x^\nu}$ (also $g_{\mu\kappa,\nu} = \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu}$). Kennen wir in einem Punkt die $g_{\mu\nu}(x)$ und $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x)$, dann kennen wir auch die ersten Ableitungen $g_{\mu\nu,\kappa}$ in diesem Punkt.

Zurück zum freien Fall:

- (i) Was wissen wir über $g_{\alpha\beta}(x(\tau)) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$ entlang $x^\gamma(\tau)$?

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(g_{\alpha\beta}(x(\tau)) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) &= \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} \frac{dx^\beta}{d\tau} + g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} \\ &\stackrel{(\text{II.1})}{=} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - g_{\mu\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu - g_{\mu\alpha} \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \right) \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \stackrel{(\text{II.2})}{=} 0. \end{aligned}$$

Also ist $g_{\alpha\beta}(x(\tau)) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$ entlang des freien Falls des Testteilchens konstant und damit immer negativ (zeitartig).

- (ii) Wir wollen nun die Bahn des freien Falls durch ein Variationsprinzip interpretieren:

Fällt ein Teilchen von $A = x(s_0)$ nach $B = x(s_1)$, parametrisiert nach Eigenzeit, ist dabei in seiner Eigenzeit $\Delta\tau_{AB} = s_1 - s_0$ vergangen. Wie sieht es für Kurven in der Nähe der 'Freien-Fall-Kurve' aus? Wir variieren den Pfad $x(s)$ zu $x_\epsilon(s) = x(s) + \epsilon z(s)$ mit $z(s_0) = z(s_1) = 0$. Hierbei sei $z(s)$ klein genug, dass x_ϵ noch immer zeitartig ist. Nun ist x_ϵ natürlich im Allgemeinen nicht mehr nach Eigenzeit parametrisiert, sondern es ist

$$\Delta\tau_{AB}(x_\epsilon) := \int_A^B d\tau = \int_A^B \sqrt{-g_{\alpha\beta}(x_\epsilon(s)) \frac{dx_\epsilon^\alpha}{ds} \frac{dx_\epsilon^\beta}{ds}} ds$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \Delta\tau_{AB}(x_\epsilon) &= - \int_A^B \frac{1}{2} \left(-g_{\alpha\beta}(x(s)) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \right)^{-1/2} \\ &\quad \left(g_{\alpha\beta,\gamma}(x(s)) z^\gamma(s) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} + 2g_{\alpha\beta}(x(s)) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dz^\beta}{ds} \right) ds \\ &= \text{const} \int_A^B \left(g_{\alpha\beta,\gamma}(x(s)) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} - 2 \frac{d}{ds} \left(g_{\alpha\gamma}(x(s)) \frac{dx^\alpha}{ds} \right) \right) z^\gamma(s) ds \\ &= \text{const} \int_A^B \left(g_{\alpha\beta,\gamma}(x(s)) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} - 2g_{\alpha\gamma,\delta}(x(s)) \frac{dx^\delta}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds} - 2g_{\alpha\gamma}(x(s)) \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} \right) z^\gamma(s) ds \\ &= -2 \text{const} \int_A^B g_{\alpha\gamma}(x(s)) \left(\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\delta}^\alpha \frac{dx^\delta}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \right) z^\gamma(s) ds = 0. \end{aligned}$$

Die Kurven des freien Fall sind also kritische Punkte der Eigenzeit (hier immer verstanden bzgl. Perturbationen $x_\epsilon(s)$ mit festen Anfangs- und Endpunkten). Andersherum folgt analog, dass eine zeitartige Kurve $x(t)$ ein kritischer Punkt in der Eigenzeit, nach Umparametrisierung in Eigenzeit, die Kurve des freien Fall eines Beobachters ist.†

*Obere Indizes unterm Bruchstrich zählen als untere Indizes (und umgekehrt), so dass hier auf beiden Seiten untere Indizes stehen.

†Schaut man nach allen kritischen Punkten der Eigenzeit, erhält man auch lichtartige Kurven.

- (iii) Analog zum letzten Fall kann man nachrechnen, dass die Kurven des freien Falls genau die kritischen Punkte des zugehörigen *Energiefunktional*s

$$E(x_\epsilon) = \int_A^B \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(x_\epsilon(s)) \frac{dx_\epsilon^\alpha}{ds} \frac{dx_\epsilon^\beta}{ds} ds, \quad (\text{II.3})$$

die zeitartig sind. Insbesondere sind kritische Punkte Kurven, die automatisch proportional (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) nach Eigenzeit parametrisiert sind. Man erhält auch kritische Punkte, die raumartige bzw. lichtartige Kurven sind. In jedem Fall ist $g_{\alpha\beta}(x)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$ konstant in t .

Um die Gleichung (II.1) für gegebenes $g_{\mu\nu}$ explizit zu berechnen, kann man zwar mit (II.2) direkt die Γ berechnen und einfach einsetzen. Vom Rechenaufwand empfiehlt sich allerdings zu nutzen, dass die Kurven des freien Falls kritische Punkte des Energiefunktional sind und deshalb die zugehörige Differentialgleichung wie in (C.1) berechnet werden können, vgl. Übungsaufgabe 7.

Hier ein einfaches Beispiel: Im Minkowskiraum ist $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ und damit $\mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha(t)\dot{x}^\beta(t)$. Die Gleichungen (C.1) sind dann

$$\frac{d}{dt}(\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha(t)) = 0$$

mit $\eta = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Also $\dot{x}^\alpha(t) = c^\alpha = \text{const}$ und $x^\alpha(t) = c^\alpha t + d^\alpha$. Die Kurven freien Falls von Teilchen sind also die zeitartigen Geraden im Minkowski.

II.1.1. Interpretation der Raumzeit als Lorentz-Mannigfaltigkeit

Das Äquivalenzprinzip ist erst einmal nur ein Indiz dafür, dass man die Gravitation über Raumzeitgeometrie beschreiben kann. Wäre das nicht so, würden wir schon bei dem freien Fall im letzten Abschnitt für jedes $m_{\text{schwer}}/m_{\text{träge}}$ ein anderes $g_{\mu\nu}$ und damit andere Γ erhalten. Das wäre z.B. der Fall, wenn wir etwas ähnliches in der Elektrodynamik probieren würden. Dort würden die verschiedenen q/m Verhältnisse auftauchen.

Aber es heißt natürlich nicht, dass es funktioniert die **Gravitationstheorie als geometrische Theorie** zu modellieren. Man muss später prüfen, dass das wirklich eine *brauchbare Gravitationstheorie* ist, d.h.

- Die Newtonsche Gravitationstheorie muss im nichtrelativistischen Limes (d.h. bei Geschwindigkeiten, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind) bei schwachen Gravitationsfeldern auf dem Niveau der Vorhersagen von Beobachtungen erhalten werden.
- Gewisse physikalische Konsistenzbedingungen sollten erfüllt sein, z.B. keine lokale Propagation von Gravitationseffekten schneller als das Licht. Das muss insbesondere in den Feldgleichungen (das werden die Einsteingleichung plus die Materiegleichungen sein) implementiert sein.
- Die Theorie muss durch Experimente bestätigt sein (die allerwichtigste Bedingung, die kann im Zweifel auch die beiden oberen ersetzen).

Wir interpretieren die $g_{\mu\nu}$, die lokal die Kurve des freien Fall des Teilchens im letzten Abschnitt bestimmt haben, als Metrik in lokalen Koordinaten. Dazu verkleben wir zuerst einmal die verschiedenen lokalen Koordinatensysteme zum unterliegenden Raum – das führt zum Begriff der Mannigfaltigkeit:*

Definition II.1.1. Sei M und A Mengen. Seien $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m$, $U_\alpha \subseteq M$ Teilmengen und $\kappa_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ bijektive Abbildungen für $\alpha \in A$, so dass gilt

- es gibt eine abzählbare Teilmenge $A_1 \subseteq A$ mit $\cup_{\alpha \in A_1} U_\alpha = M$,
- $\kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ ist offen in \mathbb{R}^m für alle $\alpha, \beta \in A$.
- $\kappa_\beta \circ \kappa_\alpha^{-1}: \kappa_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \kappa_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ ist für alle $\alpha, \beta \in A$ glatt.

*Wir sammeln hier jeweils nur die wichtigsten Begriffe und Intuitionen, um in der ART weiter zu kommen. Für Ausführlicheres schauen Sie in Bücher/Skripte der Differentialgeometrie oder [4].

II. Allgemeine Relativitätstheorie

(iv) zu je zwei Punkten $p, q \in M$ ein $\alpha \in A$, so dass $p, q \in U_\alpha$ ist.*

Dann nennen wir M eine *glatte Mannigfaltigkeit* mit *glattem Atlas* $(U_\alpha, \kappa_\alpha)_{\alpha \in A_1}$.

Ist M bzgl. der glatten Atlanten $(U_\alpha, \kappa_\alpha)_{\alpha \in A_1}$ bzw. $(U'_\alpha, \kappa'_\alpha)_{\alpha \in A_2}$ jeweils eine glatte Mannigfaltigkeit, so dass die Vereinigung der beiden Atlanten wieder ein glatter Atlas für M ist, sagen wir, dass beide Atlanten die gleiche *glatte Struktur* für M definieren.†

Mit der letzten Definition werden aus Koordinaten auf $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^m$ mittels der *Karten* $\kappa_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ *lokale Koordinaten* auf $U_\alpha \subseteq M$ definiert. Bedingung (iii) ist dann eine 'Kartenkompatibilitätsbedingung'. Bedingung (i) und (iv) sind grob gesagt dazu da, topologische Pathologien auszuschliessen.

Vorl. 4

Beispiel II.1.2.

(i) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $m \leq n$. Dann heißt M *m-dimensionale Untermannigfaltigkeit* von \mathbb{R}^n , falls es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ von p , eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und eine glatte Abbildung $F: V \rightarrow \tilde{U}$ gibt, so dass gilt:

i) $F(V) = M \cap \tilde{U}$ und $F: V \rightarrow M \cap \tilde{U}$ ist ein Homöomorphismus.

ii) Die Jacobimatrix

$$D_x F = \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x^m}(x) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x^m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x^m}(x) \end{pmatrix} \quad (n \times m - \text{Matrix})$$

(wobei $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))^T$) hat für alle $x = (x^1, \dots, x^m)^T \in V$ maximalen Rang, also Rang m .

Die Abbildung F heißt *lokale Parametrisierung* von M . Die Untermannigfaltigkeit M ist eine glatte m -dimensionale Mannigfaltigkeiten mit Karten gegeben durch $\kappa := F^{-1}: U := M \cap \tilde{U} \rightarrow V$. Um wirklich die Mannigfaltigkeitsdefinition von eben zu überprüfen, muss man noch zeigen, dass abzählbar viele dieser Karten M überdecken und man zusätzlich noch Karten wählen kann, die insbesondere Bedingung (iv) erfüllen. Die Idee für solche Karten ist: Wir wählen einen Weg zwischen p und q und verdicken diesen zu einer Menge für den Definitionsbereich der Karte. Sind p und q in verschiedenen Zusammenhangskomponenten, reicht es die Vereinigung zweier Karten um p bzw. q zu wählen.

Als Beispiel schauen wir uns $S^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (x^1)^2 + \dots + (x^{m+1})^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ an. Das ist eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{m+1} : Mögliche Karten werden durch stereographische Projektion von verschiedenen Punkten gegeben. Mit drei solchen Karten kann man alle Bedingungen aus Definition II.1.1 direkt erfüllen.

Anstatt mittels lokalen Parametrisierungen zu überprüfen, ob eine Mannigfaltigkeit eine Untermannigfaltigkeit ist, bietet sich oft an, das *Kriterium vom regulären Wert* zu nutzen: Gibt es für jeden Punkt $p \in M$ eine Umgebung $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^{n=m+k}$ und eine glatte Funktion $f: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$, so dass $0 \in \mathbb{R}^k$ regulärer Wert‡ und $f^{-1}(0) = \tilde{U} \cap M$ ist, dann ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Dieses Kriterium hätten wir auch anwenden können, um zu sehen, dass $S^m \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Dazu verwenden wir $f: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^2 - 1$. Dann ist $f^{-1}(0) = S^m$ und $D_x f = (2x^1, \dots, 2x^m)$. Für alle $x \in S^m$ hat $D_x f$ Rang 1, also maximalen Rang.

(ii) Ist M_1 und M_2 eine glatte Mannigfaltigkeit, dann auch $M_1 \times M_2$: Ist $(U_\alpha, \kappa_\alpha)_{\alpha \in A}$ glatter Atlas von M_1 und $(U'_\beta, \kappa'_\beta)_{\beta \in B}$ von M_2 , dann ist $(U_\alpha \times U'_\beta, \kappa_\alpha \times \kappa'_\beta)_{(\alpha, \beta) \in A \times B}$ ein glatter Atlas von $M_1 \times M_2$.

Bemerkung II.1.3. Grobe Daumenregel bei der Definition von Begriffen ist: Man überlegt sich zuerst, was das ganze auf Untermannigfaltigkeiten§ ist oder sein sollte (das ist i.A. anschaulicher) und versucht

*impliziert, dass die auf M induzierte Topologie Hausdorff ist.

†Es kann passieren, dass ein M verschiedene glatte Strukturen trägt, vgl. https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_structure und https://en.wikipedia.org/wiki/Exotic_R4. Das ist für uns hier aber nicht relevant.

‡0 ist *regulärer Wert* von $f: \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $k \leq n$, falls für jeden Punkt $x = (x^1, \dots, x^n) \in V$ mit $f(x) = 0$ die Ableitung $D_x f = (\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n})$ (eine $k \times n$ -Matrix) maximalen Rang hat.)

§Für jede glatte Mannigfaltigkeit M gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine injektive glatte Abbildung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, so dass das Bild von M Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n ist. Das ist der Satz von Whitney [4, Satz I.3.31].

das zu verallgemeinern. Man muss nur aufpassen, dass für diese Verallgemeinerung der Begriff nicht von der Einbettung $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abhängen darf.

Für eine Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$, wie S^m oben, ist es leicht, zu sagen, was ein Tangentialvektor, ein Tangentialraum ist: Der Tangentialraum $T_p M$ an M im Punkt p besteht aus allen Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$, für die es eine Kurve $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$ gibt. Ein solches v heißt *Tangentialvektor* in p . Die Differentiation \dot{c} wird hier im umliegenden Raum \mathbb{R}^n durchgeführt, in dem man c als Abbildung in \mathbb{R}^n auffasst. Haben wir keinen umliegenden Raum, geht das nicht, aber wir können die Kurven c benutzen, um Tangentialvektoren zu definieren. Dabei müssen wir aber beachten, dass verschiedene c den gleichen Tangentialvektor beschreiben können.

Definition II.1.4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Ein *Tangentialvektor* an M im Punkt p ist eine Äquivalenzklasse von glatten Kurven $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ mit $\epsilon > 0$ und $c(0) = p$, wobei zwei solcher Kurven c_1 und c_2 äquivalent heißen, falls für eine Karte $\kappa: U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $p \in U$ gilt:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa \circ c_1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa \circ c_2).$$

Für die Äquivalenzklasse von c schreiben wir $[c]_p$. Die Menge

$$T_p M := \{[c]_p \mid c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \text{ glatt}, c(0) = p\}$$

heißt *Tangentialraum* von M im Punkt p .

Bemerkung II.1.5.

- (i) Die Definition des Tangentialvektors in $p \in M$ hängt nicht von der gewählten Karte ab: Sei $\kappa': U' \subseteq M \rightarrow V' \subseteq \mathbb{R}^m$, $p \in U'$, eine zweite Karte um p . Dann ist*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa' \circ c) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}((\kappa' \circ \kappa^{-1}) \circ (\kappa \circ c)) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} D_{\kappa(p)}(\kappa' \circ \kappa^{-1}) \circ \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa \circ c)\right).$$

- (ii) Die Abbildung

$$d_p \kappa: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m, [c]_p \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\kappa \circ c)$$

ist wohldefiniert und bijektiv [4, Lemma I.3.12]. Mittels $d_p \kappa$ kann man $T_p M$ die Struktur eines Vektorraumes verleihen, die auch wiederum unabhängig von der Karte ist, vgl. [4, Def I.3.13 und darunter]. In Anlehnung an die Notation im \mathbb{R}^m schreiben wir für $[c]_p$ in Zukunft zumeist $\dot{c}(0)$. Analog $\dot{c}(t) := [c \circ (\cdot + t)]_{c(t)}$.

Wir werden aber sowieso zumeist in Karten und lokalen Koordinaten rechnen. D.h. für uns ist der wichtige Punkt hier, dass eine Basis von \mathbb{R}^m durch $(d_p \kappa)^{-1}$ auf eine Basis von $T_p M$ abgebildet wird. I.A. nutzen wir die Standardbasis e_i vom \mathbb{R}^m zu den Standardkoordinaten x^i und erhalten so mit

$$\partial_{x^i}|_p := \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p := (d_p \kappa)^{-1}(e_i)$$

eine Basis von $T_p M$.

- (iii) Ein *glattes Vektorfeld* X auf M ordnet jedem $p \in M$ ein Element $X(p) \in T_p M$ derart zu, dass für jede Karte $\kappa: U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ von M das Vektorfeld auf U als $X(p) = X^i(\kappa(p)) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ mit glatten Funktionen $X^i: V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt werden kann. Es reicht, diese Darstellung für Karten zu überprüfen, die M überdecken, vgl. Übungsaufgabe 8. Die Menge der glatten Vektorfelder auf M bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}(M)$.

Oft wird zwischen $p \in M$ und $x = \kappa(p) \in \mathbb{R}^m$ nicht explizit unterschieden, da κ ja sowieso ein Diffeomorphismus ist und man schreibt kurz $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

*Wir verwenden manchmal D statt d , um zu unterstreichen, dass es sich um eine Abbildung zwischen euklidischen Räumen und damit um eine 'Standardrichtungsableitung'/Jacobimatrix handelt.

II. Allgemeine Relativitätstheorie

- (iv) Seien M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten und $f: M \rightarrow N$. Wir sagen f ist *stetig/glatt* in $p \in M$, falls für eine Karte $\kappa: U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ um p (d.h. $p \in U$) und eine Karte $\tilde{\kappa}: \tilde{U} \subseteq N \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ um $f(p)$ die Abbildung

$$\tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1}: V \rightarrow \tilde{V}$$

stetig/glatt in $\kappa(p)$ ist. Der Begriff ist unabhängig von der Wahl der Karten, vgl. Übungsaufgabe 8. Dann nennen wir $d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ gegeben durch $d_p f([c]_p) = [f \circ c]_{f(p)}$ die *Tangentialabbildung* von f in $p \in M$. Diese Abbildung ist linear und kompatibel mit der Differentiation in den Karten, im Sinne, dass $d_{f(p)} \tilde{\kappa} [f \circ c]_{f(p)} = D_{\kappa(p)} (\tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1})(d_p \kappa([c]_p))$, vgl. Übungsaufgabe 10.

Bemerkung II.1.6. Als nächstes wollen wir eine Struktur einführen mit der wir Länge von Vektoren bestimmen können und die im Spezialfall das Minkowskiprodukt auf dem Minkowskiraum bzw. das euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^n mit einschließt. Für Untermannigfaltigkeit kriegen wir diese Struktur durch das euklidische Skalarprodukt des umliegenden Raum geschenkt: Wir schränken in jedem Punkt p der Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ das Skalarprodukt auf den Untervektorraum $T_p M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein und erhalten das, was in der elementaren Differentialgeometrie die erste Fundamentalform $I_p(X, Y) := \langle X, Y \rangle$ für $X, Y \in T_p M$ genannt wird. Die erste Fundamentalform ist in jedem Punkt der Untermannigfaltigkeit eine positiv definite symmetrische Bilinearform und hängt glatt vom Punkt ab, siehe die folgende Definition. Schränkt man analog das Minkowskiprodukt auf eine Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ein, ist die Einschränkung noch immer eine symmetrische Bilinearform, die glatt vom Punkt abhängt, die aber sowohl positiv definit (z.B. für $M = \{x^0 = 0\}$), nichtentartet vom Index 1 (z.B. für $M = \{x^1 = 0\}$) aber auch entartet sein kann (z.B. ist die induzierte Bilinearform für $M = \{t(1, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in \mathbb{R}\}$ konstant Null).

Wir wollen angelehnt an das euklidische Skalarprodukt und das Minkowskiprodukt, nun allgemein ein solches Produkt für Mannigfaltigkeiten definieren.

Definition II.1.7. Eine *semi-Riemannsche Metrik* g ist eine Abbildung, die jedem Punkt von M eine nichtentartete symmetrische Bilinearform g_p auf $T_p M$ zuordnet, so dass diese Zuordnung glatt vom Basispunkt abhängt, d.h. für jede Karte $\kappa: U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ um p ist die Abbildung

$$g_{ij}: V \rightarrow \mathbb{R}, g_{ij}(v) := g_{\kappa^{-1}(v)} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\kappa^{-1}(v)}, \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_{\kappa^{-1}(v)} \right)$$

glatt.

Ist der Index von g Null, nennen wir die Metrik *Riemannsch* und (M, g) eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit*. Ist der Index von g Eins, nennen wir g eine *Lorentzmetrik* und (M, g) eine *Lorentz-Mannigfaltigkeit*.

Bemerkung II.1.8. (i) Index 1 heißt, dass es in jedem Punkt eine Basis e_0, \dots, e_n von $T_x M \cong \mathbb{R}^{n+1}$ gibt, so dass $g_x = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ ist.

- (ii) In Analogie zum Minkowskiraum nennt man einen Vektor $v \in T_p M$ *zeit-/licht-/raumartig*, falls $g_p(v, v) < / = / > 0$ ist. Der *Lichtkegel* im Punkt $p \in M$ besteht dann aus der Menge der lichtartigen Vektoren in $T_p M$.

Beispiel II.1.9 (Beispiele für Lorentz-Mannigfaltigkeiten). (i) Minkowskiraum mit Minkowskiprodukt

- (ii) Sei (Σ, h) eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I ein Intervall, eine glatte positive Funktion. Dann ist das *verzerrte Produkt* $M := I \times \Sigma$, $g = -dt^2 + f(t)^2 h$, eine Lorentz-Mannigfaltigkeit. Hierbei lesen wir die Metrikdefinition wie folgt: Für $p = (s, q) \in I \times \Sigma$ ist $T_p M \cong T_s I \times T_q \Sigma$, Übungsaufgabe 17(i), und für $v = (v^1, v^2), w = (w^1, w^2) \in T_p M$ ist $g_p(v, w) = -v^1 w^1 + f(t)^2 h_p(v, w)$. Ist $f \cong 1$, nennen wir g *Produktmetrik*.

- (iii) *de-Sitter Raum* = einschaliges Hyperboloid mit Metrik induziert vom Minkowskiraum: $S_1^m(r) := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \eta(x, x) = r^2\}$, Übungsaufgabe 9.

- (iv) *Anti-de Sitterraum* $H_1^m(r) = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid -(x^0)^2 - (x^1)^2 + \sum_{i=2}^m (x^i)^2 = -r^2\}$ mit Metrik induziert durch $g(x, y) = -(x^0)^2 - (x^1)^2 + \sum_{i=2}^m (x^i)^2$, Übungsaufgabe 9.

II.1.2. Kovarianzprinzip - Tensoren

Vorl. 5

In der allgemeinen Relativitätstheorie postulieren wir noch immer das Relativitätsprinzip – allerdings in verallgemeinerter Form: In allen Koordinatensystemen (also für alle Beobachter) sollen physikalische Gesetze die gleiche Form haben. Das wird im Allgemeinen als *Kovarianzprinzip* ausgedrückt:

Damit eine Gleichung in einem allgemeinen Gravitationsfeld gilt, muss mindestens gelten:

- (i) dass in einem Punkt, wo $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ ist und die $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ von $g_{\alpha\beta}$ verschwinden, die Gleichung mit den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie vereinbar ist.
- (ii) dass die Gleichung kovariant ist, das heißt, sie behält ihre Form unter Wechsel des Koordinatensystems.

Bevor wir das mathematisch mit Hilfe von Tensoren formulieren, schauen wir zurück auf unsere Kurven des freien Falls:

Das Beispiel des freien Falls von oben hat uns bereits gezeigt, dass $\frac{d}{d\tau}\dot{x}(\tau) = 0$ keine Gleichung ist, die dieses Kovarianzprinzip erfüllt. Aber, wie in (??) gesehen, behält $(\dot{x}^\alpha(t) + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x(t))\dot{x}^\beta(t)\dot{x}^\gamma(t))\partial_{x^\alpha} = 0$ seine Form, mit $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ wie in (II.2). Deshalb definieren wir

$$\nabla_{\dot{x}(t)}\dot{x}(t) := (\ddot{x}^\alpha(t) + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x(t))\dot{x}^\beta(t)\dot{x}^\gamma(t))\partial_{x^\alpha}$$

als neue Ableitung, die *kovariante Ableitung*, von $\dot{x}(t)$ in Richtung von $\dot{x}(t)$. Für ein Vektorfeld Y , in lokalen Koordinaten gegeben durch $Y(p = \kappa(x)) = Y^\beta(x)\partial_{x^\beta}|_p$, vgl. Bemerkung II.1.5(iii), analysiert man analog die Ableitung von Y in Richtung einer Koordinaten: $\partial_{x^\alpha}(Y^\beta\partial_{x^\beta})$. Dann sieht man, dass auch dieser nicht das Kovarianzprinzip erfüllt, aber man zur allgemeinen Definition der kovarianten Ableitung des Vektorfeldes Y in Richtung eines Vektorfeldes $X = X^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ kommt:

$$\nabla_X Y := X^\alpha \left(Y^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \partial_\alpha Y^\gamma \right) \partial_{x^\gamma}. \quad (\text{II.4})$$

Aufgrund der Kovarianzeigenschaft definiert ∇ automatisch eine Abbildung $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ auf der gesamten Mannigfaltigkeit – der sogenannte *Levi-Civita-Zusammenhang*. Die $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ heißen *Christoffelsymbole* von g .

Die kovariante Ableitung hat folgende Eigenschaften, die man leicht in lokalen Koordinaten nachrechnen kann – vgl. auch Übungsaufgabe 10:

Lemma II.1.10. Sei (M^m, g) eine glatte Riemannsche oder Lorentzsche Mannigfaltigkeit. Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, und seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ glatte Vektorfelder. Dann gilt

(i) ∇ ist linear in beiden Argumenten.

(ii) (Tensoriell in der ersten Komponente) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ (also $(\nabla_{fX} Y)(p) = f(p)(\nabla_X Y)(p)$).

(iii) (Derivativ in der zweiten Komponente)

$$\nabla_X(fY) = df(X)Y + f\nabla_X Y, \quad \text{also } (\nabla_X(fY))_p = d_p f(X(p))Y(p) + f(p)(\nabla_X Y)(p).$$

(Hier ist $d_p f(X(p)) = [c]_p$ Bem. II.1.5 $[f \circ c]_{c(p)}$ Abb. nach \mathbb{R} $\frac{d}{dt}|_{t=0} f(c(t))$.)

(iv) (Metrisch (= kompatibel mit der Metrik)) Für alle glatten Vektorfelder X, Y, Z auf M gilt:

$$Z.g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

wobei $Z.f := Z(f) := df(Z): M \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto d_p f(Z(p))$ für eine glatte Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist (Hier ist $f = g(X, Y): p \in M \mapsto g_p(X(p), Y(p))$).

(v) (Torsionsfrei) Für alle Karten $\kappa: U \rightarrow V$ und Koordinaten x^α auf V gilt

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\beta}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

für alle α und β .

Um zu verstehen, welche Gleichungen überhaupt invariant unter beliebigen Koordinatentransformationen sein können, müssen wir zuerst das Transformationsverhalten verschiedener Größen kennen. Insbesondere ist die Frage, welche 'Art von Größen' so auftauchen:

II. Allgemeine Relativitätstheorie

Vektorfelder. (z.B. Strömungsvektorfelder) Für die Definition eines Vektorfeld siehe Bemerkung II.1.5(iii). In lokalen Koordinaten x^α einer Karte $\kappa: U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ hat ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ die Form $X(p) = X^\alpha(\kappa(p)) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Big|_p$ mit X^α eine glatte reelwertige Funktion auf V . Oft wird zwischen $p \in M$ und $x = \kappa(p) \in \mathbb{R}^m$ nicht explizit unterschieden, da κ ja sowieso ein Diffeomorphismus ist und man schreibt kurz $X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. In anderen lokalen Koordinaten y^α einer Karte $\tilde{\kappa}: U \rightarrow V$ gilt dann

$$X = X^\alpha \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \quad \left(\text{expliziter: } X(p) = X^\alpha(\kappa(\tilde{\kappa}^{-1}(p))) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} \Big|_{\kappa^{-1}(p)} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \Big|_p \right).$$

Hierbei ist dann $\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} \Big|_{x=\kappa(p)}$ die Matrixdarstellung von $D_x(\tilde{\kappa} \circ \kappa^{-1})$ des Differential des Koordinatenwechsels von x nach y ($y = y(x)$).

Einsformen. (z.B. den Impuls in der SRT haben wir als Einsform aufgefasst) In einem festen Punkt $p \in M$ ist eine *Einsform* einfach nur das Dual eines Tangentialvektors in $T_p M$, also ein Element $\omega_p \in T_p^* M := (T_p M)^*$ – im *Kotangentenraum* in $p \in M$ –, also eine lineare Abbildung $\omega_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. In lokalen Koordinaten x um p ist $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Big|_p$ eine Basis vom $T_p M$. Die zugehörige duale Basis bezeichnen wir mit $dx^\alpha \Big|_p$, d.h. $dx^\alpha \Big|_p \in T_p^* M$ und $dx^\alpha \Big|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \Big|_p \right) = \delta_\beta^\alpha$. Also haben wir in lokalen Koordinaten die Darstellung $\omega_p = \omega_\alpha(\kappa(p)) dx^\alpha \Big|_p$ mit $\omega_\alpha(\kappa(p)) \in \mathbb{R}$ für alle α .

Wie bei glatten Vektorfeldern wollen wir, dass unsere Einsform auf M glatt vom Punkt abhängt:

Definition II.1.11. Eine *glatte Einsform* ω auf M ist eine glatte Familie $(\omega_p \in T_p^* M)_{p \in M}$, d.h. in lokalen Koordinaten x einer Karte $\kappa: U \rightarrow V$ um p ist $\omega_p = \omega_\alpha(\kappa(p)) dx^\alpha \Big|_p$ und $\omega_\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}$ ist glatt. Die Menge der Einsformen auf M bezeichnen wir mit $\Omega^1(M)$.

Analog wie bei Vektorfeldern kann man nachrechnen, dass diese Glattheitseigenschaft nicht von der Wahl der Karten abhängt. Weiterhin schreiben wir für die lokale Darstellung oft kurz $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$.

Ändern wir wieder die lokalen Koordinaten $y = y(x)$: Sei $\omega = \tilde{\omega}_\beta dy^\beta$ die lokale Darstellung in Koordinaten y . Dann muss für alle Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$(\tilde{\omega}_\beta dy^\beta)(X) = (\omega_\alpha dx^\alpha)(X)$$

sein. Wie wir ein Vektorfeld in verschiedenen Koordinaten darstellen, wissen wir aber schon, also muss gelten

$$\begin{aligned} (\tilde{\omega}_\beta dy^\beta) \left(X^\delta \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\delta} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \right) &= (\omega_\alpha dx^\alpha) \left(X^\delta \frac{\partial}{\partial x^\delta} \right) \\ \tilde{\omega}_\beta X^\delta \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\delta} dy^\beta \left(\frac{\partial}{\partial y^\gamma} \right) &= \omega_\alpha X^\delta dx^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\delta} \right) \\ \tilde{\omega}_\beta \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\delta} &= \omega_\delta \\ \tilde{\omega}_\beta &= \omega_\delta \frac{\partial x^\delta}{\partial y^\beta}. \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\omega = \omega_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} dx^\beta \quad \left(\text{expliziter: } \omega(p) = \omega_\alpha(\kappa(\tilde{\kappa}^{-1}(p))) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \Big|_{\tilde{\kappa}^{-1}(p)} dx^\beta \Big|_p \right). \quad (\text{II.5})$$

Hierbei haben wir von Zeile eins nach zwei verwendet, dass ω_p eine lineare Abbildung ist (wir können deshalb in jedem Punkt z.B. die X^δ vorziehen und dass $T_p^* M$ selbst eine Vektorraumstruktur trägt (wir können deshalb z.B. die ω_α vorziehen). Von Zeile drei nach vier verwenden wir $\frac{\partial x^\delta}{\partial y^\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\delta} = \delta_\beta^\alpha$, da die Kartenwechsel $\tilde{\kappa} \circ \kappa^{-1}$ und $\kappa \circ \tilde{\kappa}^{-1}$ und damit auch $D_{\kappa(p)}(\tilde{\kappa} \circ \kappa^{-1})$ und $D_{\tilde{\kappa}(p)}(\kappa \circ \tilde{\kappa}^{-1})$ inverse zu einander sind.

*Wie schon bei der lokalen Darstellung von Vektoreldern, vgl. Bemerkung II.1.5.iii, identifizieren wir p mit seinen Koordinaten und unterdrücken, deshalb $\kappa \circ \tilde{\kappa}^{-1}$ bei den Koeffizientenfunktionen X^α .

Bilinearformen und $(0, s)$ -Tensoren. (z.B. die Lorentzmetrik g)

In einem Punkt $p \in M$ ist ein $(0, s)$ -Tensor eine multilineare Abbildung $\varphi: \underbrace{V \times \dots \times V}_{s\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$ (Für

$V = T_p M$ und $s = 1$ ist dies der Fall der Einsform von oben. Für $V = T_p M$ und $s = 2$ ist dies der Fall der Bilinearform). Diese Multilinearformen bilden einen Vektorraum, den wir mit $T_s^0(V)$ bezeichnen.

Für $\varphi \in T_{s_1}^0(V)$ und $\psi \in T_{s_2}^0(V)$ definiert man das *Tensorprodukt* $\varphi \otimes \psi \in T_{s_1+s_2}^0(V)$ durch

$$\varphi \otimes \psi(v_1, \dots, v_{s_1+s_2}) := \varphi(v_1, \dots, v_{s_1})\psi(v_{s_1+1}, \dots, v_{s_1+s_2}).$$

Das Tensorprodukt $T_{s_1}^0(V) \otimes T_{s_2}^0(V)$ definieren wir als den linearen Span aller $\varphi \otimes \psi$ mit $\varphi \in T_{s_1}^0(V)$ und $\psi \in T_{s_2}^0(V)$, wobei Elemente $\sum_k \varphi_1^k \otimes \psi_1^k$ und $\sum_j \varphi_2^j \otimes \psi_2^j$ als identisch betrachtet werden, wenn sie als multilineare Abbildungen identisch sind.

D.h. wir können z.B. eine Bilinearform als Tensorprodukt von Einsformen auffassen: In lokalen Koordinaten x^α haben wir für die Lorentzmetrik im Punkt $p \in M$

$$g_p = g_{\alpha\beta}(p) dx^\alpha|_p \otimes dx^\beta|_p^* \tag{II.6}$$

Denn: $g_p(X, Y) = X^\alpha Y^\beta g_p(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}|_p, \frac{\partial}{\partial x^\beta}|_p) = X^\alpha Y^\beta g_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta}(p) (dx^\alpha|_p \otimes dx^\beta|_p)(X, Y)$. Also bildet $dx^\alpha|_p \otimes dx^\beta|_p$ eine Basis von $T_2^0(T_p M)$. Analog sieht man, dass $dx^{\alpha_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_s}|_p$ eine Basis von $T_s^0(T_p M)$ bildet.

Es ist also per Definition schon $T_{s_1}^0(V) \otimes T_{s_2}^0(V) \subseteq T_{s_1+s_2}^0(V)$, aber es gilt sogar $T_{s_1}^0(V) \otimes T_{s_2}^0(V) \cong T_{s_1+s_2}^0(V)$ (folgt aus Auswertung auf Basiselementen).

Definition II.1.12. Ein *glatter $(0, s)$ -Tensor* φ auf M ist eine glatte Familie $(\varphi_p \in T_s^0(T_p M))_{p \in M}$, d.h. in lokalen Koordinaten x einer Karte $\kappa: U \rightarrow V$ um p ist

$$\varphi_p = \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(\kappa(p)) dx^{\alpha_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_s}|_p$$

und $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}: V \rightarrow \mathbb{R}$ ist glatt. Die Menge der glatten $(0, s)$ -Tensoren auf M bezeichnen wir mit $T_s^0 M$.

Oft schreiben wir kurz: $\varphi = \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} dx^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_s}$. Im Falle, dass die $\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ invariant unter Permutation der Indizes sind schreibt man sogar $\varphi = \varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_s} dx^{\alpha_1} \dots dx^{\alpha_s}$. Die letzte Schreibweise hatten wir z.B. für die formale Notation der Eigenzeit $d\tau^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ genutzt. Eigentlich ist das auch hier das Tensorprodukt und benutzt, dass $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ ist und es deshalb auf die Reihenfolge der dx^α nicht ankommt.

Transformationsverhalten $y = y(x)$:

Vorl. 6

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} dx^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dx^{\alpha_s} \\ &\stackrel{\text{(II.5)+multilin.}}{=} \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial y^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_s}}{\partial y^{\beta_s}} dy^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dy^{\beta_s}. \end{aligned}$$

(r, s) -Tensoren. Da ein Vektorraum V kanonisch isomorph zu seinem Bidual $V^{**} = (V^*)^*$ ist, kann ein Vektor $v \in V$ auch als lineare Abbildung $v: V^* \rightarrow \mathbb{R}$ aufgefasst werden, also als Element in $T_1^0(V^*)$.

In diesem Sinne, definieren wir einen (r, s) -Tensor als eine multilineare Abbildung

$$\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wie oben bilden diese Tensoren einen Vektorraum, den wir nun mit $T_s^r(V)$ bezeichnen. Wir können analog das Tensorprodukt für $\varphi \in T_{s_1}^{r_1}(V)$ und $\psi \in T_{s_2}^{r_2}(V)$ als $\varphi \otimes \psi \in T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$ durch

$$\varphi \otimes \psi(u^1, \dots, u^{r_1+r_2}, v_1, \dots, v_{s_1+s_2}) := \varphi(u^1, \dots, u^{r_1}, v_1, \dots, v_{s_1})\psi(u^{r_1+1}, \dots, u^{r_1+r_2}, v_{s_1+1}, \dots, v_{s_1+s_2})$$

definieren sowie den Vektorraum $T_{s_1}^{r_1}(V) \otimes T_{s_2}^{r_2}(V)$ als Span aller solcher $\varphi \otimes \psi$ einführen.

Bemerkung II.1.13. (i) $T_1^0(V) = V^*$, $T_0^1(V) = V$, Z.B. ist die Dualitätspaarung $\langle \cdot, \cdot \rangle: V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein $(1, 1)$ -Tensor.

II. Allgemeine Relativitätstheorie

- (ii) Analog zu den $(0, s)$ -Tensoren folgt: Ist e_1, \dots, e_m eine Basis von V und ϵ^i die zugehörige Dualbasis, dann ist

$$\{e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r} \otimes \epsilon^{k_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{k_s} \mid 1 \leq j_i, k_i \leq m\}$$

eine Basis von $T_s^r(V)$. Damit ist $\dim T_s^r(V) = m^{r+s}$.

- (iii) Die obige Definition von $\varphi \otimes \psi$ induziert eine lineare Abbildung $T_{s_1}^{r_1}(V) \otimes T_{s_2}^{r_2}(V) \rightarrow T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$. Das ist ein Isomorphismus. Insbesondere kann man so $T_s^r(V)$ mit

$$V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s} := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$$

identifizieren.

- (iv) Zur Vervollständigung sagt man auch ein Element in \mathbb{R} ist ein $(0, 0)$ -Tensor.

Wenden wir das wieder auf $V = T_p M$ mit variierendem p an:

Definition II.1.14. Ein *glatter (r, s) -Tensor* ist eine glatter Familie von (r, s) -Tensoren $\varphi_p \in T_s^r(T_p M)$, d.h. in lokalen Koordinaten x^α einer Karte $\kappa: U \rightarrow V$ um p ist

$$\varphi_p = \varphi_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(\kappa(p)) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_r}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_s}$$

und $\varphi_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}: V \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Den Vektorraum aller (r, s) -Tensoren bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_s^r M$.

Insbesondere ist ein glatter $(0, 0)$ -Tensor ein Element in $C^\infty(M)$.

Bemerkung II.1.15. Operationen, die man von Vektoren kennt, vererben sich mittels punktweiser Anwendung zuerst auf Vektorfelder und dann mittels der Multilinearität auf (r, s) -Tensorfelder:

- (i) Addition: $\mathcal{T}_s^r M \times \mathcal{T}_s^r M \rightarrow \mathcal{T}_s^r M$, $(T + S)(p) := T(p) + S(p)$
(ii) Multiplikation mit glatten (reellwertigen) Funktionen: $C^\infty(M) \times \mathcal{T}_s^r M \rightarrow \mathcal{T}_s^r M$, $(f, T) \mapsto fT$ mit $fT(p) := f(p)T(p)$. Es gilt $f_1(f_2T) = (f_1f_2)T$ und $(f_1 + f_2)T = f_1T + f_2T$.

Das macht $\mathcal{T}_s^r M$ zu einem $C^\infty(M)$ -Modul.

Es kommt nun noch die Operation des *Tensorprodukts* hinzu $\mathcal{T}_{s_1}^{r_1} M \otimes \mathcal{T}_{s_2}^{r_2} M \rightarrow \mathcal{T}_{s_1+s_2}^{r_1+r_2} M$, $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \otimes \psi$.

Insbesondere Eigenschaft (ii) kann als bestimmende Eigenschaft von Tensoren gesehen werden: Die Multilinearität in jedem Punkt impliziert die $C^\infty(M)$ -Linearität des Tensors:

Bemerkung II.1.16. ('Tensoriell'- Charakterisierung von Tensoren) Vgl. Übungsaufgabe 13: Eine multilineare Abbildung

$$T: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{s\text{-mal}} \rightarrow \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{r\text{-mal}},$$

die $T(f_1 X_1, \dots, f_s X_s) = f_1 \dots f_s T(X_1, \dots, X_s)$ für alle $f_i \in C^\infty(M)$ und $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ erfüllt, definiert einen (r, s) -Tensor durch $\tilde{T}(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) := \prod_i \omega^i T_i(X_1, \dots, X_s)$.^{*} Hier ist $T = (T_1, \dots, T_r)$. Man sagt T ist *tensoriell* bzw. $C^\infty(M)$ -*linear* in den r -Einträgen. Fordert man, dass T glatt ist, im Sinne dass in lokalen Koordinaten $T_i(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_s}}): U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto T_i(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_s}}|_p)$ glatt für alle α_j und i ist, dann ist auch \tilde{T} ein glatter (r, s) -Tensor. Andersherum ergibt jeder glatte (r, s) Tensor \tilde{T} eine Abbildung T mit obigen Eigenschaften.

^{*}Achtung: Hier sind die Indizes bei X_j und ω^j nur Indizes für verschiedene Vektorfelder bzw. Einsformen und nicht die Indizes für die Komponentenfunktionen in lokalen Koordinaten. Deshalb wird hier auch für die X_i/ω^i der untere/obere Index verwendet, um das zu unterscheiden.

Beispiel II.1.17. Aus den Eigenschaften vom Levi-Civita Zusammenhang ∇ aus Lemma II.1.10 oder der lokalen Darstellung (II.4) folgt direkt, dass der Wert von $\nabla_X Y$ im Punkt p nur von X im Punkt p abhängt. Da Y jedoch differenziert wird, hängt dieser Ausdruck nicht nur von Y im Punkt p ab, sondern nur von Y entlang einer Kurve ausgehend von p mit Anfangsvektor $X(p)$.*

Damit kann man $\nabla X: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, $Y \mapsto \nabla_Y X$ für festes $X \in \mathfrak{X}(M)$ als $(1, 1)$ -Tensor auffassen: $(\nabla X)_p: T_p^* M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, $(\nabla X)_p(\omega_p, Y_p) := \omega_p((\nabla_Y X)_p)$. Deshalb nennt man Eigenschaft (ii) aus Lemma II.1.10 auch *tensoriell*. Die Abbildung $\nabla_X: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, $Y \mapsto \nabla_X Y$, ergibt hingegen keinen Tensor, da ∇ derivativ in der zweiten Komponente ist.

Bemerkung II.1.18. ($\mathfrak{X}(M) \leftrightarrow \Omega^1(M)$ mit Hilfe von g) Der Vektorraum V und sein Dual sind zwar isomorph, aber es gibt keinen natürlichen Isomorphismus zwischen beiden (anders als bei V und V^{**}). Haben wir auf unserer Mannigfaltigkeit allerdings eine (semi-)Riemannsche Metrik, können wir mit dieser Zusatzstruktur einen solchen Isomorphismus zwischen $T_p M$ und $T_p^* M$ mittels $T_p M \rightarrow T_p^* M$, $v \mapsto v^\flat := g_p(\cdot, v)$ auszeichnen und damit auch einen zwischen Vektorfelder und 1-Formen: $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M)$, $X \mapsto g(\cdot, X)$. Man muss sich noch überlegen, dass dies wirklich ein Isomorphismus ist. Das folgt lokal mittels einer Abbildung der Basen (definiert über Koordinaten) aufeinander abgebildet werden. In lokalen Koordinaten x^i auf $U \subseteq M$ ist die Abbildung $\mathfrak{X}(U) \rightarrow \Omega^1(U)$ durch

$$X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \mapsto X^\alpha g_{\alpha\beta} dx^\beta$$

gegeben.†

Da aus dem oberen Index der Koordinatenschreibweise X^α so ein Objekt mit (resultierendem‡) unterem Index β in $X^\alpha g_{\alpha\beta}$ wird, sagt man dazu auch *Runterziehen eines Index mittels g*

Die inverse Abbildung zu \flat wird mit \sharp bezeichnet, d.h. $\omega \in \Omega^1(M) \mapsto \omega^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ – dann ist $\omega_\alpha dx^\alpha \mapsto \omega_\alpha g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ § (Hier ist $g^{\alpha\beta}$ wieder die zu $g_{\alpha\beta}$ inverse Matrix, also $g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$.) Wir sagen dazu, dass wir *einen Index mittels g Hochziehen*.

Im Spezialfall für eine glatte Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten wir so aus der 1-Form $df = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$ das Vektorfeld

$$\text{grad}_g f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \tag{II.7}$$

– der *Gradient von f bzgl. der Metrik g* .

Ganz analog kann man die (semi-) Riemannsche Metrik g nutzen, um Tensoren aus $\mathcal{T}_s^r(M)$ mit solchen aus $\mathcal{T}_{s'}^{r'}(M)$ mit $r+s = r'+s'$ zu identifizieren. In lokalen Koordinaten wird so z.B. aus einem $(2, 0)$ -Tensor $f^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\beta}$ ein $(1, 1)$ -Tensor $f^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes dx^\gamma$.

Da für die ART die Lorentzmetrik die Gravitation bestimmen soll, wollen wir nun schauen, welche Tensoren man sonst so aus der Lorentzmetrik bauen kann. Insbesondere brauchen wir bald für die ART als echte physikalische Theorie noch Bewegungsgleichungen/Feldgleichungen für die Lorentzmetrik, analog zu $\Delta\Psi = 4\pi G\rho$ den Feldgleichungen für das Gravitationsfeld Ψ im Newtonschen, vgl. Abschnitt I.1, suchen wir was mit zweiten Ableitungen von g . Analog wie bei den Gleichungen für den freien Fall, ändert sich aber die Form des Ausdrucks $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}(x) := \frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} g_{\alpha\beta}(x)$ bei Koordinatenwechsel. Das sagt uns (nach dem Kovarianzprinzip), dass wir in den Feldgleichungen nicht nur $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}(x)$ alleine erwarten, sondern einen Tensor.

*Deshalb ist für eine Kurve c die Geodätengleichung auch in der Schreibweise $\nabla_{\dot{c}} \dot{c}$ ein wohldefinierter Ausdruck, obwohl \dot{c} erst einmal kein Vektorfeld auf M ist sondern nur auf c lebt. Lokal in t kann \dot{c} aber immer zu einem Vektorfeld auf M erweitert werden. (Nur lokal, da die Spur(=das Bild) von c in M Selbstschnitte haben kann.)

†Auch $X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \mapsto \sum_\alpha X^\alpha dx^\alpha$ ist lokal ein Isomorphismus. Er ist aber keine gute Wahl, weil er stark von den gewählten Koordinaten abhängt – er hat nicht das nötige Transformationsverhalten, um in neuen Koordinaten ganz analog definiert zu sein. Das auf der rechten Seite das α beides mal als oberer Index auftaucht, ist das Indiz dafür.

‡Da über α summiert wird, bleibt nur β .

§Deshalb auch die Notation mit den musischen Operatoren \sharp bzw. \flat , die auch die Töne in der Musik Hoch- bzw. Runterziehen.

Welche Tensoren kann man aus der Lorentzmetrik bauen? ∇X haben wir schon gesehen. Mit der obigen Konstruktion des Hoch-/Runterziehen von Indizes erhalten wir weiterhin den $(2, 0)$ -Tensor

$$g^*: \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \rightarrow C^\infty(M), \quad g^*(\omega, \eta) := g(\omega^\#, \eta^\#), \quad (\text{II.8})$$

der in lokalen Koordinaten dann einfach durch $g^*(\omega, \eta) = g_{\alpha\beta}(\omega^\#)^\alpha(\eta^\#)^\beta = g_{\alpha\beta}g^{\alpha\gamma}\omega_\gamma g^{\beta\delta}\eta_\delta = g^{\gamma\delta}\omega_\gamma\eta_\delta$ gegeben ist. Da g nichtentartet ist, ist auch g^* nichtentartet und bildet ein inneres Produkt für Einsformen $\Omega^1(M)$. Der Kürze halber wird auch g^* oft mit g bezeichnet. Zum Vergleich auf Vektorfeldern war $g(X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, Y^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}) = X^\alpha Y^\beta g_{\alpha\beta}$.

Ähnlich baut man sich ein inneres Produkt auf (r, s) -Tensoren durch Setzen von

$$g \left(\varphi_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_r}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_s}, \psi_{\delta_1 \dots \delta_s}^{\gamma_1 \dots \gamma_r} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\gamma_r}} \otimes dx^{\delta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\delta_s} \right) \\ := g^{\beta_1 \delta_1} \dots g^{\beta_s \delta_s} g_{\alpha_1 \gamma_1} \dots g_{\alpha_r \gamma_r} \varphi_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \psi_{\delta_1 \dots \delta_s}^{\gamma_1 \dots \gamma_r} \quad (\text{II.9})$$

und Erweitern auf allgemeine Tensoren durch Forderung nach Bilinearität. War g Riemannsch, so sind auch die induzierten g auf den Tensoren positiv definit.

Einen weiteren sehr wichtigen Tensor erhalten wir als:

Definition II.1.19. Sei (M, g) eine Riemannsche/Lorentzsche Mannigfaltigkeit. Die Abbildung $R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ mit

$$(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z + \nabla_{\nabla_Y X} Z$$

heißt *Krümmungstensor* von (M, g) .

Satz II.1.20. Für $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(M)$, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

- (i) (Tensoriell in den drei Komponenten) $R(f_1 X, f_2 Y)(f_3 Z) = f_1 f_2 f_3 R(X, Y)Z$ und R ist linear in den drei Komponenten und damit ein (glatter) $(1, 3)$ -Tensor.
- (ii) (Symmetrien) $R(X, X)Z = 0$ und $g(R(X, Y)Z, Z) = 0$ und $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$
- (iii) (Bianchi-Identität) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
- (iv) In lokalen Koordinaten gilt

$$R \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}, \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \right) = R_{\alpha\beta\gamma}^\delta \frac{\partial}{\partial x^\delta} = \left(\frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\delta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\alpha\rho}^\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\rho - \Gamma_{\beta\rho}^\delta \Gamma_{\alpha\gamma}^\rho \right) \frac{\partial}{\partial x^\delta} \quad (\text{II.10})$$

Beweis. Nachrechnen. Dass $R(f_1 X, f_2 Y)(f_3 Z) = f_1 f_2 f_3 R(X, Y)Z$ zusammen mit der Multilinearität impliziert, dass R ein glatter $(1, 3)$ -Tensor ist, folgt aus Bemerkung II.1.16/Übungsaufgabe 13. \square

Bemerkung II.1.21. (i) (Interpretation) Die Krümmung misst den 'Fehlerterm des Satzes von Schwarz für kovariante Ableitungen': $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\nu}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\nu}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} = R \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)$.[†] Man darf bei Krümmung nicht direkt an 'externe Krümmung' denken – in folgendem Sinne: Die Erdkugel/ S^2 ist im Weltall/ \mathbb{R}^3 gekrümmt, der Zylinder in \mathbb{R}^3 allerdings auch. Hingegen ist R vom Zylinder Null von der S^2 hingegen nicht. Der Krümmungstensor ist eine 'interne' Eigenschaft von (M, g) und hängt nicht davon ab, wie und ob M in einem \mathbb{R}^N eingebettet ist. Diese 'eingebettete' Krümmungsanschauung liefert andere Krümmungsbegriffe (z.B. mittlere Krümmung, vgl. Definition II.6.6).

*In lokalen Koordinaten gilt $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} f = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} f$ für alle $f \in C^\infty(M)$.

[†]Für eine geometrischere Interpretation mittels Paralleltransports, siehe [5, S. 28 unten].

(ii) Auf dem Minkowskiraum bzw. euklidischen Raum sind die kovarianten Ableitungen in Richtung der Standardkoordinaten gerade die Ableitungen in Koordinaten. Für diese gilt der Satz von Schwarz. Deshalb ist für den Minkowski- und für den euklidischen Raum $R \equiv 0$. (In anderen Koordinaten auf dem Minkowskiraum sind die kovarianten Ableitungen i.A. nicht mehr nur die Ableitungen in Koordinatenrichtungen, sondern es tauchen nichtverschwindende Christoffelsymbole auf, vgl. Übungsaufgabe 12. Da R jedoch ein Tensor ist und somit das Tensortransformationsverhalten unter Koordinatenwechsel gilt, sind auch alle Tensorkomponenten in diesen Koordinaten gleich Null.)

(iii) Die Terme von R die in lokalen Koordinaten zweite Ableitungen von $g_{\alpha\beta}$ erhalten sind

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \frac{1}{2}g^{\delta\kappa} (+g_{\beta\kappa,\alpha\gamma} - g_{\beta\gamma,\kappa\alpha} - g_{\alpha\kappa,\beta\gamma} + g_{\alpha\gamma,\kappa\beta}) + \text{Terme in } g_{\alpha\beta} \text{ und erste Abl..}$$

(Hier ist $g_{\alpha\beta,\kappa\gamma} = \frac{\partial^2}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\gamma}} g_{\alpha\beta}$.)

(iv) $g(R(\cdot, \cdot), \cdot, \cdot)$ ist ein $(0, 4)$ -Tensor – lokal $g_{\alpha\beta} R_{\gamma\delta\epsilon}^{\beta}$.

Um weitere Tensoren zu erhalten, schauen wir uns als nächstes allgemeine Operationen auf Tensoren an. Neben Linearkombinationen von (r, s) -Tensoren, Tensorprodukte von Tensoren, Hoch- und Runterziehen von Indizes mittels g haben wir:

Vorl. 7

Kontraktion von Tensoren. Die $(1, 1)$ -Kontraktion ist die eindeutige $C^{\infty}(M)$ -lineare Abbildung $C: \mathcal{T}_1^1 M \rightarrow C^{\infty}(M)$ mit $C(X \otimes \omega) = \omega(X)$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\omega \in \Omega^1(M)$. Das induziert eine Kontraktion $C_j^i: \mathcal{T}_s^r M \rightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r-1} M$ durch

$$C_j^i(S)(\omega^1, \dots, \omega^{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1}) = C(\underbrace{S(\omega^1, \dots, \omega^{i-1}, _, \omega^i, \dots, \omega^{r-1}, X_1, \dots, X_{j-1}, _, X_j, \dots, X_{s-1})}_{\in \mathcal{T}_1^1 M}).$$

Beispiel II.1.22. (Ricci-Krümmung) Die *Ricci-Krümmung* $\text{Ric} = C_2^1(R)$, d.h. $\text{Ric} = \text{Ric}_{\alpha\beta} dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta} = R_{\alpha\gamma\beta}^{\gamma} dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta}$, ist ein $(0, 2)$ -Tensor. Aus den Symmetrien von R in Satz II.1.20 folgt $\text{Ric}_{\alpha\beta} = \text{Ric}_{\beta\alpha}$.

Bemerkung II.1.23. (Zum Hoch-/Runterziehen von Indizes mittels g) Durch Hochziehen eines Index mittels g können wir daraus einen $(1, 1)$ -Tensor machen:

$\text{Ric} = g^{\alpha\gamma} \text{Ric}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \otimes dx^{\beta} = g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\delta}^{\delta} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \otimes dx^{\beta}$. Wir setzen $\text{Ric}_{\beta}^{\gamma} := g^{\alpha\gamma} \text{Ric}_{\alpha\beta}$ – man hat den Index β mittels g hochgezogen. A priori ist das eine schlechte Notation, da aus der Schreibweise nicht hervorgeht, ob der erste oder der zweite Index hochgezogen werden. Da aber sowohl Ric als auch g symmetrische Bilinearformen sind, spielt das hier keine Rolle. Für allgemeine (r, s) -Tensoren ist das nicht so. * Allgemein kann man das Hochziehen des i -ten unteren Index eines Tensors T als $C_i^1(g^{-1} \otimes T)$ (Hier ist $g^{-1} = g^*$ der von g induzierte $(2, 0)$ -Tensor aus (II.8).) auffassen (Runterziehen analog als $C_1^i(g \otimes T)$).

Beispiel II.1.24. Die *Skalar­krümmung* $\text{scal} = C_1^1(\text{Ric}) = g^{\alpha\beta} \text{Ric}_{\alpha\beta}$ ist ein $(0, 0)$ -Tensor, also eine glatte Funktion auf M . Der *Einstein­tensor* ist ein $(0, 2)$ -Tensor definiert als

$$G = \text{Ric} - \frac{\text{scal}}{2}g.$$

Es gilt $g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \text{Ric}_{\mu\nu} - \frac{\text{scal}}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = (1 - \frac{m}{2})\text{scal}$, wobei $m = \dim M$ ist. D.h. ist $G \equiv 0$, dann ist schon $\text{scal} \equiv 0$ und $\text{Ric} \equiv 0$.

Ableiten von Tensoren. Da Vektorfelder $(1, 0)$ -Tensoren sind, gibt der Levi-Civita-Zusammenhang ∇ eine Möglichkeit $(1, 0)$ -Tensoren in Richtung eines Vektorfeldes abzuleiten. Nun wollen wir ∇ zu Ableitungen von (r, s) -Tensoren derart verallgemeinern, dass es kompatibel mit der Dualitätspaarung von Vektorfelder/ $(1, 0)$ -Tensoren und Einsformen/ $(0, 1)$ -Tensoren und kompatibel mit dem Tensorprodukt ist.

Eine Erweiterung dieses Zusammenhang auf Tensoren sollte also:

* Oft wird als Notation vom Hochziehen folgendes verwendet $T_{\alpha}^{\beta}{}_{\gamma}{}^{\delta} := g^{\beta\eta} g^{\delta\zeta} T_{\alpha\eta\gamma\zeta}$ – durch die 'Leerstellen' merkt man sich, welcher Index hoch- bzw. runtergezogen wurde.

II. Allgemeine Relativitätstheorie

- (i) auf Vektorfelder mit dem ursprünglichen übereinstimmen;
- (ii) Für $X \in \mathfrak{X}(M)$ sollte ∇_X eine Abbildung von $\mathcal{T}_s^r M$ in sich selbst sein;
- (iii) die Leibnizregel erfüllen:

$$\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X S;$$

- (iv) Für $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist $\omega(Y) \in C^\infty(M)$ ($\omega_p \in T_p^* M$). Funktionen können wir in X -Richtung ableiten. Also fordern wir

$$X(\omega(Y)) = (\nabla_X \omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y). \quad (\text{II.11})$$

(Funktionen kann man als $(0,0)$ -Tensor betrachten. Dann wäre ∇ auf $(0,0)$ -Tensoren gegeben durch $\nabla_X(f) = X(f) = df(X)$.)

Mit diesen Forderungen ist die Erweiterung schon auf alle Tensoren eindeutig bestimmt und wir haben z.B.

Satz II.1.25. *Es gibt genau eine Abbildung $\nabla: \mathcal{T}_s^r M \rightarrow \mathcal{T}_{s+1}^r M$, $S \mapsto \nabla S$, für die Bedingung (i)-(iv) von oben erfüllt sind. Es gilt für alle $X, Y_i \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega^i \in \Omega^1(M)$ und*

$$(\nabla_X S)(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) := (\nabla S)(\omega^1, \dots, \omega^r, X, Y_1, \dots, Y_s),$$

dass

$$\begin{aligned} (\nabla_X S)(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) &= X \left(\underbrace{S(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s)}_{\in C^\infty(M)} \right) - \sum_{i=1}^s S(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_s) \\ &\quad - \sum_{j=1}^r S(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^j, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

gilt.

Beweis. Übungsaufgabe 14 □

Lemma II.1.26. *Für den Levi-Civita Zusammenhang einer (semi-)Riemannschen Metrik g gilt $\nabla g = 0$ (d.h. $\nabla_X g = 0$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$).*

Beweis. $(\nabla_X g)(Y_1, Y_2) = X(g(Y_1, Y_2)) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2) = 0$ wegen Metrizität von ∇ . □

Lemma II.1.27. *Es gilt $[C, \nabla] = 0$ im Sinne von: Ist $T \in \mathcal{T}_s^r M$ mit $r, s \geq 1$, $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq j \leq s$, dann gilt $C_j^i(\nabla_X T) = \nabla_X(C_j^i T)$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$. Weiterhin kommutiert ∇ mit dem Hoch-/Runterziehen von Indizes mit g .*

Beweis. Wegen Linearität reicht es die Gleichheit auf Elementartensoren zu überprüfen. Die Wahl der i und j spielt keine Rolle. Wir wählen Tensoren der Form $S \otimes Y \otimes \omega \otimes T$ mit $S \in \mathcal{T}_0^{r-1} M$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega \in \Omega^1(M)$ und $T \in \mathcal{T}_{s-1}^0 M$, $i = r$ und $j = 1$:

$$\begin{aligned} &C_1^r(\nabla_X(S \otimes Y \otimes \omega \otimes T)) \\ &= C_1^r(\nabla_X S \otimes Y \otimes \omega \otimes T + S \otimes \nabla_X Y \otimes \omega \otimes T + S \otimes Y \otimes \nabla_X \omega \otimes T + S \otimes Y \otimes \omega \otimes \nabla_X T) \\ &= \omega(Y) \nabla_X S \otimes T + (\omega(\nabla_X Y) + (\nabla_X \omega)(Y)) S \otimes T + \omega(Y) S \otimes \nabla_X T \\ &= \omega(Y) \nabla_X(S \otimes T) + X(\omega(Y)) S \otimes T \\ &= \nabla_X(\omega(Y) S \otimes T) = \nabla_X(C_1^r(S \otimes Y \otimes \omega \otimes T)). \end{aligned}$$

Das Kommutieren von ∇ mit dem Runterziehen von Indizes folgt, da das Runterziehen als $C_1^i(g \otimes T)$ geschrieben werden kann, ∇ mit C kommutiert und $\nabla g = 0$ ist. Analog sieht man die Aussage für das Hochziehen, da auch $\nabla g^{-1} = 0$ ist, vgl. Übungsaufgabe 15. □

Lemma II.1.28. (2. Bianchi-Identität) Es gilt

$$(\nabla_U R)(X, Y) + (\nabla_X R)(Y, U) + (\nabla_Y R)(U, X) = 0,$$

wobei $(\nabla_U R)(X, Y): \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ durch $Z \mapsto (\omega \in \Omega^1(M) \mapsto (\nabla_U R)(\omega, X, Y, Z))$ definiert ist.

Beweis. Übungsaufgabe 15 (- wegen der Tensoreigenschaft reicht es zum Beispiel, die Formel auf Koordinatenvektorfelder zu überprüfen.) \square

Die (ii) Aussage im Kovarianzprinzip von Seite 15 formuliert man oft als:

(ii)' Die Gleichungen eines physikalischen Gesetzen nehmen in allen Koordinatensystemen die gleiche Form an und sind gewöhnlich in Tensoren ausgedrückt.

II.1.3. Korrespondenzprinzip

Das Kovarianzprinzip ist eher als Minimalforderung oder Ausschlusskriterium zu verstehen, welche Gleichungen für physikalische Gesetze überhaupt in Frage kommen. Formuliert man es etwas anders (oft *Korrespondenzprinzip* genannt) gibt es einen ad-hoc Formalismus, wie aus Gleichungen der SRT Gleichungen der ART werden könnten:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &\mapsto g_{\mu\nu} \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} &\mapsto \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} \end{aligned}$$

Das gibt (ähnlich wie Quantisierung in der Quantenmechanik) eine ad-hoc Methode, die nicht zwingend zum richtigen Ergebnis führen muss. Ein offensichtlicher Grund ist, dass die 'Umkehrabbildung' nicht injektiv ist. Es gibt Größen die im Minkowskiraum Null sind, z.B. die Krümmung R , aber nicht auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten. Das ist z.B. bei zweiten Ableitungen relevant - wie wir bei den Gezeitenkräften im nächsten Abschnitt sehen werden. Für die Feldgleichungen der ART selbst wird das Korrespondenzprinzip auch keinen ersten Anhaltspunkt geben, da in der SRT gar keine Gravitation vorkommt. Da werden wir uns mit der klassischen Theorie (Newton) und dem Kovarianzprinzip begnügen müssen. (Aber die SRT wird uns helfen, den 'richtigen Tensor' für den Ersatz der Masseverteilung ρ in $\Delta\Psi = 4\pi G\rho$ zu erhalten, vgl. Abschnitt II.2.)

II.1.4. Gezeitenkräfte

Was sind *Gezeiten*: Man hat verschiedene Testkörper, die sich im freien Fall im Gravitationsfeld, befinden. Dabei ändert sich i.A. der Abstand dieser Teilchen.

*Was bedeutet dies auf dem Level der Geodätischen (der Kurven freien Falls)?** Wir wollen dazu das Verhalten von Geodätischen mit 'nah beieinander liegenden' Anfangswerten untersuchen – also fragen: 'Streben die Geodätischen dann eher voneinander weg oder aufeinander zu'?

Geodätische c waren Kurven, die die Gleichung $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$ erfüllen, was in lokalen Koordinaten[†] die Form

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x)\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0 \tag{II.13}$$

für $c(u) = \kappa(x(u))$, einer Karte $\kappa: U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ um $p = c(u_0) = \kappa(x_0)$ mit lokale Koordinaten x^α ist. Der Punkt über c bzw. x steht hier für die Ableitung bzgl. des Parameters u .[‡]

*Als Geodätische bezeichnet man im Allgemeinen nicht nur die Kurven des freien Falls, also zeitartige Kurven die in lokalen Koordinaten die Gleichungen $\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0$ erfüllen. In Abschnitt II.1 hatten wir gesehen, dass alle zeitartigen Lösungen dieser Gleichung Kurven freien Falls von Testteilchen sind. Analog sind alle lichtartigen Lösungen Kurven freien Falls von Lichtteilchen. Es gibt auch raumartige Lösungen, die allerdings keine solche Interpretation haben, aber alle Lösungen werden *Geodätische* genannt.

[†]vgl. auch * auf Seite 19

[‡]Im Riemannschen wird der Parameter u oft als Zeit interpretiert und als t gewählt. Da wir in Lorentzmannigfaltigkeiten manchmal eine global/lokal gewählte Zeitfunktion verwenden werden und das u hier der davon i.A. verschiedenen Eigenzeit ist, benutzen wir hier lieber u .

II. Allgemeine Relativitätstheorie

Die Anfangsbedingungen $c(u_0) = p$ und $\dot{c}(u_0) = Y \in T_p M$ in lokalen Koordinaten sind dann $x^\alpha(u_0) = x_0^\alpha$ und $\dot{x}^\alpha(u_0) = Y^\alpha$.

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es bei gegebenen Anfangswerten eine eindeutige Lösung von (II.13) auf einem maximalen Intervall um u_0 und die Lösung hängt glatt von den Anfangswerten ab.

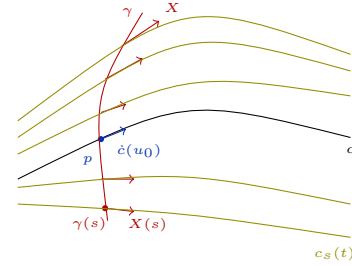
Da die Geodätengleichung nichtlinear ist, ist die Frage, ob nahe beieinander startende Geodätische aufeinander zu oder voneinander weg streben, a priori nicht leicht zu beantworten. Deshalb schauen wir uns nur die Effekte erster Ordnung an, d.h. wir werden die Geodätengleichung linearisieren. Um das zu formalisieren, definieren wir

Definition II.1.29. Sei (M, g) eine Riemannsche oder Lorentzsche Mannigfaltigkeit. Eine glatte Abbildung $c: (-\epsilon, \epsilon) \times I \rightarrow M$ heißt *geodätische Variation längs* $c(u) := c(0, u)$, falls für jedes $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Kurve $c_s: u \mapsto c(s, u)$ eine Geodätische ist.

Bemerkung II.1.30. Sei $c: [a, b] \rightarrow M$ eine Geodätische, $u_0 \in [a, b]$, $p = c(u_0)$.

Sei $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ eine glatte Kurve mit $p = \gamma(0)$ und sei X ein glattes Vektorfeld längs γ , d.h. $X: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ und $X(s) \in T_{\gamma(s)} M$. Sei $X(0) = \dot{c}(u_0)$. Hier repräsentiert $\gamma(s)$ für jeden Parameter u einen Testkörper und $X(s)$ die Anfangsgeschwindigkeit dieses Testkörpers. (Für diese Interpretation mit den Testkörpern sollte $g_{\gamma(s)}(X(s), X(s)) = -1$ sein. Ist aber für die folgenden Gleichung unwichtig – diese gelten für alle Wahlen von X .)

Sei dann $c_s(u)$ die Geodätische mit $c_s(u_0) = p$ und $\dot{c}_s(u_0) = X(s)$. Wir setzen $c(s, u) := c_s(u)$.



Wegen glatter Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten ist $c(s, u)$ von oben glatt als Abbildung $c: (-\epsilon, \epsilon) \times I \rightarrow M$. Zur Frage des maximalen Existenzintervall für Geodätischen kommen wir später, vgl. Seite 58.

Sei $J(u) := \frac{\partial}{\partial s} |_{s=0} c(s, u) \in T_{c(u)} M$ das *Variationsvektorfeld* zu einer geodätischen Variation $c(s, u)$. Dann gilt

$$\nabla_{\dot{c}(u)} J(u) = \nabla_{\dot{c}(u)} \partial_s c(s, u) |_{s=0} = \nabla_{\partial_s c(s, u)} \partial_u c(s, u) |_{s=0}.$$

Die letzte Gleichheit folgt am Ende aus der Torsionsfreiheit (also der Symmetrie der Christoffelsymbole in den unteren beiden Indizes), da lokal gilt, dass (verwendet (II.2) zusammen mit $\dot{c} = \dot{c}^\alpha \partial_{x^\alpha}$ und $\partial_s \dot{c} = \partial_s c^\alpha \partial_{x^\alpha}$)

$$\nabla_{\frac{\partial c}{\partial u}} \frac{\partial c}{\partial s} = \left(\frac{\partial^2 c^\alpha}{\partial u \partial s} + \frac{\partial c^\beta}{\partial u} \frac{\partial c^\gamma}{\partial s} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \right) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{c}(u)}^2 J(u) &= \nabla_{\dot{c}(u)} \nabla_{\dot{c}(u)} \frac{\partial}{\partial s} c(s, u) |_{s=0} = \frac{\nabla}{du} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial}{\partial u} c(s, u) |_{s=0} \\ &\stackrel{\text{Def. von } R}{=} \frac{\nabla}{ds} \underbrace{\frac{\nabla}{du} \frac{\partial}{\partial u} c(s, u)}_{=0 \text{ da alle } c_s \text{ Geod.}} |_{s=0} + R \left(\frac{\partial}{\partial u} c(0, u), \frac{\partial}{\partial s} c(0, u) \right) \frac{\partial}{\partial u} c(0, u) \\ &= R(\dot{c}(u), J(u)) \dot{c}(u). \end{aligned}$$

Definition II.1.31. Sei $c: I \rightarrow M$ Geodätische. Die Gleichung

$$\nabla_{\dot{c}(u)}^2 J(u) = R(\dot{c}(u), J(u)) \dot{c}(u)$$

heißt *Jacobigleichung* (in der Differentialgeometrie) bzw. *Deviationsgleichung* (in der ART) und deren Lösungen heißen *Jacobifelder längs* c .

Interpretation II.1.32. Was machen Gezeitenkräfte? Statt entlang der Geodäten $c(u)$ fällt das Teilchen dank der Gezeitenkräfte entlang $c(u) + \eta(u)$ (alles hier und folgend in Koordinaten gedacht, da sonst Addition von Punkten in M keinen Sinn macht). Wären wir in der Minkowskimetrik, wäre $\ddot{c} = 0$ und $\ddot{\eta}$ die 'Gezeitenkraftbeschleunigung' – Gezeitenkraft pro Masse.

Wir haben gerade ausgerechnet: Für $c(s, u) = c(u) + sJ(u) + O(s^2)$ ist $\nabla_{\dot{c}}^2 J = R(\dot{c}, J)\dot{c}$. Also ist $R(\dot{c}, J)\dot{c}$ die Gezeitenkraftänderungsrate pro Masse (.rate, da die Gleichung für J und nicht für sJ da steht).

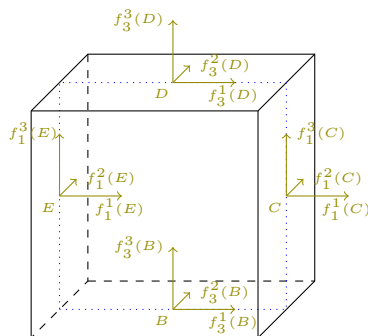
II.2. Feldgleichungen

Wir wollen nun zu den Feldgleichungen der ART kommen - also Gleichungen, die das Gravitationsfeld, also $g_{\mu\nu}$ bestimmen. Im Newtonschen war das $\Delta\Psi = 4\pi G\rho$ – das Gravitationspotential Ψ wurde also durch die Masseverteilung ρ bestimmt.

Vorl. 8

Wie kann die rechte Seite für die 'analogen' Feldgleichungen in der ART aussehen? Schon in der SRT haben wir gesehen, dass die Masse im (Vierer-)Impuls geschwindigkeitsabhängig ist und dort nicht nur die Ruhemasse vorkommt. Auch ist nur die Ruhemasse alleine nicht das gute Konzept, da Masse auch zum größten Teil einfach Bindungsenergie ist. D.h. das Gravitationsfeld sollte durch Energie-/Impulsverteilung bestimmt werden. Dazu müssen wir zuerst wenigstens etwas zu Kontinuumsphysik sagen, denn die ART ist per Konstruktion eine Kontinuumstheorie.*

Dazu kommen wir zuerst zu Kräften im 'Inneren' des Kontinuums (des Festkörpers/der Flüssigkeit/...): Wir schauen uns das in einer Approximation an – ein kleines Volumelement - ein Würfel der Kantenlänge 2ϵ um den Mittelpunkt A .



Die Kraft auf das i -te Flächenelement (im jeweiligen Flächenelement) sei $f_i = f_i^j \partial_j$. Der Anteil f_i^j ist der Kraftanteil der linear 'durchgeht', die anderen sind die Scherkräfte auf das Flächenelement. Schon im Newtonschen ist (f_j^i) ein Tensor ^a – der *Spannungstensor*. Damit haben wir in jedem Punkt des Kontinuums einen Spannungstensor.

^adas kann man mittels des Transformationsverhalten überprüfen

Bevor wir zu den Impulsdichten kommen, überlegen wir uns, dass der Spannungstensor symmetrisch ist. Dazu schauen wir uns die $(x^1 - x^3)$ -Fläche des obigen Würfels durch den Würfelmittelpunkt A an: Dann ist

$$\begin{aligned} &\epsilon(f_3^1(B) - f_1^3(C) + f_3^1(D) - f_1^3(E)) \\ &= \text{Drehmomentdichte um } x^2\text{-Achse} && \text{Bild kommt noch} \\ &= \text{Trägheitsdichte bei Rotation um } x^2\text{-Achse} \\ &\quad \cdot \text{Winkelbeschleunigung} \\ &= \text{Massendichte} \cdot (2\epsilon)^2 \cdot \text{Winkelbeschleunigung.} \end{aligned}$$

Teilen durch ϵ und dann Limes für $\epsilon \rightarrow 0$ ergibt

$$2(f_3^1(A) - f_1^3(A)) = \text{Massendichte} \cdot 0 \cdot \text{Winkelbeschleunigung} = 0.$$

Damit ist $f_3^1 = f_1^3$ und analog für die anderen Richtungen – der Spannungstensor ist also symmetrisch.

Nun zum Impuls: Die Impulserhaltung sagt zeitliche Impulsänderung ist gleich Kraft. In der Kontinuumsversion haben wir (für e_i den Einheitsvektor in x^i -Richtung und A als Nullpunkt):

*Newton eigentlich auch - fiel bloß nicht so auf, weil wir in den Anwendungen nur Punktteilchen betrachtet haben....

II. Allgemeine Relativitätstheorie

$$\begin{aligned}
& \partial_t(\text{Impulsdichte in } x^1\text{-Richtung}) \cdot 2\epsilon \\
& = f_1^1(\epsilon e_1) - f_1^1(-\epsilon e_1) + f_2^1(\epsilon e_2) - f_2^1(-\epsilon e_2) + f_3^1(\epsilon e_3) - f_3^1(-\epsilon e_3) + O(\epsilon^2) \\
& = 2\epsilon \operatorname{div}(f_j^1 \partial_j)(A) + O(\epsilon^2) = 2\epsilon \operatorname{div}(f_1^j \partial_j)(A) + O(\epsilon^2).
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Impulsdichte in x^i -Richtung mit p_i haben wir damit

$$\dot{p}_i = \operatorname{div}(f_i^j \partial_j).$$

Da wir eine Beschreibung kompatibel mit der SRT suchen, ist es sinnvoll die p_i mit zu dem Spannungstensor zu tun. Dann haben wir bis jetzt eine 3×4 -Matrix

$$\begin{pmatrix} p_1 & f_1^1 & f_1^2 & f_1^3 \\ p_2 & f_2^1 & f_2^2 & f_2^3 \\ p_3 & f_3^1 & f_3^2 & f_3^3 \end{pmatrix}$$

für die jede Zeile bzgl. der Minkowskimetrik divergenzfrei ist. (Allgemein ist in der Lorentz-/Riemannschen Metrik die Divergenz eines Vektorfeldes $\operatorname{div}X = \operatorname{Spur}(Y \mapsto \nabla_Y X)$ *, also in Minkowski $\operatorname{div}X = -\partial_{x^0}X^0 + \partial_{x^i}X^i$.)

In der SRT haben wir aber schon gesehen, dass der 'Dreierimpuls' selber kein gutes Transformationsverhalten hat, und wir deshalb $p = (p_0, p_i)$ mit p_0 der Energiedichte[†] p_0 betrachten sollten. Deshalb setzen wir obige 3×4 -Matrix durch

$$T := \begin{pmatrix} p_0 & ? & ? & ? \\ p_1 & f_1^1 & f_1^2 & f_1^3 \\ p_2 & f_2^1 & f_2^2 & f_2^3 \\ p_3 & f_3^1 & f_3^2 & f_3^3 \end{pmatrix}$$

fort – allerdings fehlen uns zu einer 4×4 -Matrix noch 3 Einträge: Will man analog auch eine divergenzfreie 1. Zeile, erwartet man für die fehlenden Einträge einen Vektor der $\partial_t p_0 = \operatorname{div}_{\mathbb{R}^3} X$ erfüllt (Energieerhaltung). Solch ein X nennt man *Energiestromdichte*.

Für die gängigen Modelle (z.B. Teilchen (Staub/Gas) bestehend aus relativistischen Teilchen oder im Elektromagnetismus), in denen man T aus einem Modell ableitet, sind die Energiestromdichten gleich den Impulsdichten. Damit ist das resultierende T symmetrisch. Wir werden später noch Beispiele sehen, vgl. Abschnitt II.4.3.

Damit erhalten wir einen Tensor. Im Moment ist es ein $(1, 1)$ -Tensor, der aus Vektorfeldern wieder Vektorfelder macht. I.A. betrachtet man den (durch Runterziehen eines Index mittels der Minkowskimetrik) den zugehörigen symmetrischen $(0, 2)$ -Tensor $T = T_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ – der *Energie-Impuls-Tensor*.

Dieses T soll ein SRT-Analogon für die rechte Seite der Feldgleichungen der ART sein. Es ist deshalb plausibel, dass der Energie-Impuls-Tensor in der ART auch ein symmetrischer $(0, 2)$ -Tensor sein soll. Es bleibt die Frage, wie wir die Bedingung der Divergenzfreiheiten der Spalten, ersetzen. Das ist nötig, da die Forderung der Divergenzfreiheit aller $(0, 1)$ -Tensoren $S_\nu := T_{\mu\nu}$ koordinatenabhängig ist. In allgemeinen Koordinatensystemen ist die Energie- bzw. der Impuls- nicht wie oben erhalten. Statt dessen brauchen wir die Verallgemeinerung auf symmetrische $(0, 2)$ -Tensoren. Wir werden vom Energie-Impuls-Tensor verlangen, dass diese Divergenz verschwindet.

*In lokalen Koordinaten: $(\nabla_\gamma X)^\gamma$. Die Divergenz hängt von der Metrik ab! Weiterhin haben wir ganz analog zum Euklidischen einen Divergenzsatz für Riem./ Lorentz-Mannigfaltigkeiten: Sei $\Omega \subseteq M$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und ν in jedem Punkt von $\partial\Omega$ der äußere Einheitsnormalenvektor. Dann ist

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}X \operatorname{dvol}_g = \int_{\partial\Omega} g(X, \nu) \operatorname{dvol}_{g_{\partial\Omega}}.$$

†Eigentlich Energiedichte durch Lichtgeschwindigkeit, aber wir setzen hier $c = 1$ und kümmern uns erst mal nicht um Einheiten.

Divergenz eines symmetrischen (0, 2)-Tensors.

Definition II.2.1. Sei S ein symmetrischer (0, 2)-Tensor. Dann ist $\operatorname{div}(S)$ ein (0, 1)-Tensor in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$(\operatorname{div}S)_\alpha = g^{\beta\gamma}(\nabla_{\partial_\gamma}S)_{\alpha\beta}.$$

Beispiel II.2.2. Sei (M, g) eine (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(i) $\operatorname{div}g = 0$, da schon $\nabla g = 0$.

(ii) Für $f \in C^\infty(M)$ ist $\operatorname{div}(fg) = df$:

$$\operatorname{div}(fg) = (\operatorname{div}(fg))_\gamma dx^\gamma = g^{\alpha\beta}(\nabla_{\partial_\alpha}(fg))_{\gamma\beta} dx^\gamma = g^{\alpha\beta}g_{\gamma\beta}\partial_\alpha f dx^\gamma = \partial_\gamma f dx^\gamma = df.$$

(iii) Wir wollen die Divergenz der Riccikrümmung und des Einsteintensors bestimmen: Dazu verwenden wir die zweite Bianchi-Identität (vgl. Lemma II.1.28)

$$(\nabla_U R)(\omega, X, Y, Z) + (\nabla_X R)(\omega, Y, U, Z) + (\nabla_Y R)(\omega, U, X, Z) = 0$$

Wir betrachten die linke Seite für festes $U = \partial_\alpha := \partial_{x^\alpha}$, $X = \partial_\beta$, $Z = \partial_\gamma$ als (1, 1)-Tensor (also in ω und Y) und kontrahieren diesen. Damit erhalten wir

$$(\nabla_\alpha \operatorname{Ric})_{\beta\gamma} - (\nabla_\beta \operatorname{Ric})_{\alpha\gamma} + (\nabla_\delta R)_{\alpha\beta\gamma}^\delta = 0,$$

dabei haben wir bei den ersten beiden Summanden verwendet, dass $[C, \nabla] = \text{ist}$, siehe Lemma II.1.27. Damit ist

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\beta\gamma}(\nabla_\alpha \operatorname{Ric})_{\beta\gamma} - g^{\beta\gamma}(\nabla_\beta \operatorname{Ric})_{\alpha\gamma} + g^{\beta\gamma}(\nabla_\delta R)_{\alpha\beta\gamma}^\delta \\ &= \nabla_\alpha \operatorname{scal} - g^{\beta\gamma}(\nabla_\beta \operatorname{Ric})_{\alpha\gamma} + g^{\beta\gamma}g^{\delta\eta}(\nabla_\delta R)_{\gamma\eta\alpha\beta} \\ &= \partial_\alpha \operatorname{scal} - g^{\beta\gamma}(\nabla_\beta \operatorname{Ric})_{\alpha\gamma} - g^{\delta\eta}(\nabla_\delta R)_{\eta\gamma\alpha}^\gamma \\ &= \partial_\alpha \operatorname{scal} - 2g^{\beta\gamma}(\nabla_\beta \operatorname{Ric})_{\alpha\gamma}, \end{aligned}$$

wobei die zweite Zeile im ersten Summanden verwendet, dass auch Hochziehen von Indizes mit ∇ kommutiert, und im letzten Summanden, dass $\nabla_\delta R$ die Symmetrien von R erbt.

Also ist $\operatorname{div} \operatorname{Ric} = \frac{1}{2}\partial_\alpha \operatorname{scal} dx^\alpha$ und damit $\operatorname{div} G = 0$. Der Einsteintensor ist damit ein divergenzfreier (0, 2)-Tensor.

Bemerkung II.2.3. Achtung! Es gibt im Allgemeinen kein Analogon für den Divergenzsatz von Vektorfeldern für symmetrische (0, 2)-Tensoren auf Mannigfaltigkeiten. Wenn es jedoch genügend Symmetrien gibt, kann man aus der Divergenzfreiheit von T trotzdem Erhaltungsgrößen erhalten, vgl. Satz II.4.6.

Bis jetzt haben wir uns plausibel gemacht, dass ein symmetrischer (0, 2)-Tensor, der divergenzfrei ist, ein guter Ansatz für die rechte Seite unserer Feldgleichungen wäre. Wie dieser Tensor dann genau aussieht, wird vom Materiemodell abhängen.

Doch erst einmal benötigen wir eine linke Seite (also einen Ersatz für $\Delta\Psi$): Wegen Gleichheit zu T erwarten wir auch dort einen symmetrischen divergenzfreien (0, 2)-Tensor. Dieser soll irgendwie aus der Lorentzmetrik entstehen, da diese unsere Gravitation beschreiben soll ('also $\Psi \rightsquigarrow g$ '). Im Newtonschen stehen in Bewegungsgleichungen immer die Beschleunigungen – also zweite Ableitungen. Versuchen wir das auch: Wir suchen also einen symmetrischen divergenzfreien (0, 2)-Tensor, der nur von g abhängt und in dem höchstens zweite Ableitungen von g vorkommen.

Einen solchen Tensor haben wir schon gesehen – den Energie-Impulstensor G . Aber auch $G + cg$ für ein konstantes c erfüllt diese Bedingungen, da g ein symmetrischer (0, 2)-Tensor mit $\nabla g = 0$ ist. Aber gibt es noch mehr?

Satz II.2.4. [6] Sei (M, g) eine vierdimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit und A ein divergenzfreier symmetrischer (0, 2)-Tensor, der in lokalen Koordinaten nur von $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta,\gamma}$ und $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ abhängt. Dann ist $A_{\mu\nu} = aG_{\mu\nu} + bg_{\mu\nu}$ für Konstanten a, b .

Definition II.2.5. Die *Einsteingleichungen* sind $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ für einen Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ und einer Konstante Λ – die sogenannte *kosmologische Konstante*.^{*} Ist $T \equiv 0$, nennt man Lösungen der Gleichung *Vakuumlösungen*.

Bemerkung II.2.6. Wir haben schon oben bemerkt, dass der Energie-Impuls-Tensor von der Energie- und Impulsverteilung der Materie kommt und sein genaues Aussehen, vom Materiemodell abhängt. Andererseits sagen die Einsteingleichungen, dass der Tensor $T_{\mu\nu}$ ein Gravitationsfeld erzeugt. Dieses wird dann wieder Auswirkungen auf die Materie-/Energie-/Impulsverteilung haben und wiederum den Energie-Impuls-Tensor beeinflussen.

In Wirklichkeit muss man also die Einsteingleichungen selbst bei gegebenem Modell nie alleine lösen, sondern sie sind immer mit Materiegleichungen gekoppelt, die heuristisch gesehen angeben, wie die Materieverteilung sich ändert.

Wir werden noch später ein Beispiel dafür sehen, aber uns jetzt erst mal auf Vakuumlösungen beschränken. Denn dort ist $T \equiv 0$. Dann gibt es keine zusätzlichen Materiegleichungen – es reicht also $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$ zu lösen.

Das volle Problem der ART wäre auch nicht nur die Einsteingleichung mit Materiegleichungen (für ein gegebenes Modell) zu lösen, sondern gleichzeitig die unterliegende Mannigfaltigkeit zu finden. Denn diese ist ja nicht schon von vornherein bekannt.

Wir werden allerdings beim einfacheren Problem bleiben: Mannigfaltigkeit gegeben. Später werden wir darüber reden, welche Bedingungen wir aus physikalischer Sicht an die Mannigfaltigkeit stellen wollen. Das sind Fragen wie: Spricht etwas physikalisch gegen Zeitschleifen? Vgl. ??.

II.3. Die Schwarzschildlösung

Vorl. 9

Die Schwarzschildlösung war historisch betrachtet die erste exakte nichttriviale[†] Lösung der Einsteingleichungen.

Wir betrachten einen isolierten idealen Stern im \mathbb{R}^4 (räumlich dreidimensional) und suchen eine (räumlich) sphärisch symmetrische Lösung der Einsteingleichungen. Da wir uns erst einmal nicht um das Sternmodell kümmern wollen (mit dem wir einen Ausdruck für den Energie-Impuls-Tensor und zugehörige Materiegleichung erhalten würden), suchen wir nur Lösungen weg von der Sternoberfläche. Da wir den Stern als isoliert annehmen[‡], ist weg vom Stern der Energie-Impuls-Tensor Null. Des Weiteren sei $\Lambda = 0$. Damit suchen wir (jeweils weg vom räumlichen Ursprung) eine sphärisch symmetrische Lösung von $G = 0$, also nach Beispiel II.1.24 $\text{Ric} = 0$.

Als ersten Schritt suchen wir eine statische (= bezüglich einer gewählten Zeit sind alle Metrikkoeffizienten zeitunabhängig[§]) Raumzeit (Signatur = $(-, +, +, +)$) auf dem $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus B_r(0))$, die invariant unter räumlichen Rotationen ist und die Einsteinvakuungleichungen ($\text{Ric}=0$) erfüllt.

Für (räumlich) sphärisch symmetrischen statische Raumzeiten hat die Lorentzmetrik per Definition[¶] in Koordinaten (t, x^1, x^2, x^3) die Form $-f_1(r)^2 dt^2 + h$ mit h eine sphärisch symmetrische Metrik auf $\mathbb{R}^3 \setminus B_r(0)$. Sphärisch symmetrische Metrik auf \mathbb{R}^3 heißt, dass räumliche Rotationen $f: \mathbb{R}^3 \setminus B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus B_r(0)$ eine *Isometrie* für $(\mathbb{R}^3 \setminus B_r(0), h)$ sind:

Definition II.3.1. Eine surjektive Abbildung $f: M \rightarrow M$ einer Riemannschen-/Lorentzischen Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *Isometrie*, falls für alle $p \in M$ und $v, w \in T_p M$ gilt:

$$g_p(v, w) = g_{f(p)}(d_p f(v), d_p f(w)).$$

^{*}Zur Interpretation der kosmologischen Konstanten später, vgl. ??. Einstein hat die Gleichung am Anfang auch nur für $\Lambda = 0$ hingeschrieben und hat dann später ein Λ eingeführt, um auch ultrastatische Lösungen, also Raumzeiten der Form $(M = \mathbb{R} \times N, g = -dt^2 + h)$, der Vakuumeinsteingleichungen zu finden, wo (N, h) nicht automatisch Ricci-flach sein muss, vgl. Übungsaufgabe 17.

[†]Triviale Lösung wäre Minkowskiraum mit $T \equiv 0$.

[‡]Genauer: Unser Stern sei ungeladen (sonst gebe es außerhalb des Sterns noch ein elektrisches Feld, was zu einem nicht verschwindenden Energie-Impuls-Tensor führt) – die zugehörige rotationssymmetrische Lösung ist die *Reissner-Nordström Raumzeit*, ??.

[§]Das ist so keine gute Definition, da abhängig von der Wahl des Zeitparameters. Mehr dazu später in ??.

[¶]allgemeine Definition, siehe B.1.1

Wählen wir auf \mathbb{R}^3 Kugelkoordinaten (r, φ, θ) , hat die sphärisch symmetrische Metrik h die Form $h = f_2(r)^2 dr^2 + r^2(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2)$, vgl. Übungsaufgabe 18. Jetzt müssen wir nur noch herausfinden, für welche positiven glatten Funktionen f_1, f_2 die resultierende Lorentzmetrik $-f_1^2(r)dt^2 + h$ Ricci-flach ist. Das ist im Appendix A mittels eines Computeralgebrasystems ausgerechnet. Wir erhalten eine Einparameterfamilie von Lösungen

$$g_{\text{Schw}} = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \underbrace{(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2)}_{=: d\Omega^2} \quad (\text{II.14})$$

in der Menge $\{r_S > r\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Bemerkung II.3.2.

- (i) Der Parameter r_S heißt *Schwarzschildradius*.
- (ii) Für $r_S = 0$ ist g_{Schw} wieder die Minkowskimetrik. Das entspricht dem Fall, in dem es gar keinen Stern gibt. Dann ist die Metrik auf ganz \mathbb{R}^4 definiert.
- (iii) Wenn wir uns später ein Sternenmodell anschauen werden, werden wir sehen, dass r_S dort positiv ist und sich dort aus der (relativistischen) Masse/Energie des Sterns berechnet. Dort ist der Sternradius größer als r_S , vgl. Abschnitt B.
- (iv) Der Parameter r_S in der Schwarzschildlösung kann aber auch negativ sein (oder äquivalent r_S positive aber r negativ). Wir werden später noch etwas zur '(Nicht-)Physikalität' dieser Lösung sagen, vgl. ??.

Eigenzeit versus dem globalem Zeitparameter t . Befinden wir uns bezüglich des Koordinatensystems von Schwarzschild in Ruhe bei Radius r_0 , dann ist unsere Eigenzeit $d\tau^2 = -(1 - \frac{r_S}{r_0})dt^2$. Das heißt insbesondere, dass der globale Zeitparameter für uns nur asymptotisch für große t unserer Eigenzeit entspricht. Für r nahe r_S hingegen ist das Verhältnis $|\frac{d\tau^2}{dt^2}|$ beliebig groß.

Bedeutung von Schwarzschild für unser Sonnensystem. Schwarzschild ist eine gute erste Näherung für die Metrik weg von der Sonne. Zwar ist dort nicht ausschließlich Vakuum, sondern es befinden sich Planeten etc. darin. Allerdings sind diese verglichen zur Sonne sehr sehr klein und man nimmt als Näherung an, dass sie sich als ideale Punktteilchen auf Geodätische in der Hintergrundmetrik (hier Schwarzschild) bewegen und in erster Näherung nicht wechselwirken. Mit diesen Annahmen kann man die Bewegung von Licht/Planeten/Satelliten analysieren. Das führte zu den 'klassischen Tests' der ART, vgl. Abschnitt II.3.4 und folgende.

II.3.1. Geodätengleichung und Erhaltungsgrößen

Wir berechnen die Geodätischen $x(s) := (t(s), r(s), \varphi(s), \theta(s))$ mittels

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \quad \text{mit} \quad L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(x) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

(die Ableitungspunkte stehen für die Ableitung nach s) und erhalten:

$$\begin{aligned} \alpha = 0 \quad (x^0 = t) : \quad & \frac{d}{ds} \left(- \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \dot{t} \right) = 0 \\ & \implies \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \dot{t} = \text{const} =: E, \\ \alpha = 1 \quad (x^1 = r) : \quad & \frac{d}{ds} \left(\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \dot{r} \right) = -\frac{r_S}{2r^2} \dot{t}^2 - \frac{r_S}{2r^2} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-2} \dot{r}^2 + r(\dot{\theta}^2 + \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2), \\ \alpha = 2 \quad (x^2 = \theta) : \quad & \frac{d}{ds} (r^2 \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}^2) = -r^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\varphi}^2, \\ \alpha = 3 \quad (x^3 = \varphi) : \quad & \frac{d}{ds} (r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi}) = 0 \\ & \implies r^2 \cos^2 \theta \dot{\varphi} = \text{const} =: \ell. \end{aligned}$$

II. Allgemeine Relativitätstheorie

Wir betrachten zunächst den Fall $\theta(0) = 0$ und $\dot{\theta}(0) = 0$. Dann löst $\theta \equiv 0$ die Gleichung für $x^2 = \theta$ und beliebiges r .

Da Geodätische immer proportional zur Bogenlänge parametrisiert sind, gilt dann

$$\begin{aligned}\epsilon := \text{const} &= -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \\ &= \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} (\dot{r}^2 - E^2) + r^{-2} \ell^2.\end{aligned}\quad (\text{II.15})$$

Bei uns ist für einen Beobachter immer $\epsilon = -1$, für Licht $\epsilon = 0$ und raumartige Geodätische normieren wir auf $\epsilon = 1$.

Bis jetzt haben wir also 3 Erhaltungsgrößen ℓ , E und ϵ (wobei ϵ nur diskrete Werte annehmen kann). Da in der Eigenzeit τ erhalten, sind diese Erhaltungsgrößen schon durch die Anfangswerte der Geodätischen bestimmt. Das ℓ ist der *Drehimpuls* der Geodätischen, das ϵ entspräche im Newtonschen der *Energieerhaltung*, das E kommt daher, dass die Zeittranslation eine Isometrie ist.

Aus der Gleichung für $x^1 = r$ wird dann

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \left(\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \dot{r} \right) &= -\frac{r_S}{2r^2} \dot{t}^2 - \frac{r_S}{2r^2} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-2} \dot{r}^2 + r \dot{\varphi}^2 = -\frac{r_S}{2r^2} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-2} (E^2 + \dot{r}^2) + \frac{\ell^2}{r^3} \\ 0 &= \ddot{r} + \frac{r_S}{2r^2} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} (E^2 - \dot{r}^2) - \frac{\ell^2}{r^3} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \\ &= \ddot{r} + \frac{r_S}{2r^2} \left(\frac{\ell^2}{r^2} - \epsilon\right) - \frac{\ell^2}{r^3} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)\end{aligned}\quad (\text{II.16})$$

also eine gewöhnliche Differentialgleichung für r in s .

Was ist mit der Annahme $\theta(0) = 0$ und $\dot{\theta}(0) = 0$ von oben? Wegen Rotationsinvarianz der Metrik können wir immer $\theta(0) = 0$ annehmen. Ist dann $\dot{\theta}(0) \neq 0$, ändern wir die Koordinaten der Sphäre mit t drehen, also $\theta \mapsto \theta' = \theta - t \frac{\dot{\theta}(0)}{t(0)}$, und erhalten so $\dot{\theta}'(0) = 0$ und $\theta'(0) = 0$.

II.3.2. Qualitatives Verhalten der Geodätischen

Auch wenn die Geodätischen durch die obigen Differentialgleichungen vollständig bestimmt sind, können wir diese i.A. nicht explizit lösen. Um aber ein Verständnis vom Schwarzschildraum zu erzielen, ist es hilfreich sich das qualitative Verhalten der Geodäten anzuschauen. Das ist im Allgemeinen schwierig. Durch die verschiedenen Erhaltungsgrößen in Schwarzschild konnten wir aber schon im letzten Abschnitt alles auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduzieren, deren Lösungen man qualitativ leicht analysieren kann.

Gegebene Anfangswerte ($t_0, r_0, \varphi_0 = 0, \theta_0 = 0, \dot{t}(0), \dot{r}(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0) = 0$) bestimmen ϵ , E und ℓ . Wir schauen uns (II.15) an

$$E^2 = \dot{r}^2 + \underbrace{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \left(\frac{\ell^2}{r^2} - \epsilon\right)}_{=: 2V_{\text{eff}}(r)}.\quad (\text{II.17})$$

Hier ist $V_{\text{eff}}(r)$ das effektive Potential, da erneutes Ableiten dieser Gleichung nach s , ergibt $\ddot{r} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}$, vgl. Newton/Übungsaufgabe 1.*

Damit erhalten wir direkt eine Ungleichung für r in Abhängigkeit von E , ℓ , (und r_S), dass $E^2 \geq \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \left(\frac{\ell^2}{r^2} - \epsilon\right)$ gilt.

*An effektiven Potentialen lassen sich leicht qualitativ die möglichen Bewegungen ablesen: Gelte für die Bahn irgendwo $\dot{r} = 0$, sagen wir bei $r = r_0$. Dann ist dort $E^2 = 2V_{\text{eff}}(r_0)$. Da E eine Erhaltungsgröße ist, muss sich die gesamte Bewegung auf Radien mit $V_{\text{eff}}(r) \leq E^2/2$ abspielen. Aus der Stetigkeit der Radiuskoordinate und der Tatsache, dass sich die Monotonie der r -Koordinate, nur in Punkten mit $\dot{r} = 0$, und damit in Punkten mit $E^2 = 2V_{\text{eff}}(r)$, ändern kann, folgt das qualitative Verhalten.

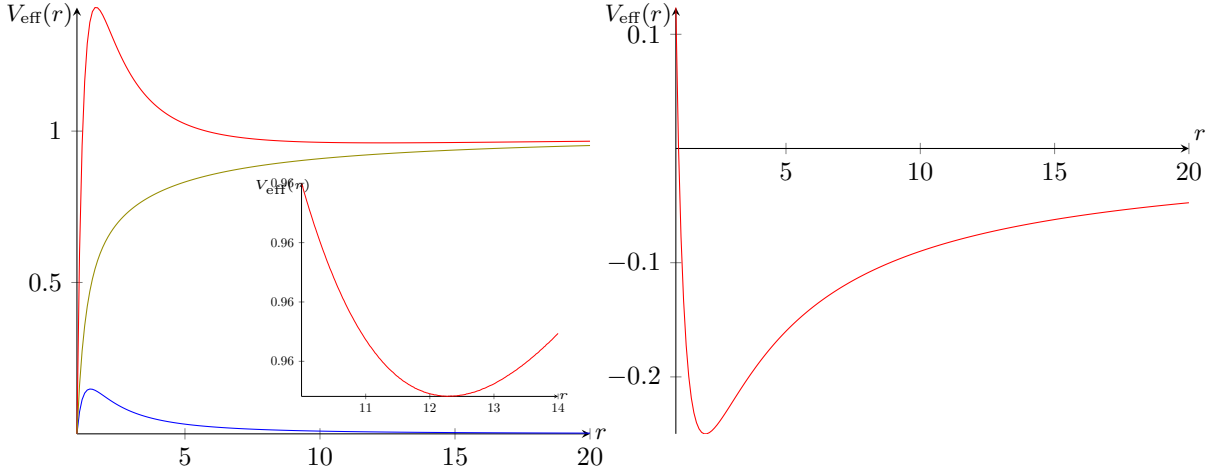


Abb. II.1.: Links: V_{eff} in blau für Licht mit $\ell^2 > 0$, in olive für Testteilchen mit kleinem $\ell^2 \leq 3r_S^2$ (Die r -Achse startet bei r_S – hier im Bild $r_S = 1$), in rot für Testteilchen mit $\ell^2 \geq 3r_S^2$ (hat ein Maximum und ein Minimum). Da man das Minimum nicht so gut sieht, ist dieser Ausschnitt der roten Kurve noch mal in kleinerem Diagramm dargestellt. Rechts: V_{eff} für Testteilchen in Newton mit $\ell^2 > 0$.

Als erstes schauen wir, ob wir gebundene Zustände haben können, d.h. Geodäten, die für alle s in einem Annulus $[a, b] \subseteq (r_S, \infty)$ bleiben: Für gebundene Zustände muss entweder $\dot{r} \equiv 0$ sein (ein Kreisorbit) oder es mindestens zwei Punkte $r_0 = a$ und $r_0 = b$ mit $\dot{r} = 0$ geben. In solchen Punkten ist dann $E^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \left(\frac{\ell^2}{r^2} - \epsilon\right)$.

- Für Licht, $\epsilon = 0$, ist dann $V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \frac{\ell^2}{r^2}$. Das Maximum ist bei $r = \frac{3}{2}r_S$. D.h. damit es a und b wie oben mit $a < b$ gibt, muss $b > \frac{3}{2}r_S$ sein. Wegen $\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr} = \frac{-2\ell^2}{r^3} + \frac{3r_S\ell^2}{r^4} = \frac{\ell^2}{r^3} \left(\frac{3r_S}{r} - 2\right)$ ist in b dann $\ddot{r} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}(b) > 0$. D.h. das Licht bewegt sich von a weg.

Ist $a = b = \frac{3}{2}r_S$, dann befindet sich das Licht auf einer Kreisbahn, die allerdings, da das Potential dort ein Maximum hat, *instabil** ist. Diese räumliche Kugel mit $r = \frac{3}{2}r_S$ heißt *Photonensphäre*.[†] Ist Licht einmal tangential zu dieser Sphäre, bleibt es für alle Zeiten darauf.

Diese Diskussion zeigt auch, dass es keine stabilen gebundenen Zustände für Licht gibt.

- Für Testteilchen, $\epsilon = -1$, ist $V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \left(\frac{\ell^2}{r^2} + 1\right)$ und $\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr} = \frac{\ell^2}{r^3} \left(\frac{3r_S}{r} - 2\right) + \frac{r_S}{r^2}$.
 - Kreisorbiten von Testteilchen: $r = \text{const} = r_0$, $\ddot{r} \equiv 0$, also $0 = \frac{dV_{\text{eff}}}{dr}(r_0) = \frac{\ell^2}{r_0^3} \left(\frac{3r_S}{r_0} - 2\right) + \frac{r_S}{r_0^2}$. Dann ist $r_0 = r_{\pm} := \frac{\ell^2}{r_S} \pm \ell \sqrt{\frac{\ell^2}{r_S^2} - 3}$ und $E^2 = V_{\text{eff}}(r_0)$. Für r_- befinden wir uns im Maximum von V_{eff} – diese Lösung ist instabil. Für r_+ sind wir im Minimum und haben einen stabilen Kreisorbit mit $E^2 < 1$ und $\ell^2 > 3r_S^2$. Das heißt für $r_0 \leq 3r_S$ gibt es keine stabilen Kreisorbiten.
 - Allgemeine Bahnen: Für kleine ℓ ist $V_{\text{eff}}(r)$ monoton steigend – keine gebundenen Zustände. Erst für $\ell^2 \geq 3r_S^2$ hat $\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr}$ mindestens eine Nullstelle, wie bei den Kreisorbiten. Damit gibt es für $\ell^2 \geq 3r_S^2$ und $\min V_{\text{eff}} < E^2 < \min\{1, \max V_{\text{eff}}(r)\}$ gebundene Zustände.

Man kann analog zu oben nachrechnen, dass es für $a \leq 2r_S$ keine stabilen Orbits gibt.

* Eine Lösung ist *stabil*, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass auch für genügend kleine Änderungen der Anfangswerte die neuen Lösungen immer im Abstand höchstens c der Ausgangslösung bleiben. Nicht stabile Lösungen heißen *instabil*.

† Für Sterne ist der Sternradius um Größenordnungen über seinem Schwarzschildradius, vgl. ???. D.h. für Sterne (Sonne, Planeten) tritt dieser Effekt nicht auf, da unser Ansatz für die Metrik nur außerhalb des Sterns galt.

II. Allgemeine Relativitätstheorie

Was ist anders als bei Newton? Bei Newton gibt es für Testteilchen für alle $\ell^2 > 0$ gebundene Zustände und die gebundenen (stabilen) Zustände können beliebig kleine Radien haben. Das liegt daran, dass das Potential $V_{\text{eff}}^{\text{Newton}}(r) = \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M}{r}$, vgl. Übungsaufgabe 1, immer die Form rechts in Abbildung II.1 hat, und das Minimum $r = \frac{M}{\ell}$ für $\ell \rightarrow \infty$ beliebig nahe an $r = 0$ sein kann.

Spur der Geodätischen

Im Deutschen macht man (im Gegensatz zum Englischen) oft die Unterscheidung von Geodäten und Geodätischen. Geodätische sind Lösungen der Geodätengleichung und damit parametrisierte Kurven auf der Mannigfaltigkeit. *Geodäten* sind die Spuren der Geodätischen. Die Geodätengleichung hatten wir für die Schwarzschildmetrik schon berechnet. Nun wollen wir die Spuren untersuchen.

Dazu betrachten wir r als Funktion von φ : $r(\varphi) = r(s(\varphi))$. Damit ergibt sich (Hier ist ' Differentiation nach φ):

$$\dot{r} = r' \dot{\varphi} = r' \frac{\ell}{r^2}.$$

Einsetzen in (II.15) ergibt

$$\epsilon = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\ell^2}{r^4} r'^2 - E^2\right) + \frac{\ell^2}{r^2} \text{ und damit } r'^2 = r^4 \left(\frac{E^2}{\ell^2} - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\epsilon}{\ell^2}\right)\right). \quad (\text{II.18})$$

Oft ist es geschickter $u = \frac{r_S}{r}$ zu betrachten und $\lambda = \frac{\ell}{r_S}$ zu setzen (Dann sind u und λ beides dimensionslose Größen, und für gebundene Testteilchen ist dann $\lambda^2 \geq 3$). Wegen $u' = -\frac{u^2}{r_S} r'$ folgt

$$u'^2 = \frac{E^2}{\lambda^2} - \underbrace{(1-u)(u^2 - \frac{\epsilon}{\lambda^2})}_{=: 2W_{\text{eff}}(u)}. \quad (\text{II.19})$$

($W_{\text{eff}}(u)$ steht natürlich in Beziehung zu $V_{\text{eff}}(r)$. Aber es ist nicht einfach das gleiche, da in u'' neben r'' auch erste Ableitungen wieder vorkommen.)

Da u' i.A. das Vorzeichen wechselt, ist es für das Zeichnen der Kurven besser die Gleichung für die zweite Ableitung

$$u'' = -\frac{dW_{\text{eff}}}{du} = \frac{3}{2}u^2 - u - \frac{\epsilon}{2\lambda^2}. \quad (\text{II.20})$$

zu benutzen, vgl. Abbildung II.2.

II.3.3. Newtonsch im Limes?

Vorl. 10 Für Testteilchen ($\epsilon = -1$) hatten wir im letzten Abschnitt als Gleichung für die Spur $r = r(\varphi)$

$$u'' = \frac{3}{2}u^2 - u + \frac{1}{2\lambda^2} \text{ mit } u = \frac{r_S}{r} \text{ und } \lambda = \frac{\ell}{r_S}.$$

Im Limes $r \rightarrow \infty$ ist u klein, d.h. u dominiert u^2 . Die Vermutung ist dann, dass für große r wir dann nahe an Lösungen von

$$u'' + u - \frac{r_S^2}{2\ell^2} = 0.$$

Dies ist Gleichung (I.2) für die Spuren der Bahnen in der Newtonschen Gravitation (Achtung: dort für $u = 1/r$ und $M = 2r_S$). Die Frage ist jetzt natürlich in welchem Sinne ist diese Vermutung richtig? Das klingt wie ein Perturbationsproblem, jedoch müssen wir entscheiden, was der Parameter sein soll. Da u klein sein soll, betrachten wir einen Parameter δ im Anfangswert $u(0) = \delta u_0$. Nun zur Anfangsgeschwindigkeit: Diese sollten wir nicht beliebig wählen, da wir Aussagen über die Bahn für möglichst große Zeiten machen wollen und deshalb verhindern müssen, dass die Radiuskoordinate der Bahn zu klein (also u zu groß wird). Deshalb wählen wir $\dot{u}(0) = 0$.

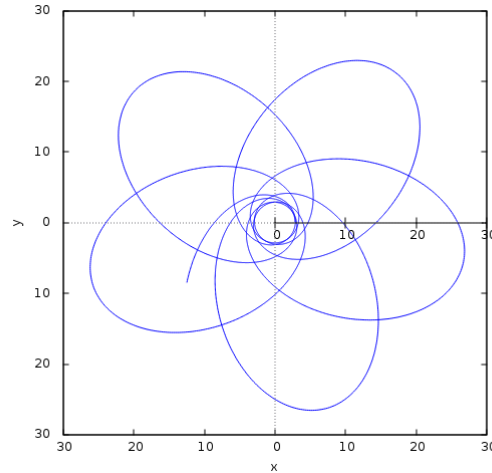


Abb. II.2.: Spur einer gebundenen zeitartigen Geodäte in der (r, φ) -Ebene, Plot mit Maxima

```
sol: rk([w, (3./2.)*u**2-u+0.125], [u,w], [.35,0.], [t,0,54,0.01])$
plot2d ([discrete, makelist([p[1],1./p[2]],p,sol)], [gnuplot_preamble,
"set polar"], [yx_ratio,1], [xlabel,"x"], [ylabel,"y"]);
```

Die erste Zeile löst (II.20) numerisch (rk=Runge-Kutta Verfahren) als erstes Ordnungssystem ($w = u'$ ist die neue Variable; $[u, w]$ bedeutet, dass u und w die gesuchten Variablen sind; $[w, (3./2.)*u**2-u+0.125]$ bestimmt die zu lösenden Gleichungen hier $u' = w$ und $w' = \frac{3}{2}u^2 - u + 0.125$ mit $0.125 = 0.5\lambda^{-2}$; $[.35, 0.]$ sind die gewählten Anfangswerte für $[u, w]$ und $[t, 0, 54, 0.01]$ bedeutet, dass $u = u(t)$ und $w = w(t)$ ist (bei uns $t \rightsquigarrow \varphi$, $t \in [0, 54]$ ist, und in diskreten Schritten der Länge 0.01 gearbeitet wird. Das Ergebnis des Runge-Kutta-Verfahren wird als Liste in `sol` gespeichert. Diese Liste besteht aus Tripeln der Form $[t, u(t), w(t)]$.

Das `$` am Ende der ersten Zeile verhindert nur, dass die ganze Liste ausgegeben wird. Wollen Sie diese sehen, ersetzen Sie `$` durch ein Semikolon.

Die zweite Zeile zeichnet (`plot2d`). Um $r = \frac{1}{u}$ (r_S sei 1) als Funktion von φ (hier t) zu plotten, braucht man eine Liste deren Einträge Paare der Form $(\varphi, r(\varphi))$ sind (`makelist([p[1],1./p[2]],p,sol)` – diese Liste wird aus der Liste `sol` erzeugt: Ein Element der Liste `sol` heiÙe `p`. Dann ist `[p[1],1./p[2]]` das gesuchte Paar $(\varphi, r(\varphi))$ aus dem Listeneintrag `p` von `sol`.)

Es bleibt noch mit `[gnuplot_preamble,"set polar"]` dem Plotprogramm zu sagen, dass es einen 'Polarplot' machen soll, d.h. φ und r Winkel und Radius (und nicht x und y) Koordinaten sind.

II. Allgemeine Relativitätstheorie

D.h. wir betrachten

$$u'' = \frac{3}{2}u^2 - u + \frac{r_S^2}{2\ell^2} \text{ mit } u(0) = \delta u_0, u'(0) = 0.$$

Wir setzen $\tilde{u} = \delta^{-1}u$. Dann ist $\tilde{u}'' = \delta\frac{3}{2}\tilde{u}^2 - \tilde{u} + \frac{r_S^2}{\delta\ell^2}$ mit $\tilde{u}(0) = u_0$ und $\tilde{u}'(0) = 0$. Allerdings war $\ell = r_0^2\dot{\varphi}_0$, d.h. auch ℓ sollten wir mit der Skalierung von u irgendwie skalieren. Am einfachsten finden wir die Skalierung von ℓ , wenn wir schauen, was bzgl. der Newtonschen Gleichung $u'' + u - \frac{r_S^2}{2\ell^2} = 0$ passiert. Sei u_{N,ℓ,u_0} eine Lösung dieser Gleichung zum Drehimpuls ℓ und obigen Anfangswerten $u(0) = u_0$ und $u'(0) = 0$. Setzen wir $\tilde{\ell} = \delta^{-\frac{1}{2}}\ell$, dann ist $u_{N,\ell,u_0} = \delta u_{N,\tilde{\ell},\delta u_0}$.

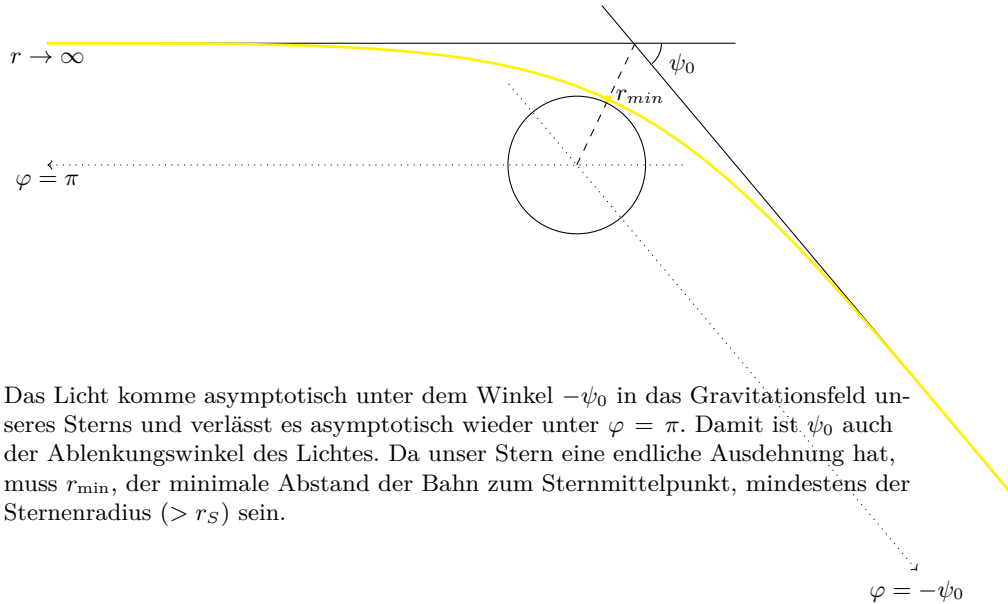
Damit haben wir

$$\tilde{u}'' = \delta\frac{3}{2}\tilde{u}^2 - \tilde{u} + \frac{r_S^2}{2\tilde{\ell}^2} \text{ mit } \tilde{u}(0) = u_0, \tilde{u}'(0) = 0.$$

Standardtheorie der gewöhnlichen Differentialgleichung gibt uns eine stetige Abhängigkeit der Lösung vom Parameter δ : Für alle $s_0 > 0$ und $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta_0 > 0$, so dass $|\tilde{u}(s) - u_{N,\tilde{\ell},u_0}(s)| < \epsilon$ für alle $|s| < s_0$. Also $\tilde{u} = u_{N,\tilde{\ell},u_0} + v$ und damit $u = u_{N,\ell,\delta u_0} + \delta v$.

Insbesondere haben wir so auch gesehen, dass $2r_S$ die Rolle der Masse im Newtonschen hat.

II.3.4. Lichtablenkung



Das Licht komme asymptotisch unter dem Winkel $-\psi_0$ in das Gravitationsfeld unseres Sterns und verlässt es asymptotisch wieder unter $\varphi = \pi$. Damit ist ψ_0 auch der Ablenkungswinkel des Lichtes. Da unser Stern eine endliche Ausdehnung hat, muss r_{\min} , der minimale Abstand der Bahn zum Sternmittelpunkt, mindestens der Sternradius ($> r_S$) sein.

Ziel ist es den (räumlichen Verlauf) des Lichtes, also $r(\varphi)$ zu finden, für einen Lichtstrahl der gerade so die Sonne passiert, also für den r_{\min} gleich dem Sonnenradius ist, und damit ψ_0 zu bestimmen: Dazu verwenden wir (II.18), was uns integriert (mit $\epsilon = 0$)

$$\varphi(r) - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{\ell}{y^2} \frac{1}{\sqrt{E^2 - (1 - \frac{r_S}{y}) \frac{\ell^2}{y^2}}} dy$$

liefert. Im Punkt nächsten Abstand zum Stern seien unsere Anfangswerte gegeben, d.h. $r_0 = r_{\min}$, $\dot{r}(0) = 0$, $\varphi_0 = \frac{\pi - \psi_0}{2}$. Dann ist wegen (II.17) $\frac{E^2}{\ell^2} = (1 - \frac{r_S}{r_{\min}}) \frac{1}{r_{\min}^2}$. Mit $\varphi(r) \rightarrow \pi$ für $r \rightarrow \infty$ folgt

$$\frac{\pi + \psi_0}{2} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{r_S}{r_{\min}}) \frac{1}{r_{\min}^2} - (1 - \frac{r_S}{r}) \frac{1}{r^2}}} dr.$$

Wir arbeiten mit den dimensionslosen Größen $a := \frac{r_s}{r_{\min}}$ und $x := \frac{r_{\min}}{r}$ und erhalten

$$\frac{\pi + \psi_0}{2} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - a - x^2 + ax^3}} dx.$$

Damit haben wir ψ_0 durch ein elliptisches Integral* vollständig bestimmt. Um eine Näherungslösung für ψ_0 zu erhalten, verwenden wir, dass i.A. (z.B. bei der Sonne) der Sternradius \gg Schwarzschildradius des Sterns und damit a klein ist. Also ist $\psi_0 \sim \frac{2r_s}{r_{\min}}$. Deshalb entwickeln wir in a :

$$\begin{aligned} \frac{\pi + \psi_0}{2} &\stackrel{x = \frac{r_{\min}}{r}}{=} \int_0^1 \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1 - a - x^2 + ax^3}}_{=(x-1)(ax^2 + (a-1)x + a-1)}} dx \\ &\stackrel{= a(x-x_0)(x-x_1) =: -f(a)}{=} \text{entwickeln in } a \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} + a \frac{x^2+x+1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} a^2 f''(\xi_a) \right) dx \end{aligned}$$

mit $f''(\xi_a) = \frac{3}{4} \frac{(x^2+x+1)^2}{(-\xi_a x^2 - (\xi_a - 1)x + 1 - \xi_a)^{\frac{5}{2}}}$ mit $\xi_a = \xi_a(x) \in [0, a]$. Da der Nenner von f'' für $x, \xi_a \in [0, 1]$ keine Nullstellen hat, gilt $|f''(\xi_a)| \leq C$, und wir haben

$$\begin{aligned} \frac{\pi + \psi_0}{2} &= \frac{\pi}{2} + a \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{x^2+x+1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} dx + O(a^2) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{a}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(x + \frac{1}{1+x} \right) dx + O(a^2) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{a}{2} \left(-\sqrt{1-x^2} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \Big|_0^1 + O(a^2) \\ &= \frac{\pi + 2a}{2} + O(a^2). \end{aligned}$$

Für die Sonne ist der Sonnenradius (695 700 km) viel größer als der Schwarzschildradius der Sonne ($r_s = 2.95$ km). Unter Verwendung der Daten für die Sonne ergibt sich (unter Verwendung der richtigen Naturkonstanten (wir haben in unserer Schwarzschildmetrik z.B. die Lichtgeschwindigkeit auf 1 gesetzt)) für Licht, welches nahe an unserer Sonne vorbeigeht, eine Ablenkung um $\sim 1,75$ Bogensekunden (Zum Vergleich: Der scheinbare Monddurchmesser ist 31 Bogenminuten).

Schon in der Newtonschen Theorie haben Henry Cavendish (1784) und Johann Georg von Soldner (1804) vorausgesagt, dass es in der Newtonschen Gravitation auch schon die Ablenkung von Licht nahe massiver Objekte gibt. Das klingt erst einmal seltsam, da Licht selbst keine Masse hat und deshalb die Gravitation darauf nicht wirken sollte. Aber Licht hat einen Impuls und man kann alternativ diesen benutzen um Licht eine 'Masse' zuzuordnen und damit zu rechnen. Da das Äquivalenzprinzip aber sowieso sagt, dass die Bewegung unabhängig von der Masse des Testkörpers ist (solange er eine hat), ist auch egal, welchen Wert man der Masse gibt. Man muss nur einmal mit der Annahme reingehen, dass auch in der Newtonschen Gravitation, Licht gravitativ beeinflusst wird. Die Werte, die man mit diesem Ansatz für Lichtablenkung nahe der Sonne erhält sind wohl nur ungefähr die Hälfte vom korrektem Wert.

II.3.5. Planetenbewegung und Periheldrehung

Für die Planetenbewegung interessieren wir uns für die Spur der zeitartigen gebundenen Geodäten, also $\epsilon = -1$. Da es gebundene Zustände werden sollen, können wir $\dot{r}_0 = 0$ wählen. Dann ist $E^2 = (1 - \frac{r_s}{r_0})(\frac{\ell^2}{r_0^2} + 1)$ und damit $\frac{E^2}{\ell^2} = (1 - u_0)(\frac{1}{\ell^2} + \frac{u_0^2}{r_s^2})$, vgl. Abschnitt II.3.2.

*https://de.wikipedia.org/wiki/Elliptisches_Integral

II. Allgemeine Relativitätstheorie

Wir starten bei (II.19)

$$u'^2 = \underbrace{\frac{E^2}{\lambda^2} - (1-u)(u^2 + \frac{1}{\lambda^2})}_{=:P(u)}$$

mit $\lambda^2 = \frac{\ell^2}{r_S^2} \geq 3$ und $E^2 < 1$ (da gebundener Zustand) und damit $\varphi(r) - \varphi_0 = \int_{u_0}^{r_S/r} \frac{du}{\sqrt{P(u)}}$ mit $P(u)$ ein Polynom dritten Grades. Wir skizzieren hier nur das Vorgehen, für Details vgl. Übungsaufgabe 19:

- Man zeigt, dass $P(u)$ drei reelle Nullstellen $0 < u_1 < u_2 < u_3$ haben muss und sich der Planet zwischen $[u_1, u_2]$ bewegt. Dadurch kann man das elliptische Integral auf Standardform reduzieren.
- Wir suchen die Differenz in φ , wenn der Planet in $r_1 = \frac{r_S}{u_1}$ startet, einmal über $r_2 = \frac{r_S}{u_2}$ geht und wieder zu r_1 zurückkehrt, also

$$\varphi = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{P(u)}}.$$

Wäre die Bahn eine Ellipse, müsste dort 2π rauskommen. Hier wird der Wert größer sein, die Differenz zu 2π nennt man *Periheldrehung* bzw. *Präzession des Perihels*^{*}. Weil wir zwischen zwei Nullstellen integrieren erhalten wir hier ein vollständiges elliptisches Integral erster Art: $\varphi = 2\mu K(m)$, wobei μ und m von den Nullstellen und damit von E und λ abhängen.[†]

- Wollen wir nun einen Näherungswert für Planeten enthalten, müssen wir geeignet entwickeln. Es ist $\ell = r^2 \dot{\varphi}$ mit $r \gg r_S$. Der Merkur hat eine Umlaufzeit um die Sonne von $T = 88$ Tagen bei einem durchschnittlichen Abstand zur Sonne von $58 \cdot 10^9 \text{ km}$. (Ich muss die Zahlenwerte noch mal checken). Größenordnung ist also $\dot{\varphi} \sim \frac{2\pi}{88 \cdot 86000 \text{ s}} \sim 10^{-7} \frac{1}{\text{s}}$ und damit $\ell \sim 3 \cdot 10^{20} \cdot 10^6 \text{ m}^2 10^{-7} \frac{1}{\text{s}} \sim 3 \cdot 10^{19} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$. Also $\frac{\ell}{r_S} \sim 10^{16} \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Dann ist $\lambda = \frac{\ell}{r_S c} \sim \frac{1}{3} \cdot 10^8$ (da in der Realität $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \neq 1$ ist). Also ist $\frac{1}{\lambda}$ sehr klein. Es scheint also sinnvoll zu sein $2\mu K(m)$ in $\frac{1}{\lambda}$ zu entwickeln: $\varphi = 2\pi + \varphi_{\text{per}} \lambda^{-1} + O(\lambda^{-2})$. Hier ist φ_{per} die Differenz nach einer Umdrehung. Beim Entwickeln muss man beachten, dass E nicht völlig unabhängig von λ ist. Für einen gebundenen Zustand muss $\min V_{\text{eff}}(r) \leq E \leq \min\{1, \max V_{\text{eff}}(r)\}$ und $V_{\text{eff}}(r)$ hängt von λ . Man kann zeigen, dass $E \rightarrow 1$ für $\lambda \rightarrow 0$ geht. Insbesondere sagt uns das, dass wir auch E in λ^{-1} entwickeln sollten.

Im Allgemeinen wird die Periheldrehung als Bogensekunden pro Jahrhundert angegeben, also $\varphi_{\text{per}} \cdot (\text{Anzahl der Umdrehungen pro Jahrhundert}) = \varphi_{\text{per}} \cdot \frac{1}{\text{Umlaufzeit in Jahrhunderten}}$.

Der dominierende Effekt für die Periheldrehung unseres Sonnensystems, ist allerdings der 'störende' Einfluss der anderen Planeten (Hier die Zahlenwerte für den Merkur[‡]):

^{*}Perihel = sonnennächster Punkt

[†]Das ist im gleichen Sinne dann ein expliziter Ausdruck für die Periheldrehung, wie $\arcsin \mu$ ein expliziter Ausdruck wäre.

[‡]aus https://en.wikipedia.org/wiki/Tests_of_general_relativity#Classical_tests übernommen

Effekt	Voraussage in Bogensek./Jahrh.	
Newton (nur Merkur und Sonne)	0	reines Zweikörperproblem, exakt lösbar, vgl. Bem I.1.2 und Aufgabe 1.
Newton (Sonne/mehrere Planeten)	532	Ansatz: Summe gravitat. Pot. zw. je zwei Körpern*, nicht exakt lösbar, Störungstheorie
Schwarzschild (Merkur/Sonne)	43	wie oben
Lense-Thirring Effekt	-0.0020	Differenz zum Schwarzschildeffekt für einen rotierenden Stern
Quadrupolmoment der Sonne	0.0286	
ges. Voraussage [†] beobachtet	575 574.10 ± 0.65	

II.3.6. $r = r_S$ - eine echte Singularität? Nein!

In $r \rightarrow r_S > 0$ explodiert der Koeffizient vor dr^2 in der Metrikdarstellung (II.14). Wir wollen nun sehen, was das bedeutet. Dazu schauen wir uns zwei einfache Beispiele an, wo dieser Effekt auch auftritt, aber verschiedene 'Gründe' hat.

Vorl. 11

Beispiel II.3.3. Betrachten wir $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x \neq 0\}$ mit der Metrik $g = -\frac{1}{x^4} dx^2 + dy^2$. Es explodiert der Koeffizient vor dx^2 für $x \rightarrow 0$. Führen wir neue Koordinaten ein: $\tilde{x} = \frac{1}{x}$. Dann ist $g = -d\tilde{x}^2 + dy^2$ für $\tilde{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hier sehen wir, dass diese Metrik auf $\tilde{x} = 0$ auch wohldefiniert ist. Das bedeutet, dass $x \rightarrow 0$, was ursprünglich wie eine Art Singularität aussah, in Wirklichkeit das 'Unendliche' der Mannigfaltigkeit war – also einen Bereich den eine zeitartige/raumartige Kurve nicht in endlicher Eigenzeit erreichen kann.‡ Auf der anderen Seite sehen wir, dass $x \rightarrow \infty$ in endlicher Eigenzeit erreicht wird. Solche Singularitäten, die in endlicher Länge (durch nicht lichtartige Kurven) erreicht werden, aber für die es ein anderes Koordinatensystem gibt, in dem wir die Metrik dahin erweitern können, nennen wir *Koordinatensingularitäten*.

Andererseits gibt es Metriken, wo für, sagen wir, $x \rightarrow 0$ die Skalarkrümmung explodiert aber es zeitartige Kurven gibt, die $x = 0$ in endlicher Eigenzeit erreichen. Dann kann es kein anderes Koordinatensystem geben, in dem man die Metrik auf $x = 0$ erweitern kann, da die Skalarkrümmung unabhängig vom gewählten Koordinatensystem ist.

Eine solche Singularität, in dem ein Krümmungsskalar explodiert, nennt man *gravitative Singularität*. Ein *Krümmungsskalar* ist eine reellwertige glatte Funktion, die koordinateninvariant aus dem Krümmungstensor gewonnen wird und die Dimension m^2 hat. Das ist z.B. die Skalarkrümmung, $|\text{Ric}|_g^2 = g(\text{Ric}, \text{Ric}) = g^{\alpha_1 \alpha_2} g^{\beta_1 \beta_2} \text{Ric}_{\alpha_1 \beta_1} \text{Ric}_{\alpha_2 \beta_2}$, vgl (II.9), und der *Kretschmann-Skalar*

$$|R|_g^2 = g^{\alpha_1 \alpha_2} g^{\beta_1 \beta_2} g^{\gamma_1 \gamma_2} g_{\delta_1 \delta_2} R_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1}^{\delta_1} R_{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2}^{\delta_2}$$

§
¶
‡

II. Allgemeine Relativitätstheorie

Im Allgemeinen ist es schwierig eine Singularität zu erkennen bzw. ihre Art zu bestimmen – nur weil kein Krümmungsskalar explodiert, muss es noch lange keine Koordinatensingularität sein. Wir werden noch allgemeiner zu Singularitäten in allgemeinen Raumzeiten kommen, vgl. Abschnitt II.6. Aber hier werden wir erst einmal direkt Schwarzschild untersuchen:

Man kann nachrechnen, dass ein Beobachter, der sich auf $r = r_S$ hinbewegt, diesen Wert in endlicher Zeit erreicht (Übungsaufgabe 21). Andererseits ist der Kretschmannskalar gleich $\frac{12r_S^2}{r^6}$. Es scheint also keine gravitative Singularität zu sein (aber theoretisch könnten noch andere Krümmungsskalare explodieren). Wir werden jedoch sehen, dass es eine Koordinatensingularität ist.

Es gibt keinen immer funktionierenden Algorithmus Koordinatensingularitäten zu erkennen. Aber 'oft' funktioniert es, als Ansatz eine Familie von Geodätischen zu betrachten, die gegen die Singularität streben, und dann den Parameter der Geodätischen als neuen Parameter zu nehmen:

Nehmen wir für Schwarzschild lichtartige Geodäten mit φ und θ konstant, dann gilt $0 = -(1 - \frac{r_S}{r})\dot{t}^2 + (1 - \frac{r_S}{r})^{-1}\dot{r}^2$. Betrachten wir t als Funktion von r ,* dann haben wir

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-2}$$

und damit

$$t(r) = \pm \underbrace{\left(r + r_S \ln \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right| \right)}_{=: r_*} + \text{konst.}, \quad (\text{II.21})$$

wobei r_* die 'Reege-Wheeler Schildkrötenkoordinate'[†] genannt wird. Benutzen wir $(v := t + r_*, r, \varphi, \theta)$ als neue Koordinaten – die *Eddington-Finkelstein-Koordinaten*.

Mit $dr_* = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr$ und $dv = dt + dr_*$ erhalten wir

$$g_{\text{Schw}} = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dv^2 + (dr \otimes dv + dv \otimes dr) + r^2 d\Omega^2.$$

Für $(t, r) \in \mathbb{R} \times (r_S, \infty)$ haben wir $(v, r) \in \mathbb{R} \times (r_S, \infty)$. Aber in $r = r_S$ ist die Metrik nicht mehr entartet. Wir sehen also so schon, dass $r = r_S$ nur eine Koordinatensingularität ist, und wir die Metrik darauf fortsetzen können. Allerdings ist die Metrik sogar auf $r \in (0, \infty)$ nicht entartet.

Allerdings ist unsere Schwarzschildmetrik in den Schwarzschildkoordinaten nicht nur für $r \in (r_S, \infty)$ – der *Schwarzschildaußenraum* – wohldefiniert sondern auch für $r \in (0, r_S)$ – der *Schwarzschildinnenraum* – eine rotationssymmetrische Ricci-flache Lösung der Einsteinvakuumgleichung. Unsere obige Transformation ist auch für $r \in (0, r_S)$ definiert. Deshalb sind die $(v, r) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ Koordinaten für den gesamten Schwarzschildraum.

Da ein Beobachter $r = 0$ in endlicher Zeit erreichen kann, vgl. Übungsaufgabe 21, dabei aber der Kretschmannskalar explodiert, sehen wir, dass $r = 0$ eine gravitative Singularität ist.

Kann man die Lösung auch noch darüber hinaus erweitern? Starten wir wieder bei den Schwarzschildkoordinaten und definieren wir Lichtkegelkoordinaten $u = t - r_*$ und $v = t + r_*$. Dann ist

$$g_{\text{Schw}} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) (du \otimes dv + dv \otimes du) + r^2 d\Omega^2 = -\frac{r_S}{r} e^{\frac{v-u-2r}{2r_S}} (du \otimes dv + dv \otimes du) + r^2 d\Omega^2,$$

wobei $r = r(u, v)$ mittels $r_* = \frac{v-u}{2}$ implizit bestimmt ist. Wir machen eine weitere Koordinatentransformation $T = \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{u}{2r_S}} + e^{\frac{v}{2r_S}}\right)$ und $X = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{v}{2r_S}} - e^{-\frac{u}{2r_S}}\right)$. Dann ist

$$g_{\text{Schw}} = \frac{4r_S^3}{r} e^{-\frac{r}{r_S}} (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2.$$

*Das muss nicht bei jeder Geodätischen global möglich sein.

†Lösen Sie Übungsaufgabe 21, um zu sehen warum.

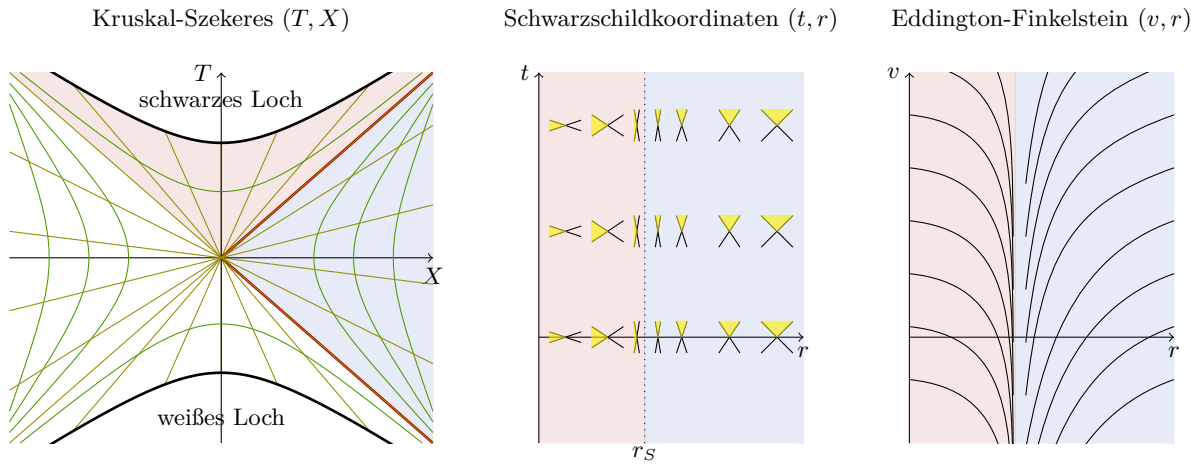


Abb. II.3.: In allen drei Koordinatensystemen ist der Schwarzschildaußenraum blau unterlegt und der Schwarzschildinnenraum rot. Die Kurven in den Eddington-Finkelstein Koordinaten sind Kurven mit $t = \text{konst}$. In den Kruskal-Szekeres Koordinaten sind die grünen Kurven $r = \text{konst}$ Kurven (Nur die $r = r_S$ -Kurve ist in rot und die $r = 0$ Kurve sind die Hyperbeln oben und unten.) Die olivenen Kurven sind die $t = \text{konst}$ -Kurven.

In Schwarzschildkoordinaten sind Lichtkegel abgebildet, der zukunftsgerichtete innere Teil ist gelb. Die lichtartigen Vektoren (a, b) im Punkt (t, r) erfüllen $-a^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) + b^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} = 0$, also Geraden mit Anstieg $\pm \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}$, d.h. für $r \rightarrow \infty$ gehen die Anstiege gegen ± 1 . Für $r \rightarrow r_S \pm 0$ degenerieren die Lichtkegel zur t -Achse - allerdings ist nun für $r < r_S$, ∂_t raumartig und ∂_r zeitartig! Für $r \rightarrow 0$ gehen die Anstiege gegen Null.

Hier wird der Schwarzschildraum (t, r) auf den roten und blauen Bereich im rechten Teil der Abbildung II.3 abgebildet. Wir sehen hier auch, dass die Metrik auf den gesamten Bereich im Bild (solange $r \neq 0$) erweitert werden kann. Auch dort erfüllt sie noch $\text{Ric} = 0$, denn der weiße Bereich ist isometrisch zu Schwarzschild mittels $X \mapsto -X, T \mapsto -T$.

Diese Erweiterung ist nun *maximal* im Sinne, dass es keine zusammenhängende vierdimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit (\tilde{M}, \tilde{g}) mit $M \subsetneq \tilde{M}$ und $\tilde{g}|_M = g$ gibt. Dazu muss man sich überlegen, dass die einzigen zeit- oder raumartigen Geodätischen $\gamma: [0, a) \rightarrow M$, die nicht in einer kompakten Teilmenge enthalten sind, an die obere oder untere Hyperbel (also $r = 0$) streben, wo der Kretschmannskalar explodiert.

Wir sehen auch, dass $\frac{\partial}{\partial T}$ ein globales zeitartiges Vektorfeld ist. Nutzen wir das, um global einen Begriff von Zukunft zu definieren: Ein Vektor $v \in T_p M$ sei *zukunftsgerichtet*, falls $g_{\text{Schw}}(v, \frac{\partial}{\partial T}|_p) < 0$ gilt. Das *Innere des Vorwärtslichtkegel* in einem Punkt $p \in M$ besteht dann aus allen zukunftsgerichteten zeitartigen Vektoren in $T_p M$. Bildet man diese Vorwärtslichtkegel wieder zurück in Schwarzschildkoordinaten ab, sieht man die Lichtkegel in Abbildung II.3.

Eine zeitartige Geodätische, die im Schwarzschildaußenraum startet, kann $r = r_S$ in endlicher Eigenzeit erreichen. Auch Lichtstrahlen können auf $r = r_S$ treffen. Andererseits kann weder ein zeitartiger Beobachter noch Licht den Schwarzschildinnenraum wieder verlassen. (Verlassen/Erreichen bezieht sich hier auf zukunftsgerichteten Kurven. Natürlich kann man in der Geodätischen $\gamma(s)$ immer zum negativen Parameter $\gamma(-s)$ übergehen und hat noch immer eine Geodätische. Allerdings entspricht das einer Zeitumkehr - das Gehen in die Vergangenheit.) Deshalb nennt man den Bereich $r \in (0, r_S)$ auch *schwarzes Loch* und $r = r_S$ den *Ereignishorizont* des schwarzen Loches.

Der 'neue Teil' in Kruskal-Szekeres Koordinaten kann als Schwarzschildraum mit Zeitumkehr interpretiert werden. Dann streben alle zukunftsgerichteten zeitartigen Kurven vom Ereignishorizont des *weißen Loches* weg. Da zukunftsgerichtete zeitartige Vektoren auf der $(T = -X)$ -Geraden immer in Richtung des ursprünglichen Schwarzschildraumes zeigen, gibt es zwar raumartige zukunftsgerichtete Kurven, die in endlicher Eigenzeit, z.B. vom blauen Schwarzschildaußenraum, in Richtung des 'weißen Bereiches' kommen,

aber keine solchen zukunftsgerichteten zeitartigen Kurven. In diesem Sinne ist der 'weiße Bereich', gesehen vom originalen Schwarzschildteil, eher unphysikalisch.

II.4. Kosmologie und Isometrien

Die verbreitetsten kosmologischen Modelle basieren auf den Annahmen des sogenannten *kosmologischen Prinzips*:

- (i) Es gibt eine Familie von disjunkten zeitartigen Geodätischen ('die fundamentalen Beobachter'), die die Mannigfaltigkeit aufspannen. Ihre Eigenzeit heißt *kosmische Zeit*.
- (ii) Das Universum sieht in alle Richtungen für einen fundamentalen Beobachter gleich aus (Isotropie) und es sieht für alle fundamentalen Beobachter gleich aus (Homogenität).

Kosmologie beschäftigt sich mit dem Universum als ganze. Auch wenn Isotropie und Homogenität auf kleinen Skalen (wie die Umgebung unserer Erde oder auch unser Sonnensystem) nicht gegeben ist, kann man auf großen Skalen, mal diese Annahme machen.* Es gibt auch (dann weniger verbreitete) kosmologische Modelle, die eine der Annahmen Isotropie oder Homogenität fallen lassen.

Um insgesamt kosmologische Modelle formulieren zu können, müssen wir zunächst mehr zu Isometrien sagen.

II.4.1. Killingvektorfelder

Vorl. 12

Eine Isometrie, wie in Definition II.3.1 ist Diffeomorphismus $f: M \rightarrow N$ zwischen Riemannschen oder Lorentz-Mannigfaltigkeiten (M, g) und (N, h) für die

$$g_p(v, w) = h_{f(p)}(d_p f(v), d_p f(w))$$

für alle $p \in M$ und $v, w \in T_p M$ gilt. Isometrien $f: M \rightarrow M$ bilden mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe – die *Isometriegruppe* von (M, g) .

Ein wichtiger Fall sind *Einparameterfamilien von Isometrien um die Identität*, also eine glatte Abbildung $f: (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow M$, so dass $f_s := f(s, \cdot): M \rightarrow M$ für alle s eine Isometrie und $f_0 = \text{id}$ ist. Wir werden etwas allgemeiner *Einparameterfamilien von lokalen Isometrien um die Identität* benötigen, d.h. eine glatte Abbildung $f: \Sigma \subseteq (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow M$ mit Σ eine offene Umgebung von $\{0\} \times M$ und $f_s := f(s, \cdot): \Sigma_s := \{x \in M \mid (x, s) \in \Sigma\} \rightarrow f_s(\Sigma_s)$ ist eine Isometrie.

Definition II.4.1. Sei f_s eine Einparameterfamilien von (lokalen) Isometrien um die Identität von (M, g) . Das Vektorfeld X gegeben durch

$$X(p) := \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f_s(p)$$

nennen wir *Killingvektorfeld* bzw. *infinitesimale Isometrie* von (M, g) .

Lemma II.4.2. Sei X ein Killingvektorfeld. Dann ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ und X erfüllt die Gleichung $(\nabla_{\partial_\alpha} X)_\gamma + (\nabla_{\partial_\gamma} X)_\alpha = 0$ bzw. für alle $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0. \tag{II.22}$$

Die Gleichung (II.22) heißt Killinggleichung.

Beweis. Übungsaufgabe 20 □

Bemerkung II.4.3.

- (i) Sei X ein Killingvektorfeld. Seien $(x^\alpha)_\alpha$ lokale Koordinaten, so dass $X = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ für ein α ist. Dann hängen die Metrikkoeffizienten in diesen Koordinaten nicht von x^α ab:

$$\frac{g_{\beta\gamma, \alpha} = \partial_\alpha g(\partial_\beta, \partial_\gamma) \stackrel{\text{metrisch}}{=} g(\nabla_\alpha \partial_\beta, \partial_\gamma) + g(\partial_\beta, \nabla_\alpha \partial_\gamma) \stackrel{\text{torsionsfrei}}{=} g(\nabla_\beta \partial_\alpha, \partial_\gamma) + g(\partial_\beta, \nabla_\gamma \partial_\alpha) \stackrel{(II.22)}{=} 0.}{*..}$$

(ii) Aus der Berechnung der Geodäten durch (C.1)

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha}$$

mit $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$ und aus (i) folgt somit direkt: Ist $X = \partial_\alpha$ ein Killingvektorfeld, dann ist $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha}$ entlang einer Geodäten konstant und damit eine *Erhaltungsgröße*.

Wir haben, das schon am Beispiel von Schwarzschild gesehen: Dort waren die Metrikkoeffizienten unabhängig von t bzw. φ , was uns die Erhaltungsgrößen E bzw. ℓ gab.

Auch ohne eine Koordinate entlang des Killingvektorfeldes zu wählen sieht man ganz analog:

Lemma II.4.4. *Ist X ein Killingvektorfeld von (M, g) und $\gamma(s)$ eine Geodätische auf (M, g) , dann ist $g(X, \dot{\gamma})$ entlang der Geodätischen konstant.*

Beweis. Aus der Killinggleichung (II.22) folgt $g(\nabla_{\dot{\gamma}} X, \dot{\gamma}) = 0$ und damit

$$\frac{d}{ds} g(X, \dot{\gamma}) = g(\nabla_{\dot{\gamma}} X, \dot{\gamma}) = 0.$$

□

Beispiel II.4.5. Wieder zur Schwarzschildmetrik: Wir hatten oben schon die beiden Einparameterfamilien von Isometrien $f_s: t \mapsto t + s$ bzw. $f_s: \varphi \mapsto \varphi + s$. Allerdings hat die sphärische Metrik auf der Kugel und damit auch unsere Schwarzschildmetrik die $SO(3)$ als Untergruppe der Isometriegruppe und diese wird durch drei Einparameterfamilien von Isometrien erzeugt – eine davon $\varphi \mapsto \varphi + s$, also Rotation um die, sagen wir, z -Achse. Als die beiden anderen könnten wir Drehungen um die x - bzw. y -Achse wählen. Das letzte Lemma sagt uns, dass auch dazu Erhaltungsgrößen gehören. Die hat man bei uns so direkt nicht gesehen, weil wir unser Koordinatensystem so gewählt hatten, dass bei unseren Anfangswerten $\theta \equiv 0$ ist und damit die resultierende Rotationsachse die z -Achse ist. Das macht ℓ zur z -Komponente des Drehimpulsvektors. Die beiden anderen Erhaltungsgrößen wären die x - und y -Komponente, die bei unserer Wahl der Anfangswerte automatisch Null sind.

Satz II.4.6. *Sei (M, g) eine Riemannsche oder eine Lorentz-Mannigfaltigkeit. Sei X ein Killingvektorfeld und T ein symmetrischer divergenzfreier $(0, 2)$ -Tensor (z.B. der Energie-Impuls-Tensor). Sei $J := T(X, \cdot)^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ (d.h. in lok. Koordinaten $J^\alpha = T_{\beta\gamma} g^{\gamma\alpha} X^\beta = T_\beta^\alpha X^\beta$). Sei Σ eine geschlossene (=kompakt und ohne Rand) Hyperfläche* in M , so dass $M \setminus \Sigma$ zwei Zusammenhangskomponenten habe. Die beschränkte dieser beiden Komponenten heiße S und ν sei das zugehörige äußere Einheitsnormalenvektorfeld. Dann ist J ein erhaltener Fluss/Strom, d.h.*

$$\int_{\Sigma} g(J, \nu) d\text{vol}_{g|_{\Sigma}} = 0.$$

Beweis. Aus dem Divergenzatz für Vektorfelder folgt

$$\int_{\Sigma} g(J, \nu) d\text{vol}_{g|_{\Sigma}} = \int_S \text{div} J d\text{vol}_g;$$

es reicht zu zeigen, dass $\text{div} J = 0$ ist.

Es ist $\text{div} J = (\nabla_\gamma J)^\gamma \stackrel{\nabla g=0}{=} (\nabla_\gamma T(X, \cdot))_\alpha g^{\alpha\gamma}$. Allgemein haben wir für $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\underbrace{(\nabla_Y T(X, \cdot))(Z)}_{\in \Omega^1(M)} \stackrel{\text{(II.11)}}{=} Y(T(X, Z)) - T(X, \nabla_Y Z) \stackrel{\text{(II.12)}}{=} (\nabla_Y T)(X, Z) + T(\nabla_Y X, Z).$$

Benutzen wir diese Gleichheit für $Y = \partial_\gamma$ und $Z = g^{\alpha\gamma} \partial_\alpha$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{div} J &= (\nabla_\gamma T)_{\delta\epsilon} g^{\epsilon\gamma} X^\delta + T_{\delta\epsilon} (\nabla_\gamma X)^\delta g^{\gamma\epsilon} \\ &= (\text{div} T)_\delta X^\delta + T^{\delta\gamma} (\nabla_\gamma X)_\delta. \end{aligned}$$

Der erste Term ist Null wegen der Divergenzfreiheit von T und der zweite wegen der Killinggleichung zusammen mit der Symmetrie von T . □

*..

Alle Lösungen der Killinggleichung kommen von Einparameterfamilie von (lokalen) Isometrien: Um das zu sehen, reden wir zunächst kurz über Flüsse von Vektorfeldern. Für jedes Intervall (a, b) um $0 \in \mathbb{R}$ mit $|b - a|$ klein genug, hat

$$\dot{\gamma}_x(t) = X(\gamma_x(t)), \quad \gamma_x(0) = x$$

eine Lösung. Ist das Intervall maximal, so ist die Lösung eindeutig – das maximale Intervall, nennen wir (a_x, b_x) .

Der Fluss des Vektorfeldes X ist definiert durch

$$\Phi: \Sigma_X = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M \mid a_x < t < b_x\} \rightarrow M, \quad \Phi_t(x) := \Phi(t, x) := \gamma_x(t).$$

Bemerkung II.4.7.

- (i) Wegen Glattheit der Lösung von $\dot{\gamma}_x(t) = X(\gamma_x(t))$ in den Anfangswerten $\gamma_x(0) = x$ und da X glatt ist, gibt es für jeden Punkt $x \in M$ eine Umgebung U und ein $\delta > 0$, so dass $U \times (-\delta, \delta) \subseteq \Sigma_X$ ist. Dann ist für alle $t \in (-\delta, \delta)$

$$\Phi_t: U \rightarrow \Phi_t(U)$$

ein Diffeomorphismus, da Φ_t glatt ist und $\Phi_{-t}: \Phi_t(U) \rightarrow U$ die Umkehrabbildung ist.

- (ii) Für alle $x \in M$ mit $s + t, t \in (a_x, b_x)$ gilt $\Phi_s \circ \Phi_t(x) = \Phi_{s+t}(x)$.
- (iii) Ist $\Sigma_X = \mathbb{R} \times M$, nennen wir das Vektorfeld X *vollständig*. Ist X vollständig, dann ist $\Phi_t: M \rightarrow M$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus und es gilt $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ für alle s, t .

Sei $f: U \subseteq M \rightarrow f(U) \subseteq M$ ein Diffeomorphismus. Dann entspricht das einem lokalen Koordinatenwechsel. Wir nennen eine Abbildung auf Tensoren einen Pushforward mit f , wenn Sie den Tensor in den neuen Koordinaten darstellt. Die Umkehrabbildung ist der Pullback. In einer Schreibweise ohne Koordinaten bedeutet das:

Definition II.4.8.

- (i) Sei $\varphi \in C^\infty(U)$, dann ist $f_*\varphi := \varphi \circ f^{-1} \in C^\infty(f(U))$.
- (ii) Sei $X \in \mathfrak{X}(U)$, dann ist $f_*X \in \mathfrak{X}(f(U))$ gegeben durch

$$(f_*X)_{f(p)} = d_p f(X(p))$$

und es ist $f^*(f_*X) = X$.

- (iii) Sei $\eta \in \Omega^1(U)$, dann ist $f_*\eta \in \Omega^1(f(U))$ gegeben durch $(f_*\eta)(Y) = \eta(f^*Y)$ für alle $Y \in \mathfrak{X}(f(U))$.
- (iv) Sei $T \in \mathcal{T}_s^r(f(U))$. Dann ist $f^*T \in \mathcal{T}_s^r U$ gegeben durch

$$(f^*T)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) = T(f_*\omega^1, \dots, f_*\omega^s, f_*X_1, \dots, f_*X_s)$$

für alle $\omega^i \in \Omega^1(U)$ und $X_i \in \mathfrak{X}(U)$.

Bemerkung II.4.9. Ein Diffeomorphismus $\varphi: M \rightarrow M$ ist also genau dann eine Isometrie von (M, g) , falls $\varphi^*g = g$ ist.

Definition II.4.10. Die *Lieklammer* $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ ist definiert durch

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

für alle $f \in C^\infty(M)$.

Man muss sich für die letzte Definition überlegen, dass ein Vektorfeld durch seine Wirkung $X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, $f \mapsto X(f) = df(X)$, eindeutig bestimmt ist. Das ist die Derivationsinterpretation von Vektorfeldern, vgl. Übungsaufgabe 11. Direkter sieht man das für die Lieklammer im Ausdruck in lokalen Koordinaten, siehe folgendes Lemma:

Lemma II.4.11. (i) Die Lieklammer ist in lokalen Koordinaten durch $[X, Y]^\alpha = X^\beta \frac{\partial Y^\alpha}{\partial x^\beta} - Y^\beta \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta}$ gegeben.

(ii) Die Lieklammer ist bilinear in beiden Komponenten und es gilt $[X, X] = 0$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$.

(iii) Es gilt die Jacobi-Identität

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

(iv) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.

Beweis. Direktes Nachrechnen. □

Bemerkung II.4.12. Einen Vektorraum V zusammen mit einer Abbildung $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$, die die Eigenschaften (ii) und (iii) des letzten Lemmas erfüllt, nennt man *Liealgebra*. Also ist insbesondere $\mathfrak{X}(M)$ mit der Lieklammer eine Liealgebra.

Mit Hilfe des Flusses und der Lieklammer, können wir nun die Lie-Ableitung definieren:

Definition II.4.13. Sei $T \in \mathcal{T}_s^r M$. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ und sei Φ_t der zugehörige Fluss. Dann sei

$$\mathcal{L}_X T := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_t^* T$$

die *Lieableitung* in Richtung X .

Lemma II.4.14. Für alle $f \in C^\infty(M)$, $X, Y, Y_i \in \mathfrak{X}(M)$, $T \in \mathcal{T}_s^r M$, $S \in \mathcal{T}_{s'}^{r'} M$ gilt

(i) $\mathcal{L}_X f = X(f) = df(X)$.

(ii) $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

(iii) $\mathcal{L}_X(S \otimes T) = \mathcal{L}_X S \otimes T + S \otimes \mathcal{L}_X T$

(iv) $\mathcal{L}_X(T(Y_1, \dots, Y_s) \in \mathcal{T}_0^r M^*) = (\mathcal{L}_X T)(Y_1, \dots, Y_s) + \sum_i T(Y_1, \dots, Y_{i-1}, \mathcal{L}_X Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_s)$

Insbesondere gilt für die Metrik g :

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X). \quad (\text{II.23})$$

Beweis. (i), (iii), (iv) folgen direkt aus der Definition II.4.8 des Pullbacks und der Definition der Lieableitung. In die letzte Aussage geht noch $\nabla g = 0$ ein. Es bleibt (ii): Um $\mathcal{L}_X Y$ zu berechnen, berechnen wir $(\mathcal{L}_X Y)(f)$ für $f \in C^\infty(M)$. Entwickeln wir dazu $f: \Phi_{-t}(x) = f(x) + th_t(x)$ mit $h_0(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \Phi_{-t})(x) = d_x f(X(x)) = X(f)(x)$.

Dann ist für $x \in M$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)(f)(x) &= d_x f(\mathcal{L}_X Y) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d_{\Phi_{-t}(x)} (f \circ \Phi_t)(Y(\Phi_{-t}(x))) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_{\Phi_{-t}(x)} (f \circ \Phi_t)(Y(\Phi_{-t}(x))) - d_x f(Y(x))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{d_{\Phi_{-t}(x)} f(Y(\Phi_{-t}(x))) - d_x f(Y(x))}{t} - d_{\Phi_{-t}(x)} h_t(Y(\Phi_{-t}(x))) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{Y(f) \circ \Phi_{-t} - Y(f)}{t} - Y(h_t) \circ \Phi_{-t} \right) (x) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} Y(f) \circ \Phi_{-t}(x) - Y(h_0(x)) = d(Y(f))(X) - Y(X(f))(x) \\ &= (X(Y(f)) - Y(X(f)))(x) = [X, Y](f)(x). \end{aligned} \quad \square$$

*vgl. Bem. II.1.16

Bemerkung II.4.15. Die Eigenschaften (i)-(iii) und Eigenschaft (iv) für $T \in \Omega^1(M)$ (also $(\mathcal{L}_X T)(Y) = X(T(Y)) - T([X, Y])$) bestimmen die Lieableitung eindeutig, im Sinne von: jede lineare Abbildung, die diese Eigenschaften erfüllt, ist die Lieableitung.

Bemerkung II.4.16. (Killingvektorfelder) Wir haben jetzt alles zusammen, um zu sehen, dass Killingfelder immer von (lokalen) Isometrien kommen, im Sinne von: Ist X ein Vektorfeld, welches die Killinggleichung (II.22) erfüllt, dann folgt aus (II.23), dass $\mathcal{L}_X g = 0$ ist. Ist $\Phi: \Sigma_X \rightarrow M$ der Fluss von X , dann folgt aus der Definition der Lieableitung $\frac{d}{ds}|_{s=0} \Phi_s^* g = 0$. Mit $\Phi_0 = \text{id}$ ist also $\Phi_s^* g = g$ auf dem Schnitt $D \cap \Phi_s(D)$ mit D der Definitionsbereich von Φ_s . Ist Φ_s für $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ auf ganz M definiert, erhalten wir so, dass unser Vektorfeld, von einer Einparameterfamilie von Isometrien um die Identität kommt. Im Allgemeinen haben wir mit nur Einparameterfamilien von lokalen Isometrien um die Identität.

Insgesamt haben wir also gesehen:

Lemma II.4.17. *Jedes Vektorfeld, das die Killinggleichung (II.22) oder äquivalent $\mathcal{L}_X g = 0$ erfüllt, ist ein Killingvektorfeld.*

Wie viele Killingvektorfelder kann es geben? Hat man zwei Killingvektorfelder X, Y , die von Parameterfamilien φ_s bzw. ψ_t von Isometrien kommen, dann ist auch $\varphi_s \circ \psi_s, \varphi_s \circ \psi_{-s}$, etc Parameterfamilien von Isometrien, die wiederum zu Killingvektorfeldern führen, z.B.

Lemma II.4.18. *Sind X, Y Killingvektorfelder von (M, g) . Dann ist auch $aX + Y$ für ein $a \in \mathbb{R}$ wieder ein Killingfeld und auch $[X, Y]$ ein Killingvektorfeld.*

Das $aX + Y$ wieder ein Killingvektorfeld ist, folgt direkt aus der Linearität der Killinggleichung. Das $[X, Y]$ wieder ein Killingvektorfeld ist, folgt direkt aus der Charakterisierung von Killingvektorfeldern durch $\mathcal{L}_X g = 0$ und dem folgenden Lemma:

Lemma II.4.19. $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X, Y]}$.

Beweis. Nachrechnen der definierenden Eigenschaften, siehe Bemerkung II.4.15. □

Bemerkung II.4.20. Aus Lemma II.4.18 folgt direkt, dass die Killingvektorfelder einen Untervektorraum und sogar eine Lieunteralgebra* von $\mathfrak{X}(M)$ bilden.

Beispiel II.4.21. Im $(\mathbb{R}^2, \eta = -dt^2 + dx^2)$, sei $X = a(t, x)\partial_t + b(t, x)\partial_x$. Soll X Killingvektorfeld sein, muss $0 = (\nabla_\alpha X)_\beta + (\nabla_\beta X)_\alpha$ sein, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t a(t, x) = \partial_x b(t, x) \\ 0 &= -\partial_t b(t, x) + \partial_x a(t, x). \end{aligned}$$

Zusammen ist $a(t, x) = a(x)$, $b(t, x) = b(t)$ und $\partial_t b(t) = \partial_x a(t)$. Also $b(t) = at + b_0$ und $a(x) = ax + a_0$ und $X = (ax + a_0)\partial_t + (at + b_0)\partial_x$. Damit ist für den zweidimensionalen Minkowskiraum der Vektorraum der Killingvektorfelder dreidimensional.

Ziel ist es nun die Dimension des Vektorraums der Killingvektorfelder zu bestimmen: Dazu benötigen wir zunächst:

Lemma II.4.22. *Ist X ein Killingvektorfeld auf (M, g) und $c: I \rightarrow M$ eine Geodätische, dann gilt in allen Punkten von c , dass*

$$(\nabla_{\dot{c}} \nabla_{\dot{c}} X)_{c(t)} = R(\dot{c}(t), X(c(t)))\dot{c}(t) \tag{II.24}$$

gilt.

*Ist $(V, [., .])$ eine Liealgebra und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum, der auch unter $[., .]$ abgeschlossen ist (also $[W, W] := \{[x, y] \mid x, y \in W\} \subseteq W$ ist), heißt *Lieunteralgebra von $(V, [., .])$.*

Beweis. Ist c eine konstante Geodätische, d.h. $\dot{c} \equiv 0$, ist die Behauptung richtig. Wir nehmen, also nun an, dass c nichtkonstant ist. Sei $t_0 \in I$. Wir wählen lokale Koordinaten $(x^\alpha)_\alpha$ um ein $c(t_0)$ derart, dass $c(t)$ in lokalen Koordinaten die Form $(0, \dots, 0, x^\beta(t) = t, 0, \dots, 0)$ für ein spezielles β hat.* Da X ein Killingvektorfeld ist, gilt

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0 \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Wir wählen Y, Z derart, dass in unserer Karte gilt:

- (a) $Y = Z = \dot{c} = \partial_\beta$, setzen das in die obige Gleichung, nutzen dass c Geodätische ist, und leiten dann nach ∂_α ab:

$$0 = \partial_\alpha g(\nabla_{\dot{c}} X, \dot{c}) = g(\nabla_\alpha \nabla_\beta X, \partial_\beta) + g(\nabla_\beta X, \nabla_\alpha \partial_\beta).$$

- (b) $Y = \dot{c} = \partial_\beta$ und $Z = \partial_\alpha$:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{c}(g(\nabla_{\dot{c}} X, \partial_\alpha) + g(\dot{c}, \nabla_\alpha X)) \\ &= g(\nabla_{\dot{c}} \nabla_{\dot{c}} X, \partial_\alpha) + g(\nabla_\beta X, \nabla_\beta \partial_\alpha) + g(\partial_\beta, \nabla_\beta \nabla_\alpha X) \\ &\stackrel{\text{torsionsfrei}}{=} g(\nabla_{\dot{c}} \nabla_{\dot{c}} X, \partial_\alpha) + g(\nabla_\beta X, \nabla_\alpha \partial_\beta) + g(\partial_\beta, \nabla_\beta \nabla_\alpha X) \end{aligned}$$

Ziehen wir die beiden Gleichungen aus (a) und (b) voneinander ab, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_{\dot{c}} \nabla_{\dot{c}} X, \partial_\alpha) + g(R(\dot{c}, \partial_\alpha) X, \dot{c}) \\ &= g(\nabla_{\dot{c}} \nabla_{\dot{c}} X - R(\dot{c}, X) \dot{c}, \partial_\alpha) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. \square

Bemerkung II.4.23.

- (i) Die Gleichung (II.24) ist die Jacobigleichung, vgl. Definition II.1.31. Im Allgemeinen ist ein Jacobifeld J als Lösung von (II.24) nicht auf der ganzen Mannigfaltigkeit definiert sondern erst einmal nur ein Vektorfeld entlang einer Kurve $c: I \rightarrow M$, also eine Abbildung $J: t \in I \mapsto J(t) \in T_{c(t)}M$. Zur Berechnung der kovarianten Ableitung $\nabla_{\dot{c}(t)} J(t)$, vgl. (II.4) (oder folgt auch direkt aus den Eigenschaften (ii) und (iii) des Levi-Civita-Zusammenhangs in Lemma II.1.10), reicht es jedoch, wenn J auf c definiert ist. Auch $\nabla_{\dot{c}} J$ ist dann wieder ein Vektorfeld entlang c . Es gibt noch ein anderes technischen Detail, welches wir bis jetzt unterdrückt haben: Die Kurve c kann a priori Selbstschnitte haben: Dann können in einem Punkt $p = c(t_0) = c(t_1)$ die Tangentialvektoren \dot{c} verschieden sein und apriori wäre rein von der Definition der kovarianten Ableitung nicht klar, was $\nabla_{\dot{c}}$ im Punkt p dann sein soll. Technisch kann man das umgehen, in dem auf I eine Art 'mit c -zugezogene kovariante Ableitung' definiert. Für unsere Fragen hier reicht es dann, einfach c nur lokal zu betrachten, so dass keine Selbstschnitte vorliegen.
- (ii) Ein Jacobifeld entlang einer Kurve $c: I \rightarrow M$ ($0 \in I$) ist durch seine Anfangswerte $J(0)$ und $(\nabla_{\dot{c}} J)(0)$ eindeutig bestimmt, Übungsaufgabe 27.

Lemma II.4.24. Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche oder Lorentz-Mannigfaltigkeit. Ist X ein Killingvektorfeld mit $X(p) = 0$ und $(\nabla_v X)|_p = 0$ für ein $p \in M$ und all $v \in T_p M$, dann ist $X \equiv 0$.

Bevor wir das beweisen, zuerst eine Folgerung:

Folgerung II.4.25. Die Vektorraum der Killingvektorfelder einer m -dimensionalen zusammenhängenden Riemannschen oder Lorentzischen Mannigfaltigkeit hat maximal die Dimension $\frac{m(m+1)}{2}$.

Beweis. Aus Lemma II.4.24 und der Linearität der Killinggleichung folgt, dass ein Killingvektorfeld eindeutig durch den Wert von X und ∇X in einem Punkt $p \in M$ bestimmt ist und damit, dass $L: X \in \{\text{Killingvektorfelder}\} \mapsto (X(p), (\nabla X)_p) \in T_p M \times T_p^1(T_p M)$ injektiv ist. Aus der Killinggleichung folgt weiterhin, dass der $(1, 1)$ -Tensor ∇X , der in jedem Punkt p als lineare Abbildung $T_p M \rightarrow T_p M$ geschrieben werden kann, schiefssymmetrisch ist, also $\nabla X \in \mathfrak{sl}(m) := \{A \in \text{Matr}_{m \times m}(\mathbb{R}) \mid A + A^T = 0\}$ gilt. Damit kann das Bild von L und damit der Vektorraum der Killingvektorfelder maximal $(m + \frac{m(m-1)}{2} = \frac{m(m+1)}{2})$ -dimensional sein. \square

*Das ist immer möglich..

II. Allgemeine Relativitätstheorie

Beweis von Lemma II.4.24. Sei $X(p) = 0$ und $(\nabla X)_p = 0$. Da M zusammenhängend ist, kann jeder Punkt der Mannigfaltigkeit durch eine stetige Kurve, die stückweise Geodätische ist, erreicht werden. Deshalb reicht es, die Aussage auf Geodäten ausgehend von p zu überprüfen. Sei $c: I \rightarrow M$ Geodätische mit $0 \in I$ und $c(0) = p$. Dann ist nach Lemma II.4.22 X ein Jacobivektorfeld entlang c und damit eindeutig durch $X(p)$ und $(\nabla_{\dot{c}}X)_p$ bestimmt. Also verschwindet X entlang c und damit auf ganz M . \square

Definition II.4.26. Eine Riemannsche oder Lorentz-Mannigfaltigkeiten (M^m, g) heißt

- (i) *homogen im Punkt* $p \in M$, falls $\{X(p) \mid X \text{ ist Killingvektorfeld}\} = T_p M$ ist.
- (ii) *isotrop im Punkt* $p \in M$, falls $\{(\nabla X)_p \mid X \text{ ist Killingvektorfeld mit } X(p) = 0\} = \mathfrak{sl}(m)$ ist.

Bilden die Killingvektorfelder von (M^m, g) einen $\frac{m(m+1)}{2}$ -dimensionalen Vektorraum, dann heißt M *maximal symmetrisch*.

Bemerkung II.4.27. (Interpretation) Homogen in einem Punkt $p \in M$, bedeutet, dass es eine Umgebung U von p gibt, so dass es für jeden Punkt $q \in U$ eine lokale Isometrie $f: U \subseteq M \rightarrow f(U) \subseteq M$ mit $f(p) = q$ gibt.

Die Isometrien, die durch Killingvektorfelder mit $X(p) = 0$ erzeugt werden, entsprechen 'lokalen' Rotationen um den Punkt $p \in M$. Demnach bedeutet isotrop in einem Punkt, dass lokal um diese Punkt die Mannigfaltigkeit in alle Richtungen gleich aussieht.

Wir werden sehen, dass maximal symmetrische Räume lokal eindeutig durch eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ und dem Index ihrer Metrik bestimmt sind. Zuerst bestimmen wir den Krümmungstensor:

Lemma II.4.28. Sei (M^m, g) (für $m > 1$) ein maximal symmetrischer Raum. Dann gilt

$$g(R(X, Y)Z, W) = \frac{K}{m(m-1)}(g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W))$$

für ein $K \in \mathbb{R}$.

Beweisskizze. Da M insbesondere homogen in alle Punkten ist, reicht es, die Gleichung in einem Punkt zu überprüfen. Dort wird sie aus der Isotropie folgen: Man benutzt die Killinggleichung und leitet diese noch zweimal kovariant ab. Aufaddieren der resultierenden Gleichung für Permutationen der Indizes zusammen mit der Bianchi-Identität liefert eine Gleichung für die Komponenten des Krümmungstensors. Mit geeigneten Kontraktionen folgt die Behauptung, s. z.B. [,]. \square

Bemerkung II.4.29. K ist die Skalarkrümmung:

$$\begin{aligned} \text{scal} &= R_{\beta\alpha\gamma}^{\alpha} g^{\beta\gamma} = \frac{K}{m(m-1)} g^{\alpha\epsilon} (g_{\beta\gamma} g_{\alpha\epsilon} - g_{\alpha\gamma} g_{\epsilon\beta}) g^{\beta\gamma} \\ &= \frac{K}{m(m-1)} (\delta_{\beta}^{\beta} \delta_{\alpha}^{\alpha} - \delta_{\gamma}^{\epsilon} \delta_{\beta}^{\gamma}) = \frac{K}{m(m-1)} (m^2 - m) = K \end{aligned}$$

Satz II.4.30. Sei (M^m, g) ein maximal symmetrischer Räume mit Skalarkrümmung $K \in \mathbb{R}$ und g ist Riemannsch oder Lorentzsche. Dann gibt zu jedem $p \in M$ eine Umgebungen U , so dass (U, g) isometrisch zu einer Teilmenge

- (i) des Euklidischen Raumes \mathbb{R}^m , falls $K = 0$ und g Riemannsch,
- (ii) der Sphäre $S^m(R) \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ vom Radius R , falls $K = \frac{m(m-1)}{R^2}$ und g Riemannsch,
- (iii) der hyperbolische Raum $H^m(R) := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \eta(x, x) = -r^2, x^0 > 0\}$ vom Radius R , falls $K = -\frac{m(m-1)}{R^2}$ und g Riemannsch,
- (iv) des Minkowskiraum, falls $K = 0$ und g Lorentzsch,
- (v) der de-Sitterraum $S_1^m(R) := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \eta(x, x) = r^2\}$ mit Metrik induziert vom umliegenden Minkowskiraum, falls $K = \frac{m(m-1)}{R^2}$ und g Lorentzsch,

(vi) der Anti-de-Sitterraum $H_1^m(r) := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid r^2 - (x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^m)^2 = 0\}$ mit Metrik induziert vom \mathbb{R}^{m+1} mit dem Standard-Index 2-innerem Produkt, vgl. Übungsaufgabe 9, falls $K = -\frac{m(m-1)}{R^2}$ und g Lorentzsch,

ist.

II.4.2. Kosmologische Raumzeiten

Nach dem kosmologischen Prinzip, vgl. Seite 40, gibt es eine kosmologische Zeit t und die Flußlinien von ∂_t sind Geodätische (die fundamentalen Beobachter). Damit sieht eine kosmologische Raumzeit lokal aus, wie $(I \times M, g)$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und (M, h) eine maximal symmetrische Riemannsche Mannigfaltigkeit und $g = -c_0 dt^2 + f(t)^2 h$ (mit $c_0 > 0$, da ∂_t zeitartig sein soll): Allgemein hat eine Metrik auf $I \times M$, mit ∂_t zeitartig, die Form

Vorl. 14

$$-c(t, x) dt^2 + a(t, x)(dt \otimes dx^i + dx^i \otimes dt) + h_t$$

mit h_t eine Einparameterfamilien von Metriken auf M und $x = (x^1, \dots, x^m)$ lokale Koordinaten auf M^m . Da M das Jetzt des Beobachters ∂_t sein soll, muss $a(t, x) = 0$ sein. Da für jeden Beobachter $\partial_t|_{(s,x) \in I \times M}$ das Jetzt* $\{s\} \times M$ homogen und isotrop sein soll, muss (M, h_s) eine maximal symmetrische Mannigfaltigkeit sein. Da die Skalarkrümmung von h_s sich mit s ändern kann, können wir $h_s = f(s)^2 h$ setzen, wobei (M, h) maximal symmetrisch und $f: I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ glatt. Es bleiben also bis hier Metriken der Form $-c(t, x) dt^2 + f(t)^2 h$. Nun schauen wir noch, was uns die Information, dass die Flußlinien von ∂_t Geodätische sind – also sollen $\gamma_x(t) = (t, x)$ für alle $x \in M$ Geodätische sind: Es ist $\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2} c(t, x)^{-1} \partial_t c(t, x)$ und $\Gamma_{tt}^i = \frac{1}{2} f(t)^{-2} h^{ij} \partial_j c(t, x)$ und damit

$$0 = \nabla_{\partial_t} \partial_t = \Gamma_{tt}^t \partial_t + \Gamma_{tt}^i \partial_{x^i} = \frac{1}{2} c(t, x)^{-1} \partial_t c(t, x) \partial_t + \frac{1}{2} f(t)^{-2} h^{ij} \partial_j c(t, x) \partial_i$$

D.h. wir haben $c(t, x) = c(x)$ und $h^{ij} \partial_j c(x) = 0$, also $c(t, x) = \text{const.}$

Die Konstante c_0 kann durch $t \mapsto c_0^{\frac{1}{2}} t$ auf 1 skaliert werden.

Definition II.4.31. Eine *Friedman-Lemaître-Robertson-Walker-Raumzeit* (FLRW) ist ein verzerrtes Produkt $(M = I \times N, g = -dt^2 + f(t)^2 h)$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, (N, h) eine maximal symmetrische Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(I, \mathbb{R}_{>0})$ ist.

Wir sammeln fürs weitere ein paar Krümmungsformeln für FLRW-Raumzeiten, die direkt nachgerechnet werden können, vgl. auch [9, S. 345]:

Lemma II.4.32. Sei (N^n, h) eine maximal symmetrische Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Skalarkrümmung K und $(M = I \times N, g = -dt^2 + f(t)^2 h)$ für eine glatte Funktion $f \in C^\infty(I, \mathbb{R}_{>0})$. Wir setzen $k = \frac{K}{n(n-1)}$ † Dann gilt für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ mit $g(\partial_t, X) = g(\partial_t, Y) = g(\partial_t, Z) = 0$

$$\begin{aligned} Ric(\partial_t, \partial_t) &= -3 \frac{f''}{f} & Ric(\partial_t, X) &= 0 & Ric(X, Y) &= \left(2 \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + 2 \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f} \right) g(X, Y) \\ scal &= 6 \left(\left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f} \right). \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir somit für den Einsteintensor:

$$\begin{aligned} G(\partial_t, \partial_t) &= 2 \left(\left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} \right) \\ G(\partial_t, X) &= 0 \\ G(X, Y) &= - \left(\left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} + 2 \frac{f''}{f} \right) g(X, Y). \end{aligned}$$

*Eigentlich ist das Jetzt eines Beobachters in der ART kein guter Begriff, da es mehrere räumliche (= induzierte Metrik ist Riemannsch) Untermannigfaltigkeiten in einem Punkt (t, x) mit Tangentialraum ∂_t^\perp gibt. Da wir aber durch jeden Punkt eine fundamentalen Beobachter haben mit einer globalen Zeit haben, kann $\{s\} \times M$ als das Jetzt eines jeden fundamentalen Beobachter zur Zeit s angesehen werden.

†Schnittkrümmung...

II.4.3. Materiemodell für perfekte Flüssigkeiten

Perfekte Flüssigkeit (keine Viskosität, kein Wärmeaustausch, nur Druck) – wir orientieren uns an Abschnitt II.2 über den Energie-Impuls-Tensor und wollen zuerst diesen für die SRT ableiten:

Die Flüssigkeit schauen wir uns in einem System an, wo die Flüssigkeit in Ruhe ist, also $v = 0$ (die räumliche Geschwindigkeit, also $V = \partial_t$ für den zugehörigen Vierervektor), weil die Geschwindigkeitsänderungen gemäß der relativistischen Dynamik geschehen muss und es sonst mühsamer ist aus dem Newtonschen Spannungstensor den SRT Energie-Impuls-Tensor zu machen. Weiter wird ein nichtviskosen Fluid betrachtet d.h. der Spannungstensor nimmt die Form $\mathfrak{p}\text{Id}_{3 \times 3}$ an. Des Weiteren ist die Impulsdichte Null, da $v = 0$ ist. Die Energiedichte wird im Ruhedefall einfach durch die Masseverteilung ρ beschrieben. Wir haben also

$$T = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \mathfrak{p}\text{Id}_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

Das ist der Energie-Impulstensor bzgl. unseres festen Bezugssystems von oben, in dem $V = \partial_t$ ist.

Um den Energie-Impulstensor für ein beliebiges Strömungsvektorfeld V zu erhalten, müssen wir entsprechend Lorentz transformieren (analog zu Übungsaufgabe 4(i)) und erhalten als (0, 2)-Tensor:

$$T(X, Y) = (\rho + \mathfrak{p})\eta(X, V)\eta(Y, V) + \mathfrak{p}\eta(X, Y),$$

wobei V das Strömungsvektorfeld ist.

Test für den Fall oben (Beobachter= V):

$$T(Z, V) = 0 \quad \text{falls } Z \in V^\perp$$

$$T(V, V) = (\rho + \mathfrak{p}) - \mathfrak{p} = \rho$$

$$T(Z, W) = \mathfrak{p}\eta(Z, W) \quad \text{falls } Z, W \in V^\perp.$$

Wir nutzen das Korrespondenzprinzip, um aus dem obigen Energie-Impuls-Tensor für eine perfekte Flüssigkeit der SRT einen der ART zu machen:

Definition II.4.33. Der Energie-Impuls-Tensor für eine perfekte Flüssigkeit auf einer Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) ist gegeben durch

$$T(X, Y) = (\rho + \mathfrak{p})g(X, V)g(Y, V) + \mathfrak{p}g(X, Y), \tag{II.25}$$

wobei \mathfrak{p} den Druck und ρ die Energiedichte (beides i.A. eine Funktion auf M) der perfekten Flüssigkeit repräsentieren.

Bemerkung II.4.34. Die Einsteingleichungen sind ein System von 10 partiellen Differentialgleichungen (für Raumzeiten der Dimension vier). Sie kodieren aber i.A. nicht, dass der Energie-Impuls-Tensor selbst einer Bewegungsgleichung gehören muss, die i.A. von g wieder abhängt. In einfachen Fällen bzw. für gewisse Näherungen reichen die Einsteingleichungen aus, z.B. für Vakuum ($T = 0$) oder Staub (=perfekte Flüssigkeit mit $\mathfrak{p} = 0$ (da entspräche die zusätzliche Bewegungsgleichung der Masseerhaltung und die ist schon in T eingebaut.)). Manchmal gibt es Näherungen/Modelle, wo man zwar zusätzliche Bewegungsgleichungen braucht, die aber in 'guter' Näherung nicht von g abhängen, z.B. erfüllen in einer perfekten Flüssigkeit \mathfrak{p} und ρ eine zusätzliche Bewegungsgleichung, die aber oft nur eine algebraische Gleichung in \mathfrak{p} und ρ ist.

Oft ist dies eine *polytrophe Zustandsgleichung* $\mathfrak{p} = c\rho^\varkappa - c$ und \varkappa werden durch das Modell bestimmt. Hier ein paar Beispiele mit wenigen Stichworten:

- *isotherm* ($\varkappa = 1$)- verwendet zu bestimmten Zeiten des Universums in der Kosmologie (nach der Inflation/vor der CMB-Entkopplung)
- *adiabatisch* (\varkappa geht mit den Freiheitsgraden) - z.B. verwendet für Sternenmodell mit einzelnen Teilchen $\varkappa = \frac{5}{3}$
- *nichtrelativistisches Elektronengas* $\varkappa = \frac{5}{3} \sim$ verwendet für quantenmechanisch entartete Gase/weiße Zwerge
- *ultrarelativistisches Gas* $\varkappa = \frac{4}{3}$ - verwendet, wenn die Geschwindigkeit der Teilchen fast die Lichtgeschwindigkeit ist (z.B. späte Zustände von Sternenkollaps)

II.4.4. Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker

Jede FLRW-Raumzeit erfüllt die Einsteingleichungen für den Energie-Impuls-Tensor einer perfekten Flüssigkeit mit geeignetem ρ , \mathfrak{p} und Strömungsvektorfeld $V = \partial_t$, also ist $T_{\alpha\beta} = \begin{cases} \rho & \alpha = \beta = t \\ \mathfrak{p}g_{\alpha\beta} & \alpha, \beta \neq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$: Aus

Lemma II.4.32 folgt

$$\begin{aligned} \rho &= 3 \left(\left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} \right) - \Lambda \\ \mathfrak{p} &= - \left(2 \frac{f''}{f} + \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} \right) + \Lambda. \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

(Die erste Gleichung nennt man in diesem Rahmen *Energiegleichung* und die zweite *Bewegungsgleichung*.) Insbesondere hängt die Energiedichte und der Druck nur von t ab.

Wir sehen direkt, erfüllt die FLRW-Raumzeit die Einsteingleichung mit $\Lambda = 0$ für eine perfekte Flüssigkeit mit (ρ, \mathfrak{p}) , dann auch die Einsteingleichung mit $\Lambda = \Lambda_0$ für eine perfekte Flüssigkeit mit $(\rho + \Lambda_0, \mathfrak{p} - \Lambda_0)$.

Wir schauen uns hier einmal, dass Beispiel von Staub, d.h. $\mathfrak{p} = 0$, und $\Lambda = 0$ an mit $\Lambda = 0$. In diesem Fall ist es die Masseerhaltung (das ist analog zur Kontinuitätsgleichung eine Differentialgleichung in ρ) und schon in T eingebaut. Insgesamt gilt:

Satz II.4.35. *Im Fall $\mathfrak{p} = 0$ ist in der Robertson-Walker Raumzeit das Produkt $C := \rho(t)f^3(t)$ konstant und es gilt die Friedmannsche Differentialgleichung*

$$(f')^2 + k = \frac{C}{3f}.$$

Insbesondere gibt es damit eine eindeutige Lösung der Friedmannschen Differentialgleichung bei gegebenen Anfangswerten $\rho(t_0)$ und $f(t_0)$.

Beweis. Für $\mathfrak{p} = 0$ sind die obigen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\rho f^2 &= (f')^2 + k \\ 0 &= 2 \frac{f''}{f} + \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} \end{aligned}$$

Hiervon gibt die erste Gleichung direkt die Friedmanngleichung, sobald man weiß, dass ρf^3 konstant ist. Differentiation der ersten Gleichung ergibt:

$$\frac{1}{3}\rho' f^2 + \frac{2}{3}\rho f f' = 2f' f''.$$

Andererseits ist

$$2f f' f'' \stackrel{\text{Bwg.gl.}}{=} -f^2 f' \left(\left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} \right) = -(f')^3 - k f' \stackrel{\text{Ener.gl.}}{=} -f' \frac{1}{3} \rho f^2$$

und ergibt zusammen mit der letzten Gleichung

$$0 = \rho' f^3 + 3\rho f^2 f' = (\rho f^3)'$$

und damit $C := \rho f^3$ konstant. □

Allgemein sind die Gleichungen (II.26) äquivalent zu:

$$\rho' = -3 \frac{f'}{f} (\rho + \mathfrak{p}) \quad (\text{II.27})$$

$$\frac{f''}{f} = -\frac{1}{3} (\rho + 3\mathfrak{p} - 2\Lambda) \quad (\text{II.28})$$

wovon die erste Gleichung auch aus thermodynamischen Überlegungen* folgt (Im Staubfall von oben ist

*Diese Gleichung ist dann der erste Hauptsatz der Thermodynamik.

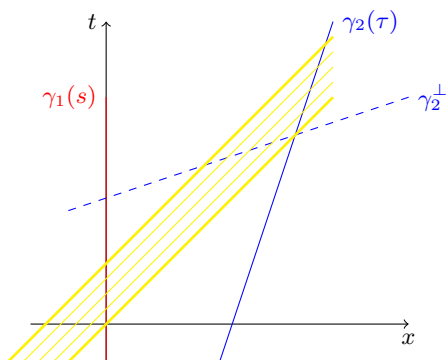


Abb. II.4.: ...

das $\rho f^3 = \text{konstant}$ und gleich der Massenerhaltung.) Die zweite Gleichung sagt aus, dass sowohl die Energiedichte ρ als auch der Druck \mathbf{p} die Expansionsrate des Raumes, also f'' verkleinert.

Bemerkung II.4.36. ('Astronomische Daten') Für Galaxien $p, q \in N$ ist der Abstand zum Zeitpunkt t gleich $f(t)d_N(p, q)$. Diesen Abstand und seine zeitliche Änderung kann man messen und man kann die sogenannte Hubble-Konstante* $H_0(t) := \frac{f'(t)}{f(t)}$ definieren. Der aktuelle Wert (2018[†] - Es gibt verschiedene Werte je nach Messmethode.) liegt bei ungefähr $68 - 74 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}$ (Also im Moment $f' > 0$ - 'expandierendes Universum').

Vorl. 15

Lemma II.4.37. Man kann dann nachrechnen, vgl. Ist $M = I \times_f N$, $t_0 \in I$, $H_0(t_0) > 0$ und $\rho + 3\mathbf{p} > 0$, dann ist $\inf I = t^*$ mit $t_0 - H_0(t_0)^{-1} < t^* < t_0$ und entweder ist $f' > 0$ oder I ist endliches Intervall.

Beweis. Aus (II.28) und $\rho + 3\mathbf{p} > 0$ folgt, $f'' < 0$. Demnach ist $f(t) \leq F(t) := f(t_0) + \underbrace{H(t_0)f(t_0)}_{=f'(t_0)}(t - t_0)$.

Wegen $H(t_0) > 0$, ist die Nullstelle $t_0 - H_0(t_0)^{-1}$ von $F(t)$ kleiner als t_0 . Da $f(t) \leq F(t)$ auf I ist und f positiv ist, muss $\inf I = t^*$ mit $t_0 - H_0(t_0)^{-1} < t^* < t_0$ sein.

Da $f'' < 0$ ist, ist entweder f' immer positiv oder f nimmt für ein ...

□

Definition II.4.38. big bang

II.4.5. Zur Messungen der Hubble-Konstante – Rotverschiebung

Ein Beobachter (der Emitter) sendet Licht in Richtung eines anderen Beobachter (dem Absorber). Der Emitter misst die Wellenlänge des Lichts bei der Abstrahlung und der Absorber im Moment des Eintreffens. Im Allgemeinen sind diese beiden Messergebnisse verschieden. Dieser Effekt heißt *Rotverschiebung*.

Rotverschiebung in der SRT

Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur den zweidimensionalen Minkowskiraum

Sei $\gamma_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(s) = (s, 0 \in \mathbb{R}) \in \mathbb{R}^2$ der Emitter und der Beobachter $\gamma_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ bewege sich mit konstanter räumlicher Geschwindigkeit v , also $\gamma_2(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(\tau, v\tau) + \gamma_0$.

Lichtartige Geodäten in \mathbb{R}^2 haben die Form $c(u) = c_0 + (u, \pm u)$ für ein $c_0 \in \mathbb{R}^2$.

Wir suchen die Schar von lichtartigen Geodätischen $c(s, u)$, die in $c(s, 0) = \gamma_1(s) = (s, 0)$ starten und später für ein $u = u(s)$ in γ_2 auftreffen – also $c(s, u(s)) = \gamma_s(\tau(s))$ für ein $\tau: I_1 \rightarrow I_2$. Wir wählen γ_0 , so dass $\tau(0) = 0$ ist – es hat also die Form $\gamma_0 = (a, a)$.

*die entgegen dem Namen zeitabhängig ist.

[†]<https://de.wikipedia.org/wiki/Hubble-Konstante>

[‡]Mpc=Megaparsec. 1 parsec ist die Entfernung, aus welcher der mittlere Erdbahnradius (= 1 AE, Astronomische Einheit), also der mittlere Abstand zwischen Sonne und Erde, unter einem Winkel von einer Bogensekunde erscheint und entspricht etwa 3,26 Lichtjahren bzw. 206000 Astronomischen Einheiten oder $\sim 3.1 \times 10^{16}$ m.

Es ist $\lambda^2 = -\eta((0, \lambda), (0, \lambda))$ und $(\lambda')^2 = -\eta(\gamma_2(\tau(\lambda)) - \gamma_0, \gamma_2(\tau(\lambda)) - \gamma_0) = \tau(\lambda)^2$, vgl. Abb. ??.
 Um $\tau(\lambda)$ zu berechnen, analysieren wir $c(s, u(s)) = \gamma_s(\tau(s))$. Daraus folgt

$$s + u(s) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\tau(s) + a$$

$$u(s) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}v\tau(s)a$$

Für $s = \lambda$ ist damit $\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1-v)\tau(\lambda)$.
 Zusammen ergibt sich

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}.$$

Rotverschiebung in der ART – im Allgemeinen

Sei (M, g) eine Lorentz-Mannigfaltigkeit. Auch hier haben wir einen Emittter $\gamma_1: I_1 \rightarrow M$ und einen Absorber $\gamma_2: I_2 \rightarrow M$. Sei $c(s, u)$ eine Schar lichtartiger Geodätische mit $c(s, 0) = \gamma_1(s)$ und $c(s, u(s)) = \gamma_2(\tau(s))$ für geeignete $u: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\tau: I_1 \rightarrow I_2$. Wir können die lichtartigen Geodätischen immer affin umparametrisieren, so dass $u(s) = 1$ für alle $s \in I_1$ ist. Weiterhin sei $\tau(0) = 0$. Damit haben wir insgesamt eine Variation lichtartiger Geodätischer $c: I_1 \times [0, 1] \rightarrow M$. Das zugehörige Variationsvektorfeld (ein Jacobifeld) ist $J(u) = \frac{d}{ds}|_{u=0}c(s, u)$. Nach Konstruktion ist $J(0) = \gamma_1'(0)$ und $J(1) = \gamma_2'(\tau(0))\tau'(0) \parallel \gamma_2'(0)$. γ_1 messe in $p:=\gamma_1(0)$ die Wellenlänge des Lichtes. Für kleine Wellenlänge (also hohen Frequenzen) führt γ_1 diese Messung im Limes im Tangentialraum in p aus – analog wie in der SRT. Analog γ_2 in $q:=c(0, 1) = \gamma_2(0)$. Damit ist

$$\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 = \frac{g_q(J(1), J(1))}{g_p(\gamma_1'(0), \gamma_1'(0))}.$$

Rotverschiebung in Schwarzschild

Rotverschiebung gehört zu den klassischen Tests der ART...

Wir betrachten hier den Spezialfall, dass der Emittter sich entlang $\gamma_1(s) = (s, r_1, \varphi_0, \theta_0)$ und der Absorber sich entlang $\gamma_2(\tau) = (\tau, r_2, \varphi_0, \theta_0)$ bewegt.*

Nach (II.21) gilt für die Spur lichtartiger Geodätischer $t(r) = \pm r_*(r) + t_0 = \pm(r + r_S \ln|\frac{r}{r_S} - 1|) + t_0$.
 Damit ist $c(s, u) = (r_*(r(u)) - r_*(r_1) + s, r(u), \varphi_0, \theta_0)$ mit $r(0) = r_1$. Dann ist $J(u) = (1, 0, 0, 0)$ und damit

$$\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 = \frac{g_{c(s,1)=(\tau(s), r_2, \varphi_0, \theta_0)}(J(1), J(1))}{g_{\gamma_1(0)}(\gamma_1'(0), \gamma_1'(0))} = \frac{1 - \frac{r_S}{r_2}}{1 - \frac{r_S}{r_1}}.$$

Rotverschiebung in ultrastatischen Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten eine ultrastatische Mannigfaltigkeit: $(M = I \times N, g = -dt^2 + h)$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist und (N, h) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

...

Rotverschiebung für konform äquivalente Metriken

Definition II.4.39. Sei (M, g) eine Lorentzsche oder Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\mu \in C^\infty(M, \mathbb{R}_{>0})$. Die Metrik $\tilde{g} = \mu^2 g$ (also $\tilde{g}_p(X, Y) = \mu^2(p)g_p(X, Y)$ für alle $p \in M$ und $X, Y \in T_p M$) heißt zu g *konforme Metrik* und μ heißt *konformer Faktor*.

*

II. Allgemeine Relativitätstheorie

Lemma II.4.40. Sei ∇ bzw. $\tilde{\nabla}$ der Levi-Civita Zusammenhang zu (M, g) bzw. (M, \tilde{g}) . Dann gilt

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \frac{Y(\mu)}{\mu} X + \frac{X(\mu)}{\mu} Y - \frac{\text{grad}_g \mu}{\mu} g(X, Y) \quad (\text{II.29})$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Beweis. Es reicht die Identität lokal nachzurechnen. Dazu seien x^α lokale Koordinaten. Seien Γ bzw. $\tilde{\Gamma}$ die Christoffelsymbole zu g bzw. \tilde{g} . Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma &= \frac{1}{2} \mu^{-2} g^{\gamma\delta} ((\mu^2 g_{\alpha\delta})_{,\beta} + (\mu^2 g_{\beta\delta})_{,\alpha} - (\mu^2 g_{\alpha\beta})_{,\gamma}) \\ &= \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \mu^{-1} (\mu_{,\beta} \delta_\alpha^\gamma + \mu_{,\alpha} \delta_\beta^\gamma - \underbrace{\mu_{,\gamma} g^{\gamma\delta}}_{=(\text{grad}_g \mu)^\delta \text{ wegen (II.7)}} g_{\alpha\beta}). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = X^\alpha Y^\beta (\tilde{\nabla}_\alpha \partial_\beta - \nabla_\alpha \partial_\beta)^* = \frac{Y(\mu)}{\mu} X + \frac{X(\mu)}{\mu} Y - \frac{\text{grad}_g \mu}{\mu} g(X, Y). \quad \square$$

Lemma II.4.41. Sei c eine lichtartige Geodätische einer Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) . Dann ist die Spur von c auch die Spur einer lichtartigen Geodätischen für $(M, \tilde{g} = \mu^2 g)$ und $\tilde{c}(s) = c(\psi(s))$ mit $\psi'(s) = (\mu(c(\psi(s))))^{-2}$ ist eine lichtartige Geodätische für \tilde{g} .

Beweis. Sei c lichtartige Geodätische für (M, g) . Dann ist

$$\tilde{\nabla}_{c'} c' = \nabla_{c'} c' + \frac{2d_{c'} \mu}{\mu} c' - \frac{\text{grad}_g \mu}{\mu} g(c', c') = \frac{2d_{c'} \mu}{\mu} c' \parallel c'.$$

Damit ist c das Bild einer Geodätischen in (M, \tilde{g}) . Wir suchen nun eine geeignete Umparametrisierung $\tilde{c}(u) = c(\psi(u))$, so dass \tilde{c} eine Geodätische ist: $\tilde{c}'(u) = c'(\psi(u))\psi'(u)$ und

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{c}'} \tilde{c}' = \tilde{\nabla}_{\psi' c'} (\psi' c') = (\psi')^2 \tilde{\nabla}_{c'} c' + \psi'' c' = \left((\psi')^2 + \psi'' \frac{2d_{c'} \mu}{\mu} \right) c'.$$

Setzen wir $\psi'(s) = (\mu(c(\psi(s))))^{-2}$, dann ist $(\psi')^2 + \psi'' \frac{2d_{c'} \mu}{\mu} = 0$ und damit $\tilde{\nabla}_{\tilde{c}'} \tilde{c}' = 0$. □

Folgerung II.4.42. Seien $\gamma_i: I_i \rightarrow \mathbb{R}$ Emitter und Absorber. Eine lichtartige Geodätische, die in $p = \gamma_1(0)$ starte komme in $q = \gamma_2(0)$ an. Sei r die zugehörige Rotverschiebung bzgl. (M, g) und r' die bzgl. $(M, \tilde{g} = \mu^2 g)$. Dann gilt $r' = r \frac{\mu(q)}{\mu(p)}$.

Beweis. □

Rotverschiebung für FLRW

Wir betrachten $(M = I \times N, -dt^2 + f(t)^2 h)$ mit (N, h) maximal symmetrische Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir wollen die Rotverschiebung hier auf die Rotverschiebung in ultrastatischen Mannigfaltigkeiten zurückführen. Dazu wollen wir schreiben:

$$-dt^2 + f(t)^2 h = a(\tau)^2 (-d\tau^2 + h).$$

Dafür muss $dt = a(\tau)d\tau$ und $f(t) = a(\tau)$ und wir können $\tau(t) = \int_{t_0}^t f(u)^{-1} du$ wählen.

Für den Spezialfall, dass $\gamma_i(s) = (s, n_i)$ für $n_i \in N$ fest, gibt es für den ultrastatischen Anteil $-d\tau^2 + h$ keine Rotverschiebung und damit ist die resultierende Rotverschiebung für FLRW nur durch den Quotienten der jeweiligen a Faktoren gegeben.

*Das ist auch die Rechnung, die zeigt, dass die Differenz zweier Zusammenhänge einer Mannigfaltigkeit, immer ein $(0, 2)$ -Tensor ist.

II.4.6. Andere kosmologische Modelle

Wir schauen uns nun noch andere (weniger verbreitete) kosmologische Modelle an, bei denen wir nicht mehr fordern, dass die Mannigfaltigkeit homogen und isotrop in allen Punkten sein soll.

Dazu schauen wir uns zuerst Mannigfaltigkeiten an, die zwar noch homogen in allen Punkten sind, aber nicht mehr zwingend isotrop sind.

Aus der Homogenität (vgl. Definition II.4.26) folgt, dass die Liealgebra der Killingvektorfelder mindestens n -dimensional ist. Die Mannigfaltigkeit ist dann lokal durch die Liealgebra bestimmt. Die Liealgebren sind klassifiziert – siehe Bianchi-Klassifikation. Die zugehörigen Raumzeiten nennt man Bianchi-Raumzeiten (also $M = I \times N$, $-dt^2 + h_t$ und (N, h_t) sei für alle t homogen. Es gibt konkrete Modelle dafür, für die man dann Geodätische etc. diskutieren kann. Wir schauen uns hier ein einfaches Beispiel an:

Beispiel II.4.43 (Kasner Raumzeit). Die Raumzeit $(\mathbb{R}^4, g = -dt^2 + t^{2p_1} dx^2 + t^{2p_2} dy^2 + t^{2p_3} dz^2)$ ist eine Lösung der Vakuum-Einsteingleichungen (für $\Lambda = 0$), falls $p_1 + p_2 + p_3 = (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 = 1$ ist. Hier ist t noch immer eine kosmische Zeit und die induzierte Riemannsche Metrik auf $\{t = \text{konstant}\}$ ist homogen in allen Punkten, aber nicht isotrop. Die Anisotropie ändert sich auch mit der Zeit t .

Alternativ könnte man für die Mannigfaltigkeit auch nur fordern, dass sie in allen Punkten isotrop ist. Doch daraus folgt schon, dass die Mannigfaltigkeit homogen in allen Punkten ist, vgl. Übungsaufgabe 29.

II.5. Kausalität

II.5.1. Grundlegende Begriffe

Definition II.5.1. Sei (M, g) eine Lorentz-Mannigfaltigkeit. Wir nennen (M, g) *zeitorientierbar*, falls es ein zeitartiges Vektorfeldes auf (M, g) gibt. Zwei zeitartige Vektorfelder X, Y seien *zeitorientierungsäquivalent*, falls $g(X, Y) < 0$ ist. Eine *Zeitorientierung* auf (M, g) ist, die Äquivalenzklasse zeitorientierungsäquivalenter zeitartiger Vektorfelder.

Beispiel II.5.2. In Minkowski...

Bemerkung II.5.3. Zeitorientierbarkeit ist vom Begriff der Orientierbarkeit zu unterscheiden: Eine Mannigfaltigkeit M^m heißt *orientierbar*, falls es m Vektorfelder gibt, die in jedem Punkt $p \in M$ der Mannigfaltigkeit eine Basis von $T_p M$ bilden. Während orientierbar nur von M abhängt, hängt zeitorientierbar von M und der Metrik g ab. Beispiele: ...

Wir betrachten im Folgenden zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit mit ..

Definition II.5.4. Ein Kurve $\gamma: I \rightarrow M$ heißt *zukunftsgerichtet* (bzw. *vergangenheitsgerichtet*), falls $g(X(\gamma(s)), \gamma'(s)) < 0$ (bzw. > 0) für alle $s \in I$ gilt. Seien $p, q \in M$. Dann schreiben wir $p \ll q$, falls es eine zukunftsgerichtete zeitartige Kurve von p nach q gibt. Wir schreiben $p < q$, falls es eine zukunftsgerichtete kausale Kurve von p nach q gibt (kausal heißt $g(\gamma'(s), \gamma'(s)) \leq 0$ für alle s). Weiterhin sei $p \leq q$, falls $p < q$ oder $p = q$ gilt.

Für $A \subseteq M$ sei

$$I_+(A) := \{q \in M \mid \exists p \in A : p \ll q\} \text{ die chronologische Zukunft von } A$$

$$J_+(A) := \{q \in M \mid \exists p \in A : p \leq q\} \text{ die kausale Zukunft von } A.$$

Analog sei $I_-(A)$ ($J_-(A)$) die chronologische (kausale) Vergangenheit von A . Wir setzen $I_\pm(p) := I_\pm(\{p\})$ und $J_\pm(p) := J_\pm(\{p\})$.

Bemerkung II.5.5. Es ist $I_\pm(A) = \cup_{p \in A} I_\pm(p)$ und $J_\pm(A) = \cup_{p \in A} J_\pm(p)$. Weiterhin ist \ll eine transitive Relation.

Satz II.5.6. Sei (M, g) eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Seien $p, q, r \in M$. Es gelte $p \ll q, q \leq r$ oder $p \leq q, q \ll r$. Dann folgt $p \ll r$.

II. Allgemeine Relativitätstheorie

Beweis. Sei $p \leq q, q \ll r$ (der andere Fall geht analog). Falls $p = q$, ist $p \ll r$ klar. Wir betrachten $p < q$. Dann gibt es eine kausale zukunftsgerichtete Kurve $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow M$ von p nach q und eine zeitartige zukunftsgerichtete Kurve $\gamma_2: [1, 2] \rightarrow M$ von q nach r . Sei $e(t)$ das parallele Vektorfeld längs γ_1 mit $e(1) = \gamma_2'(1)$, vgl. Übungsaufgabe 27. Sei $\gamma_1(s, t)$ eine Variation von γ_1 mit $\gamma_1(s, 0) = p$, $\gamma_1(0, t) = \gamma_1(t)$ und $\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} \gamma_1(s, t) = te(t)$. Wegen $e(1) = \gamma_2'(1)$ kann man die Variation so wählen, dass $\gamma_1(s, 1) = \gamma_2(1 + s)$ gilt.

Nach Voraussetzung ist $g(\partial_t \gamma_1(0, t), \partial_t \gamma_1(0, t)) \leq 0$ und wir haben

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} g(\partial_t \gamma_1, \partial_t \gamma_1) &= 2g(\nabla_{\partial_s \gamma_1} \partial_t \gamma_1, \partial_t \gamma_1) \Big|_{s=0} = 2g(\nabla_{\partial_t \gamma_1} \partial_s \gamma_1, \partial_t \gamma_1) \Big|_{s=0} \\ &= 2g(\nabla_{\partial_t \gamma_1} (te(t)), \partial_t \gamma_1(0, t)) = 2g(e(t), \partial_t \gamma_1(0, t)) < 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt, da sowohl $\gamma_1(t)$ als auch $e(t)$ zukunftsgerichtet und zeitartig sind. Also gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $g(\partial_t \gamma_1(s, t), \partial_t \gamma_1(s, t)) < 0$ für alle $s \in (0, \epsilon)$ und $t \in [0, 1]$.

Damit ist für jedes $s \in (0, \epsilon)$ die Kurve $c: [0, 2 - s] \rightarrow M$ mit $c|_{[0,1]} = \gamma_1(\cdot, s)$ und $c|_{[1,2-s]} = \gamma_2(\cdot + s)$ zeitartig. \square

Vorl. 17

Im Folgenden wollen wir den folgenden Satz

Satz II.5.7. Sei (M, g) eine zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann gibt es eine Umgebung U von p , so dass $g|_U$ zeitorientierbar ist und konvexe Normalenumgebung von p , d.h. es gibt eine offene Umgebung U von p , so dass für alle $q, r \in U$ es eine eindeutige Geodätische γ von q nach r gibt, die vollständig in U verläuft. Außerdem besteht für solch ein U die Menge $I_+(p)^U$ aus allen Punkten in U , die durch zukunftsgerichtete zeitartige Geodätische von p aus erreicht werden können. Hierbei bezeichnet $I_+(p)^U$ die chronologische Zukunft von p in der Lorentz-Mannigfaltigkeit $(U, g|_U)^*$.

(zum Teil) beweisen. Doch dazu benötigen wir zunächst ein paar technische Vorarbeiten:

Bemerkung II.5.8. Sei (M, g) Riemannsche oder Lorentz-Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$. Für $v \in T_p M$ bezeichnen wir mit c_v die eindeutig bestimmte Geodäte mit $c_v(0) = p$ und $\dot{c}_v(0) = v$. Dann gilt $c_{\alpha v}(t) = c_v(\alpha t)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$: Da $c_{\alpha v}(0) = c_v(0) = p$ und $\dot{c}_{\alpha v}(0) = \alpha \dot{c}_v(0) = \alpha v$ ist, reicht es zu zeigen, dass $\bar{c} := c_{\alpha v}$ wieder eine Geodätische ist:

$$\nabla_{\dot{\bar{c}}(t)} \dot{\bar{c}}(t) = \nabla_{\alpha \dot{c}_v(\alpha t)} \alpha \dot{c}_v(\alpha t) = \alpha^2 (\nabla_{\dot{c}_v} \dot{c}_v)(\alpha t) = 0.$$

Definition II.5.9. Die Exponentialabbildung $\exp_p: D_p \subseteq T_p M \rightarrow M$ ist definiert als $\exp_p(v) = c_v(1)$, wobei $D_p := \{v \in T_p M \mid 1 \text{ ist im maximalen Definitionsbereich von } c_v\}$.

Bemerkung II.5.10.

- (i) $\exp_p(0) = p$
- (ii) $\exp_p(tv) = c_{tv}(1) = c_v(t)$. Damit ist D_p sternförmig bezüglich 0.
- (iii) Das Differential $d_0 \exp_p: T_0 D_p = T_0 T_p M \rightarrow T_p M$ ist die Identität, sofern wir $T_0 T_p M \cong T_p M$ identifizieren:

$$d_0 \exp_p(v) = d_0 \exp_p \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (tv) \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_p(tv) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} c_v(t) = v.$$

- (iv) Die Exponentialabbildung ist glatt. Das folgt aus der glatten Abhängigkeit der Lösung der Geodäten-gleichung von den Anfangswerten, \square .

Folgerung II.5.11. Zu $p \in M$ existiert eine offene Umgebung $\mathcal{V}_p \subseteq D_p \subseteq T_p M$ von 0, so dass $\exp_p: \mathcal{V}_p \rightarrow \exp_p(\mathcal{V}_p) =: U_p$ ein Diffeomorphismus ist.

Beweis. Folgt aus der letzten Bemerkung und dem Umkehrsatz. \square

*I.A. gilt nicht $I_+(p)^U = I_+(p) \cap U$, vgl. Übungsaufgabe 30.

Folgerung II.5.12. Für (M, g) Lorentz-Mannigfaltigkeit und U_p wie oben, ist $(U_p, g|_{U_p})$ zeitorientierbar.

Beweis. Sei $v \in T_p M$ zeitartig. Wir setzen $X: x \in U_p \rightarrow X(x) \in T_x M$, wobei $X(x)$ der Paralleltransport von v entlang der eindeutig bestimmten Geodätischen von p nach x ist. Dass X zeitartiges nirgends verschwindendes Vektorfeld ist, folgt dann aus den Eigenschaften des Paralleltransports, vgl. Übungsaufgabe 27. \square

Lemma II.5.13 (Gauß-Lemma). Sei (M, g) Riemannsche oder Lorentz-Mannigfaltigkeit. Sei $p \in M$ und $v \in D_p \subseteq T_p M$. Dann gilt $g(d_{tv} \exp_p(w), d_{tv} \exp_p(v)) = g(w, v)$ für $w \in T_p M \cong T_{tv} T_p M$.

Beweis. Wir setzen $c: (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$, $(s, t) \mapsto \exp_p(t(v + sw))$. Dann ist $c(s, \cdot)$ für jedes s eine Geodätische und damit $c(s, t)$ eine geodätische Variation von $c(t) = c(0, t)$. Weiterhin ist $\frac{\partial c}{\partial t}(0, t) = (d_{tv} \exp_p)(v)$ und $\frac{\partial c}{\partial s}(0, t) = d_{tv} \exp_p(tw) = td_{tv} \exp_p(w)$. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g \left(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial s} \right) &= g \left(\underbrace{\nabla_{\dot{c}} \frac{\partial c}{\partial t}}_{=0 \text{ da Geod.}}, \frac{\partial c}{\partial t} \right) + g \left(\frac{\partial c}{\partial t}, \nabla_{\dot{c}} \frac{\partial c}{\partial s} \right) = g \left(\frac{\partial c}{\partial t}, \nabla_{\partial_s c} \frac{\partial c}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \partial_s g(\partial_t c, \partial_t c) = \frac{1}{2} \partial_s g(\partial_t c, \partial_t c) = \frac{1}{2} \partial_s g(v + sw, v + sw) = g(v, v) + sg(v, v). \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g \left(\frac{\partial c}{\partial t}(0, t), \frac{\partial c}{\partial s}(0, t) \right) &= g(v, v) \\ g \left(\frac{\partial c}{\partial t}(0, 0), \frac{\partial c}{\partial s}(0, 0) \right) &= g(v, 0) = 0. \end{aligned}$$

Damit ist $g(\frac{\partial c}{\partial t}(0, t), \frac{\partial c}{\partial s}(0, t)) = tg(v, v)$ und es folgt die Behauptung. \square

Im letzten Beweis haben wir auch direkt

Folgerung II.5.14. Sei $p \in M$, $v \in T_p M$ und $c(t) = \exp_p(tv)$ für $t \in [0, 1]$ definiert. Sei $w \in T_p M \cong T_{tv} T_p M$ und J das Jacobifeld längs c mit $J(0) = 0$ und $\nabla_{\dot{c}} J(0) = w$. Dann gilt für $t \in (0, 1]$

$$d_{tv} \exp_p(w) = \frac{J(t)}{t}.$$

nachgerechnet.

Beweis. Die geodätische Variation $c: (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$, $(s, t) \mapsto \exp_p(t(v + sw))$ aus dem letzten Beweis hat J als Variationsvektorfeld. Dann folgt die Behauptung direkt aus $\frac{\partial c}{\partial s}(0, t) = d_{tv} \exp_p(tw) = td_{tv} \exp_p(w)$. \square

Definition II.5.15. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $c: I \rightarrow M$ eine Geodätische. Dann heißen $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$ konjugierte Punkte längs γ , falls es ein nicht-triviales Jacobifeld J längs c mit $J(t_1) = 0$ und $J(t_2) = 0$ gibt.

Folgerung II.5.16. $d_v \exp_p$ ist genau dann nicht invertierbar, wenn p und $\exp_p(v)$ konjugierte Punkte längs $\exp_p(tv)$ sind.

Beweis. Da $d_v \exp_p: T_v T_p M \cong T_p M \rightarrow T_p M$ linear ist, ist es genau dann nicht invertierbar, wenn es nicht injektiv ist. Mit letzter Folgerung folgt so die Behauptung. \square

Beispiel II.5.17. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung $K = \kappa$. Sei $c_v: I \rightarrow M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Sei $t_1 = 0 \in I$. Nach Beispiel ?? haben Jacobifelder die Form $J(t) = (as_\kappa(t) + bc_\kappa(t))X(t)$, wobei X ein paralleles Vektorfeld längs c ist.

II. Allgemeine Relativitätstheorie

$\kappa \leq 0$ Jacobifelder haben maximal eine Nullstelle. Es gibt also keinen konjugierten Punkte und $d_v \exp_p$ ist für alle v im Definitionsbereich von \exp_p invertierbar.

$\kappa > 0$ Die zu t_0 konjugierten Punkte sind $t_0 + \frac{m\pi}{\sqrt{\kappa}}$ für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Auf der Sphäre sind also insbesondere p und $-p$ entlang jeder Geodäten konjugiert.

Lemma II.5.18. Sei (M, g) zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow T_p M$ eine (stückweise glatte) Kurve mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma([0, 1]) \in D_p = \text{dom } \exp_p \subseteq T_p M$. Sei $c := \exp_p \circ \gamma$ zeitartig (kausale/lichtartige) und zukunftsgerichtet. Dann gilt $\gamma(t) \in I_+ := \{x \in T_p M \mid g_p(x, x) < 0, x \text{ zukunftsgerichtet}\}$ (bzw. $\gamma(t) \in J_+ / \gamma(t) \in J_+ \setminus I_+$) für alle $t \in (0, 1]$.

Beweis. Wir betrachten den Fall, dass c zeitartig ist.

Sei $q: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto q(x) := g_p(x, x)$. Es ist $\dot{c}(0) = d_0 \exp_p(\dot{\gamma}(0)) = \dot{\gamma}(0)$. Damit ist $\dot{\gamma}(0)$ zeitartig und zukunftsgerichtet \square

Teilbeweis von Satz II.5.7. Sei $C_p \subseteq T_p M$ die Menge aller zeitartigen Vektoren in $T_p M$. Diese Menge ist das Innere eines Doppelkegels. Sei $q \in I_+(p)^U$. Dann gibt es eine zeitartige zukunftsgerichtete Kurve γ von p nach q . Wir setzen $\bar{\gamma}(t) = \exp_p^{-1}(\gamma(t))$. Nach letztem Lemma ist $\bar{\gamma}$ zeitartig und zukunftsgerichtet - also ist insbesondere $t\bar{\gamma}(1) \in I_+$ für alle $t \in (0, 1)$. Damit ist $c: [0, 1] \rightarrow M$, $t \mapsto \exp_p(t\bar{\gamma}(1))$ eine zeitartige Geodätische von p nach q .

Die Aussage für $q \in J_+(p)^U \setminus I_+(p)^U$ folgt analog. \square

Folgerung II.5.19. Sei (M, g) eine zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Sei $p \in M$ und $q \in J_+(p) \setminus I_+(p)$. Dann gibt es eine lichtartige Geodätische von q nach p .

II.5.2. Riemannsche vs. Lorentzeigenschaften

Existenz Riemannscher vs. Lorentzmetriken

Vorl. 18

Auf jeder Mannigfaltigkeit gibt es Riemannsche Metriken. Der Standardbeweis verwendet eine Überdeckung von M mit Karten $\kappa_i: U_i \subseteq M \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{R}^m$ und eine untergeordnete Zerlegung der Eins ρ_i (d.h. $\rho_i: M \rightarrow [0, 1]$ glatt, $\text{supp } \rho_i \subseteq U_i$, für jedes $p \in M$ sind höchstens endlich viele ρ_i nicht Null und $\sum_i \rho_i \equiv 1$.) Man setzt $g = \sum_i \rho_i \kappa_i^* g_E$ mit g_E die euklidische Metrik auf \mathbb{R}^m .

Der Hauptgrund, warum das funktioniert ist: Für g_1, g_2 Riemannsche Metriken auf M ist auch $tg_1 + (1-t)g_2$ für alle $t \in [0, 1]$ wieder eine Riemannsche Metrik. Das ist falsch für Lorentzmetriken, z.B. sind $g_1 = -dx^2 + dy^2$ und $g_2 = dx^2 - dy^2$ Lorentzmetriken auf \mathbb{R}^2 , aber $\frac{1}{2}(g_1 + g_2) \equiv 0$.

Satz II.5.20. Für eine glatte Mannigfaltigkeit sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Es gibt eine Lorentzmetrik auf M .
- (ii) Es gibt eine zeitorientierte Lorentzmetrik auf M .
- (iii) Es gibt ein nichtverschwindendes Vektorfeld auf M .
- (iv) M ist nichtkompakt oder M ist kompakt mit $\chi(M) = 0$.

Hierbei ist $\chi(M)$ die Eulercharakteristik von einer kompakten Mannigfaltigkeit M

$$\chi(M) := \sum_{p \in M, X(p)=0} \text{ind}_p X^*$$

für $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld mit isolierten Nullstellen.[†]

*Der Index $\text{ind}_p X$ berechnet sich als $\text{sgndet } Dv$, wobei $v: q \in \partial B_\epsilon(p) \subseteq M \rightarrow \frac{X(q)}{|X(q)|} \in S^{m-1}$ ist. Hier sei ϵ klein genug, so dass $B_\epsilon(p)$ als Teilmenge von \mathbb{R}^m mit euklidischer Metrik aufgefasst werden kann

[†]Oft wird $\chi(M)$ anders definiert, vgl. und diese Darstellung von $\chi(M)$ ist der Satz von Poincaré-Hopf.

Skizze. (iii) \leftrightarrow (iv) und (i) \rightarrow (iv) folgt aus Sätzen der Differentialtopologie, [,]

(ii) \rightarrow (i) und (ii) \rightarrow (iii) ist klar

(iii) \rightarrow (ii): Sei X das nichtverschwindende Vektorfeld. Nach obigen Ausführungen existiert eine Riemannsche Metrik g auf M . Dann ist $U:=X/\sqrt{|g(X, X)|}$ ein g -Einheitsvektorfeld. Wir setzen $\tilde{g} = g - 2U^\sharp \otimes U^\sharp$ und wollen zeigen, dass \tilde{g} eine zeitorientierte Lorentzmetrik ist: Dazu vervollständigen wir U in $p \in M$ zu einer g -Orthonormalbasis $u = U(p), e_2, \dots, e_n$ von T_pM . Dann ist $\tilde{g}(e_i, e_j) = g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $\tilde{g}(u, e_i) = g(u, e_i) = 0$ und $\tilde{g}(u, u) = -1$ und die Behauptung folgt. \square

Folgerung II.5.21. *Es gibt keine Lorentzmetrik auf S^2 .*

Beweis. Folgt aus letztem Satz und dem Satz vom Igel. \square

Abstandsbegriffe

Definition II.5.22. Für eine Kurve $\gamma: I \rightarrow M$ sei

$$L(\gamma) := \int_I \sqrt{|g(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))|} ds$$

die *Bogenlänge* von γ

Bemerkung II.5.23. Ist γ immer zeit- oder raumartig, so ist $L(\gamma)$ die gesamte Eigenzeit, die für γ auf ganz I vergeht, vgl. Abschnitt II.1.

Für Riemannsche Mannigfaltigkeiten kann man die *Riemannsche Abstandsfunktion* definieren:

$$d(p, q) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist eine Kurve von } p \text{ nach } q\}.$$

Dann ist die Riemannsche Mannigfaltigkeit mit (M, d) ein metrischer Raum (die induzierte Topologie ist gleich der ursprünglichen Topologie auf M).

Für Lorentzmetriken d ist keine hilfreiche Definitionen, da aus $p \ll q$ folgt, dass $d(p, q) = 0$ ist, vgl. Übungsaufgabe 4.

Was will man stattdessen von einer Abstandsdefinition? Falls es keine kausalen Kurven von p nach q gibt, soll der Abstand wie im Riemannschen

$$\inf\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ raumartige Kurve von } p \text{ nach } q\}$$

sein. Falls es kausale aber keine zeitartigen Kurven von p nach q gibt, ist nach Satz ?? jede dieser kausalen Kurven schon lichtartig und wir würden den Abstand 0 setzen. Gibt es zeitartige Kurven von p nach q , dann soll maximieren Geodätische lokal die Länge von solch zeitartigen Kurven, d.h. der Abstand sollte mit

$$\sup\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ zeitartige Kurve von } p \text{ nach } q\}$$

gehen.

Um auch die Information, ob die Punkte durch kausale Kurven erreichbar ist, zu kodieren, führt man oft noch ein Vorzeichen ein zum Beispiel mit dem *Lorentzschen Abstandskwadrat*:

$$\sigma(p, q) := \begin{cases} -\sup\{L(\gamma)^2 \mid \gamma \text{ kausale Kurve von } p \text{ nach } q\} & \dots \\ \inf\{L(\gamma)^2 \mid \gamma \text{ raumartige Kurve von } p \text{ nach } q\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Hierbei, benutzen wir die Konvention, dass das Infimum über die leere Menge unendlich sei.

Lemma II.5.24. *Es gilt*

$$\sigma(p, q) = \inf\left\{ \int_0^1 g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \mid \gamma: [0, 1] \rightarrow M \text{ Kurve von } p \text{ nach } q, g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \equiv \text{konst} \right\}$$

II. Allgemeine Relativitätstheorie

Beweis. Es ist nach Cauchy-Schwarz $L(\gamma)^2 \leq \int_0^1 |g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})|$ mit Gleichheit genau dann, wenn $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ konstant ist. Damit ist für p und q zeitartig zueinander $L(\gamma)^2 \leq -\int_0^1 g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$. Also $\sup L(\gamma)^2 \leq -\inf \int_0^1 g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \dots$ Analog zeigt man die Gleichheit, falls p und q lichtartig oder raumartig zueinander liegen. \square

Beispiel II.5.25. Es gibt selbst für (M, g) zeitorientiert und $q \in I_+(p)$ i.A. auch raumartig glatte Kurven von p nach q :

Es gibt zwischen je zwei Punkten im Minkowskiraum der Dimension ≥ 3 immer eine glatte raumartige Kurve (man kann spiralförmige Kurven von p nach q mit beliebig kleinen Anstieg finden und wenn der Anstieg klein genug ist, ist die Kurve raumartig).

Vollständigkeitsbegriffe

Für Riemannsche Mannigfaltigkeiten gibt es den Satz von Hopf-Rinow, vgl. ??, der unter anderem sagt, dass Vollständigkeit von M aus metrischer Raum $(M, d)^*$ mit d der Riemannschen Abstandsfunktion äquivalent zur geodätischen Vollständigkeit ist.

Definition II.5.26. Wir nennen eine Riemannsche oder Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) *geodätische vollständig*, falls für alle $p \in M$ und $v \in T_p M$ es eine Geodätische $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$ gibt.

Lemma II.5.27. *Eine Geodätische $\gamma: [0, b) \rightarrow M$ einer Riemannschen oder Lorentz-Mannigfaltigkeit ist genau dann als Geodätische nicht erweiterbar, wenn sie auch als Kurve nicht stetig erweiterbar ist.*

Beweis. Sei γ als Geodätische nicht erweiterbar. Die andere Richtung ist klar. Wir nehmen an, dass γ als Kurve eine stetige Erweiterung $\tilde{\gamma}: [0, b] \rightarrow M$ hat. O.B.d.A. sei $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \text{konst.}$ Sei U_p eine konvexe Normalenumgebung um $p := \gamma(b)$. Dann gibt es ein t_0 nahe b und eine offene Umgebung $U' \subseteq U_p$ um $\gamma(t_0)$, so dass $p \in U'$. Auf U' wählen wir geodätische Normalkoordinaten. Dann ist die radiale Geodätische $c(s)$ durch $c(0) = \gamma(t_0)$ mit Anfangsgeschwindigkeit $c'(0) = \gamma'(t_0)$ für $s < 0$ unsere Geodätische γ . Damit ist diese auf $t = b$ und darüber hinaus erweiterbar. \square

Definition II.5.28. Eine Lorentz-Mannigfaltigkeit heißt *zeitartig (lichtartig/raumartig/kausal) vollständig*, falls alle zeitartigen (lichtartigen/raumartigen/kausalen) Geodätischen auf ganz \mathbb{R} definiert sind.

Bemerkung II.5.29. Aus geodätisch vollständig folgt zeitartig (lichtartig/raumartig/kausal) vollständig.

Beispiel II.5.30. (i) Der Schwarzschildraum ist weder licht-/zeitartig noch raumartig? vollständig.

(ii) Sei (\mathbb{R}^2, η) der zweidimensionale Minkowskiraum und $\mu: (t, x) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ glatt, so dass gilt:

- $\mu = 1$ auf $\{x < -1\} \cup \{x > 1\}$
- $\mu(t, x) = \mu(t, -x)$
- $t^2 \mu(t, 0) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

Dann ist $(\mathbb{R}^2, \mu^2 \eta)$ lichtartig und raumartig vollständig, da Aber $(\mathbb{R}^2, \mu^2 \eta)$ ist nicht zeitartig vollständig.

(iii) Im Riemannschen sind kompakte Mannigfaltigkeiten immer geodätisch vollständig. Im Lorentzschon stimmt das nicht:

Betrachten wir $(M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, g = \frac{2dx dy}{x^2 + y^2})$. Dann ist g Lorentzmetrik. Man kann nachrechnen, dass $\gamma(t) = ((1-t)^{-1}, 0)$ ist eine Geodätische ist, die in endlicher Eigenzeit $0 \in \mathbb{R}^2$ erreicht. Damit ist M nicht geodätisch vollständig, aber natürlich nicht kompakt.

Nun ist $f^n: (x, y) \mapsto (2^n x, 2^n y)$ ist eine Isometrie von M für alle $n \in \mathbb{Z}$. Identifizieren wir Punkte, die durch die Isometrie auseinander hervorgehen, erhalten wir den Torus als Quotientenmannigfaltigkeit. \dagger Da f eine Isometrie ist, haben wir auch auf \mathbb{T}^2 dann g als Lorentzmetrik und die Geodätische γ ist auch noch Geodätische auf \mathbb{T}^2 , die sich nun in endlicher Eigenzeit unendlich oft um den Torus wickelt. Also ist auch (\mathbb{T}^2, g) – der *Clifton-Pohl Torus* – nicht geodätisch vollständig.

*d.h. jede Cauchyfolge konvergiert

\dagger ..

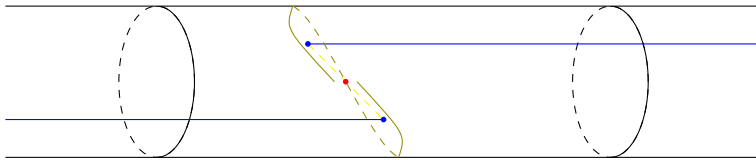
II.5.3. Global hyperbolisch

Wir haben bis jetzt gesehen, dass auf einer allgemeinen Lorentz-Mannigfaltigkeit man relativ weit von der Situation von geodätischen vollständigen Mannigfaltigkeiten im Riemannschen entfernt. Z.B. ist schon die Existenz von Geodätischen, die das Lorentzsche Abstandsquadrat realisieren i. A. nicht gegeben, vgl. Übungsaufgabe 34.

Definition II.5.31. Die Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) erfüllt die *Kausalitätsbedingung*, falls es keine geschlossenen kausalen Kurven gibt. Sie erfüllt die *starke Kausalitätsbedingung*, falls es keine fast geschlossenen kausalen Kurven gibt, d.h. für alle $p \in M$ und jede offene Umgebung U von p gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von p , so dass jede kausale Kurve, die in V startet und endet vollständig in U verläuft.

Beispiel II.5.32.

- (i) Die Gödelraumzeit aus Übungsaufgabe 32 erfüllt nicht die Kausalitätsbedingung.
- (ii) Ist (M, g) eine kompakte Lorentz-Mannigfaltigkeit, dann gibt es eine geschlossene zeitartige Kurve, vgl. Übungsaufgabe 35.
- (iii) Ein Beispiel für eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, die die Kausalitätsbedingung aber nicht die starke Kausalitätsbedingung erfüllt, ist ein Zylinder $(S^1 \times \mathbb{R}, -dt^2 + dx^2)$ bei zwei blaue Strahlen wie im Bild herausgeschnitten wurden:



Lemma II.5.33. Sei (M, g) eine zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Sei $K \subseteq M$ kompakt und es gelte die starke Kausalitätsbedingung auf (K, g) . Sei $c: [0, s \leq \infty) \rightarrow M$ eine zukunftsgerichtete, in der Zukunft nichterweiterbare, kausale Kurve mit $c(0) \in K$. Dann existiert ein $s_0 \in (0, s)$, so dass $c(t) \notin K$ für alle $t \in (s_0, s)$.

Vorl. 19

Beweis. Wir beweisen, dass durch Widerspruch. Sei also $(s_i)_i$ eine Folge in $(0, b)$ mit $s_i < s_{i+1}$, $s_i \rightarrow s$ und $c(s_i) \in K$. Da K kompakt ist, gilt (ggf. nach Übergang zu einer Teilfolge) $c(s_i) \rightarrow p \in K$ für $i \rightarrow \infty$. Da c zukunfts-nichterweiterbar ist, gibt es $(t_i)_i$ aus $(0, s)$ mit $t_i < t_{i+1}$, $t_i \rightarrow s$ und $c(t_i) \rightarrow p$. Es gibt eine Umgebung U von p , so dass nach Übergang zu weiterer Teilfolge $c(t_i) \notin U$ und $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < s_3 < \dots$ ist. Für jede Umgebung $V \subseteq U$ von p und i hinreichend groß gilt $c(s_i), c(s_{i+1}) \in V$ aber wegen $c(t_i) \notin U$ liegt $c([s_i, s_{i+1}])$ nicht vollständig in U . Das ist ein Widerspruch zur starken Kausalitätsbedingung. \square

Von nun an sei (M, g) eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit.

Lemma II.5.34. Sei $p < q \in M$ und $J(p, q)$ kompakt. Es gelte die starke Kausalitätsbedingung auf $J(p, q)$. Dann existiert eine kausale Geodätische von p nach q mit Länge $\sqrt{-\sigma(p, q)}$.

Beweis. Für $p = q$ ist die Behauptung klar. Sei also $p \neq q$. Seien $c_i: [0, 1] \rightarrow M$ zukunftsgerichtete kausale Kurven (und damit $c_i([0, 1]) \subseteq J(p, q)$) mit $c_i(0) = p$, $c_i(1) = q$ und $L(c_i) \rightarrow d := \sqrt{-\sigma(p, q)}$.

Wir zeigen, dass es einen zukunftsgerichteten kausaler geodätischer Polygonzug γ von p nach q mit $d = L(\gamma)$ gibt:

Sei \mathcal{K} eine endliche Überdeckung von Kompakta K , wobei jedes K der Abschluss einer konvexen Normalenumgebung sein soll. Deren Existenz folgt aus Satz II.5.7 und der Kompaktheit von $J(p, q)$. Sei $K_1 \subseteq \mathcal{K}$ mit $p \in K_1$. O.B.d.A. sei $q \notin K_1$ sonst folgt die Existenz der kausalen Geodätischen von p nach q aus Satz II.5.7. Dann folgt nach Lemma II.5.33, dass für jedes i ein $t_i^1 \in [0, 1]$ gibt, mit $c_i(t) \notin K_1$ für alle $t \in (t_i^1, 1]$. Sei t_i^1 jeweils das größte Element in $[0, 1]$, was das erfüllt (existiert, da K_1 kompakt ist). Dann ist $c_i(t_i^1) \in \partial K_1 \subseteq K_1$, eine Teilfolge von $c_i(t_i^1)$ konvergiert gegen ein $p_1 \in \partial K_1$. Sei $K_2 \in \mathcal{K}$ derart, dass p_1 im Inneren von K_2 liegt. Nach Übergang zu einer Teilfolge sind auch $c_i(t_i^1) \in K_2$. Ist nun $q \in K_2$ setzen wir $p_2 = q$, sonst verwenden wir wieder Lemma II.5.33 und erhalten $t_i^2 \in [0, 1]$ mit $c_i(t_i^2) \in \partial K_2$

II. Allgemeine Relativitätstheorie

und $c_i(t) \notin K_2$ für alle $t \in (t_i^2, 1]$. So gehen wir schrittweise weiter vor und erhalten (da \mathcal{K} endlich ist), endliche Folgen $(t_i^j)_{j=0, \dots, n}$ mit $t_0 = 0$ und $t_i^n = 1$ und $(p_j)_{j=0, \dots, n}$ mit $p_0 = p$ und $p_n = q$. Nach Satz II.5.7 gibt es zwischen p_j und p_{j+1} jeweils eine eindeutige Geodätische. Auch p_j und p_{j+1} liegen als Limes von Endpunkten kauzaler Kurven wieder kausal zueinander. Es ist

$$d = \lim_{i \rightarrow \infty} L(c_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n L(c_i|_{[t_i^{j-1}, t_i^j]}) \leq \sum_{j=1}^n \sqrt{-\sigma(p_{j-1}, p_j)}.$$

Also gilt schon Gleichheit und wir haben den gesuchten Polygonzug.

Es bleibt noch zu zeigen, dass Polygonzug schon eine Geodätische von p nach q ist. Dies folgt aus der Extremalität der Länge des Polygonzuges und Übungsaufgabe 37. \square

Das letzte Lemma motiviert insbesondere die folgende Definition:

Definition II.5.35. Eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *global hyperbolisch*, falls die starke Kausalitätsbedingung erfüllt ist und falls für alle $p, q \in M$ die $J(p, q) := J_+(p) \cap J_-(q)$ (die sogenannten *Diamanten*) kompakt ist.

Beispiel II.5.36. Beispiele, wo die starke Kausalitätsbedingung (bzw. sogar die Kausalitätsbedingung) nicht erfüllt ist, haben wir schon in Beispiel II.5.32 gesehen. Für das Beispiel aus Übungsaufgabe 34, welches isometrisch zur universellen Überlagerung des zweidimensionalen Anti-de Sitterraum ist, gibt es nicht kompakte Diamanten: Da die Metrik konform zur Minkowskimetrik ist, sind die Lichtkegel die gleichen wie für den Minkowskiraum, vgl. Lemma II.4.41. Also ist $J_-((0, \pi)) \cap J_+((0, 0)) \subseteq \mathbb{R} \cap (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nicht kompakt.

Die nächsten beiden Sätze werden von der Idee her ähnlich gezeigt, wie das letzte Lemma.

Satz II.5.37. Sei (M, g) global hyperbolisch. Dann ist das Lorentzsche Abstandskadrat immer endlich und $\sigma: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Satz II.5.38. Die Relation \leq ist abgeschlossen in global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten, d.h. für konvergente Folgen $p_i \rightarrow p$ und $q_i \rightarrow q$ mit $p_i \leq q_i$ folgt $p \leq q$.

Um global hyperbolisch noch auf eine Weise charakterisieren zu können, die später sehr hilfreich sein wird, brauchen wir zunächst noch ein paar Begriffe.

Definition II.5.39. Eine *Cauchyhyperfläche* einer zeitorientierten Lorentz-Mannigfaltigkeit ist eine Teilmenge $\Sigma \subseteq M$, die von jeder nichterweiterbaren zeitartigen Kurve genau einmal getroffen wird. Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt *achronal*, falls es keine Punkte $p, q \in A$ mit $p \ll q$ gibt.

Bemerkung II.5.40.

- (i) Zwar deutet der Name Cauchyhyperfläche darauf hin, dass es sich wahrscheinlich um eine Hyperfläche handelt (und wir werden gleich noch sehen, in welchem Sinne das richtig ist), aber das ist erst einmal nicht klar.
- (ii) Jede Cauchyhyperfläche ist achronal.

Beispiel II.5.41. ..Minkowskiraum ... Bilder kommen noch

Satz II.5.42. Sei $S \subseteq M$ eine Cauchyhyperfläche. Dann gilt

- (i) $M = I_+(S) \sqcup S \sqcup I_-(S)$
- (ii) $S = \partial I_+(S) = \partial I_-(S)$.
- (iii) S ist eine abgeschlossene topologische Hyperfläche (siehe folgende Definition).
- (iv) Jede nichterweiterbare kausale Kurve trifft S .

Definition II.5.43. Eine Teilmenge S einer n -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit M heißt *topologische k -dimensionale Untermannigfaltigkeit*, falls es zu jedem Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von p gibt und einen Homöomorphismus $\kappa: U \rightarrow V$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\kappa(U \cap S) = V \cap (\{0 \in \mathbb{R}^k\} \times \mathbb{R}^{n-k})$. Ist $k = n - 1$, heißt S *topologische Hyperfläche*. Ist κ sogar ein Diffeomorphismus, ist S eine *glatte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit* bzw. *glatte Hyperfläche* von M .

Beweis von Theorem II.5.42. (i) Sei $p \in M$ und c eine nichterweiterbare zeitartige Kurve durch p . Da S Cauchyhyperfläche ist, trifft c S , sagen wir in q . Dann ist $p \in I_-(S) \cup S \cup I_+(S)$ und damit $M = I_-(S) \cup S \cup I_+(S)$. Es bleibt zu zeigen, dass dies eine disjunkte Vereinigung ist. Wäre $q \in I_\pm(S) \cap S$, so gäbe es eine zeitartige Kurve, die S zweimal trifft, was nicht möglich ist, da S Cauchyhyperfläche ist. Analog sieht man $q \notin I_-(S) \cap I_+(S)$.

(ii) Wir zeigen nur die erste Gleichheit, die zweite folgt analog. Es gilt $S \subseteq \partial I_+(S)$ für jede Teilmenge S . Weiterhin ist $M \setminus I_-(S) = I_+(S) \cup S$ und mit Übungsaufgabe 31.i ist $I_+(S) \cup S$ abgeschlossen. Also ist $\partial I_+(S) = \overline{I_+(S)} \cap M \setminus I_+(S) \subseteq (I_+(S) \cup S) \cap (I_-(S) \cup S) = S$.

(iii) Sei $p \in S$ und U eine Koordinatenumgebung von p gegeben durch eine Karte $\kappa: U \rightarrow \kappa(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. O.B.d.A. sei ∂_{x^0} zeitartig und zukunftsgerichtet, und es gibt eine Umgebung $V \subseteq U$ von p mit $\kappa(V) = (-\epsilon, \epsilon) \times N \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ und $\{x \in V \mid x^0 = -\epsilon\} \subseteq I_-(p)^U$ und $\{x \in V \mid x^0 = \epsilon\} \subseteq I_+(p)^U$.

Vorl. 20

Für $y \in N \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ ist die Kurve $[-\epsilon, \epsilon] \rightarrow V, s \mapsto \kappa^{-1}(s, y)$ zeitartig (nach Wahl von x^0) und trifft S . Da S Cauchyhyperfläche ist, ist dieser Schnittpunkt eindeutig bestimmt und bestimmt damit ein eindeutiges $h(y) \in [-\epsilon, \epsilon]$ mit $\kappa^{-1}(h(y), y) \in S$. Die Projektion von κ auf die erste Komponente nennen wir κ_1 , die auf die letzten $n - 1$ -Komponenten nennen wir κ_2 . Dann ist $\tilde{\kappa}: V \rightarrow \mathbb{R} \times N, v \mapsto (\kappa_1(v) - h(\kappa_2(v)), \kappa_2(v))$. Dies ist eine Bijektion aufs Bild.

Da κ ein Diffeomorphismus ist, müssen wir nun um zu zeigen, dass S wirklich eine topologische Hyperfläche ist, müssen wir nur noch zeigen, dass $h: N \rightarrow [-\epsilon, \epsilon]$ stetig ist: Wir zeigen das per Widerspruch. Sei also $y_i \rightarrow y$ in N , aber $h(y_i) \not\rightarrow h(y)$. Wegen $h(y_i) \in [-\epsilon, \epsilon]$ muss (ggf. nach Übergang zu einer Teilfolge) $h(y_i)$ konvergieren gegen ein $s_0 \in [-\epsilon, \epsilon]$. Da $s_0 \neq h(y)$ und x^0 zeitartig, ist $\kappa^{-1}(s_0, y) \subseteq I_+(q)^V \cap I_-(q)^V$ für $q = \kappa^{-1}(h(y), y)$. Wegen Offenheit von $I_\pm(q)^V$ in V ist $\kappa^{-1}(h(y_i), y_i) \in I_+(q)^V \cap I_-(q)^V$ für i groß genug. Das widerspricht aber der Achronalität von S .

Die Abgeschlossenheit von S folgt aus (ii).

(iv) Wir beweisen das per Widerspruch: Sei also c kausale nichterweiterbare Kurve in M , die S nicht trifft. O.B.d.A. sei $c \subseteq I_+(S)$ (sonst muss $c \subseteq I_-(S)$ gelten und die Argumentation ist analog). Wähle p auf c und $q \in I_+(p)^{M \setminus S}$.

Wir überlegen uns, dass dann existiert eine in M vergangenheitsnichterweiterbare zeitartige Kurve γ in $I_+(S) \subseteq M \setminus S$, die in q startet: Wir setzen γ maximal zeitartig fort. Dann muss γ S treffen. \square

Vorl. 21

Folgerung II.5.44. *Besitzt (M, g) eine Cauchyhyperfläche S , dann ist S homöomorph zu $\mathbb{R} \times S$. Alle Cauchyhyperflächen von (M, g) sind homöomorph S .*

Ist S sogar glatt, dann ist M diffeomorph zu $\mathbb{R} \times S$ und alle glatten Cauchyhyperflächen sind diffeomorph zu S .

Beweis. Da (M, g) zeitorientiert ist, gibt es ein glattes zeitartiges Vektorfeld X . Wir wählen eine geodätisch vollständige Riemannsche Metrik \tilde{g} auf X (existiert immer nach [8]) und setzen $Y := \frac{X}{\sqrt{\tilde{g}(X, X)}}$. Dann ist Y ein beschränktes Vektorfeld bzgl. der Metrik g und damit ein vollständiges Vektorfeld nach [], d.h. der Fluss $\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ von Y existiert für alle Zeiten, vgl. Seite 42. Wir setzen

$$\Phi: \mathbb{R} \times S \rightarrow M, (s, p) \mapsto \varphi(s, p).$$

Da S eine Cauchyhyperfläche ist, ist Φ bijektiv. Da φ glatt ist, richtet sich die Regularität von Φ nach der Regularität von S .

Sei \tilde{S} eine topologische (bzw. glatte) Cauchyhyperfläche. Sei $s: M \rightarrow \mathbb{R}$ und $\rho: m \rightarrow s$ definiert durch $(s(p), \rho(p)) := \Phi^{-1}(p)$. Dann sind s und ρ stetig (bzw. glatt). Dann ist $\rho: \tilde{S} \rightarrow S, p \mapsto \rho(p)$, bijektiv: Wäre

II. Allgemeine Relativitätstheorie

$\rho(p_1) = \rho(p_2)$, dann wäre $\varphi_s(p_1) = p_2$ für ein $s \in \mathbb{R}$. Da es der Fluss eines zeitartigen Vektorfeldes und \tilde{S} eine Cauchyhyperfläche ist, muss $s = 0$ und damit $p_1 = p_2$ sein. Analog sieht man Surjektivität. Mit dem gleichen φ kann man eine bijektive stetige (bzw. glatte) Umkehrabbildung $S \rightarrow \tilde{S}$ konstruieren. \square

Kommen wir zurück zu global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten und die Verbindung zu Cauchyhyperflächen.

Satz II.5.45. (Geroch 1970) Für eine global hyperbolische Mannigfaltigkeit (M, g) existiert eine stetige und surjektive Abbildung $t: M \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $t^{-1}(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ eine Cauchyhyperfläche ist und $t \circ \gamma$ für jede zukunftsgerichtete kausale Kurve γ streng monoton steigend ist.

Beweisskizze. Wir wählen eine Riemannsche Metrik h auf M , so dass (M, h) endliches Volumen besitzt. Diese existiert: Sei h irgendeine Riemannsche Metrik auf M und $(K_i)_i$ eine kompakte Ausschöpfung von M (also $\emptyset = K_0 \dots \subseteq K_i \subseteq K_{i+1} \subseteq \dots$, K_i kompakt und $\cup_i K_i = M$). Wir setzen $\tilde{h} = f^2 h$ mit $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}_{>0})$ und $f^n|_{K_{i+1} \setminus K_i} \leq 2^{-i} \text{vol}(K_{i+1} \setminus K_i, h)^{-1}$. Dann ist

$$\text{vol}(M, \tilde{h}) = \sum_i \text{vol}(K_{i+1} \setminus K_i, \tilde{h}) = \sum_i \int_{K_{i+1} \setminus K_i} f^n \text{dvol}_h \leq \sum_i 2^{-i} < \infty.$$

Wir setzen $t: M \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto \ln \frac{\text{vol}(J_-(p), \tilde{h})}{\text{vol}(J_+(p), \tilde{h})}$. Man muss zeigen, dass t stetig ist (darauf verzichten wir in dieser Skizze).

Ist $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine kausale zukunftsgerichtete Kurve, dann ist $J_-(\gamma(s_1)) \subseteq J_-(\gamma(s_2))$ und $J_+(\gamma(s_2)) \subseteq J_+(\gamma(s_1))$ für $s_1 < s_2$. Also ist $t \circ \gamma$ streng monoton steigend. Ist γ nichterweiterbar als kausale zukunftsgerichtete Kurve, gilt $\cap_{s \in (a, a+\epsilon)} J_-(\gamma(s)) = \emptyset$ und $\cap_{s \in (b-\epsilon, b)} J_+(\gamma(s)) = \emptyset$ und damit $\lim_{s \rightarrow a} t(\gamma(s)) = -\infty$ und $\lim_{s \rightarrow b} t(\gamma(s)) = \infty$. Damit ist t insbesondere auf jeder nichterweiterbaren kausalen Kurve surjektiv und damit auch auf ganz M surjektiv.

Aus der Surjektivität und strengen Monotonie von t auf einer nichterweiterbaren zeitartigen Kurve γ und der Stetigkeit von t folgt, dass $t^{-1}(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ eine Cauchyhyperfläche ist. \square

Es wurde schon lange geglaubt, dass man auch immer eine glatte Cauchyhyperfläche finden kann, allerdings hat es bis 2005 gedauert, bis das vollständig bewiesen wurde:

Satz II.5.46. (Bernal-Sanchez [1]) Ein (M, g) Lorentz-Mannigfaltigkeit ist genau dann global hyperbolisch, wenn (M, g) isometrisch zur glatten Produktmannigfaltigkeit $(\mathbb{R} \times S, -\beta dt^2 + h_t)$, wobei $t: \mathbb{R} \times S \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die erste Koordinate ist, $\beta: \mathbb{R} \times S \rightarrow (0, \infty)$ glatt, h ein symmetrischer $(0, 2)$ -Tensor auf $\mathbb{R} \times S$ und $\{t\} \times S$ für alle t eine glatte Cauchyhyperfläche mit Riemannsche Metrik $g|_{\{t\} \times S} = h_t$ ist.

II.6. Singularitäten

Bei der Schwarzschildmetrik in Abschnitt II.3.6 haben wir uns schon im Ansatz damit beschäftigt, wie schwierig es ist, eine gute Definition für Singularitäten zu finden bzw. erst einmal eine Intuition, was das überhaupt sein soll. Für die Schwarzschildmetrik hatten wir gesehen, dass $r = r_S$ nur eine Koordinatensingularität ist und nach Einführung neuer Koordinaten kein Problem mehr darstellte. In $r = 0$ hingegen explodiert der Kretschmannskalar $|R|_g^2$, der unabhängig der gewählten Koordinaten ist. Das konnte damit keine Koordinatensingularität sein - man nennt dieses Phänomen eine gravitative Singularität.

Auch bei den FLRW-Raumzeiten hatten wir unter bestimmten Annahmen an die Hubblekonstante, der Energiedichte ρ und dem Druck p gesehen, dass es einen big bang oder big crunch geben muss, vgl. Lemma II.4.37. Auch das würden wir gerne als Singularität begreifen.

Oft verwendete Definition von Singularitäten sind z.B. Eine zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit ist singular, wenn sie zeitartig oder lichtartig geodätisch unvollständig ist.

Zeitartig geodätisch unvollständig bedeutet insbesondere, dass ein zeitartiger Beobachter nach endlicher Eigenzeit aufhört zu existieren - man sagt, er sei in einer 'Singularität verschwunden'. Lichtartig geodätisch unvollständig ist weniger plausibel, warum dass auf ein singuläres Verhalten sein soll. Wahrscheinlich

bildet diese Definition nur ab, dass es manchmal leichter ist, lichtartig geodätisch unvollständig zu zeigen und es meines Wissens nach noch kein Beispiel gefunden einer zeitorientierten Lorentz-Mannigfaltigkeit gefunden wurde, die zwar zeitartig geodätisch vollständig, aber nicht lichtartig geodätisch vollständig ist. Der umgekehrte Fall kann allerdings auftreten, vgl. Beispiel II.5.30.ii.

Wir wollen uns nun das erste Singularitätentheorem für eine größere Klasse von Mannigfaltigkeiten anschauen:

II.6.1. Singularitätentheorem von Raychaudhuri und Komar

Satz II.6.1 (\sim Raychaudhuri [], Komar []). Sei $(M = I \times U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, g = -dt^2 + g_{ij}(t)dx^i \otimes dx^j)$ nicht flach und Lösung der Einsteingleichung mit $\Lambda = 0$. Es gelte $T_{00} + \frac{1}{2}\text{tr}_g T \geq 0$ und $T_{00} \geq 0$ mit $\text{tr}_g T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$. Falls $T_{00} \equiv 0$ gilt, sei schon $T_{\mu\nu} = 0$. Dann ist I ein endliches Intervall. Insbesondere ist M nicht zeitartig geodätisch vollständig.

Bemerkung II.6.2. Falls T der Energieimpulstensor einer perfekten Flüssigkeit mit Strömungsvektorfeld $V = \partial_t$ ist, vgl. (II.25), also $T_{00} = \rho$, $T_{ii} = \mathfrak{p}$ und $T_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$. Dann entspricht $T_{00} + \frac{1}{2}\text{tr}_g T \geq 0$, der Bedingung $\rho + 3\mathfrak{p} \geq 0$. Das $\rho + 3\mathfrak{p}$ kam schon bei FLRW in (II.28) und Lemma II.4.37 vor. D.h. insbesondere, dass Lemma II.4.37 ein Spezialfall dieses Satzes darstellt.

Auf die Schwarzschildmetrik kann der letzte Satz nicht angewendet werden, da die Metrik nicht die obige Form hat.

Beweis von Satz II.6.1. Da g die Form, $g = -dt^2 + g_{ij}(t)dx^i \otimes dx^j$ hat, sind die Kurven $c(s) = (s, x)$ für alle $x \in U$ zeitartige Geodätische. Wenn wir also zeigen, dass I endlich ist, folgt automatisch, dass M nicht zeitartig geodätisch vollständig ist.

Aus der Einsteingleichung $\text{Ric}_{\mu\nu} - \frac{\text{scal}}{2}g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ folgt durch g -Kontraktion von $\mu\nu$, dass $-\text{scal} = \text{tr}_g T$ und damit

$$\text{Ric}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\text{tr}_g T. \tag{II.30}$$

Nach Voraussetzung ist somit $\text{Ric}_{00} \geq 0$.

Setzen wir $\chi_{ij} = \partial_t g_{ij}(t)$, dann ist

$$\text{Ric}_{00} = -\frac{1}{2}\partial_t \chi_i^i - \frac{1}{4}\chi_{ij}\chi^{ij} \geq 0. \tag{II.31}$$

Zusammen mit $\chi_{ij}\chi^{ij} = g_{kj}\chi_i^j g^{\ell j}\chi_\ell^i = \chi_i^k \chi_k^i$ und $(\text{tr}A)^2 \leq n \text{tr}AA^T$ für $n \times n$ Matrizen* erhalten wir so

$$-\partial_t \chi_i^i \geq \frac{1}{6}(\chi_i^i)^2.$$

Sei nun $\chi_i^i(t_0, x_0) < 0$ für ein $(t_0, x_0) \in M$. Dann folgt $\chi_i^i(t) < \chi_i^i(t_0)$ für alle $t \geq t_0$. Wir setzen $f = -\chi_i^i$ und haben damit $\partial_t f^{-1} \leq -\frac{1}{6}$, also $f^{-1} \leq f_0^{-1} - \frac{1}{6}(t-t_0)$ mit $f_0 = f(t_0) = -\chi_i^i(t_0, x_0) > 0$. Für wachsendes t wird die rechte Seite immer negativer, aber $f(t) > f_0$ für alle $t > t_0$. Damit kann f nicht für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert sein und I muss von oben beschränkt sein. Analog folgt dies für $\chi_i^i(t_0, x_0) = 0$ für ein $(t_0, x_0) \in M$.

Sei nun $\chi_i^i \equiv 0$. Dann folgt aus (II.31) zusammen mit g_{ij} Riemannsch, dass $\chi_{ij}\chi^{ij} = \chi_{ij}\chi_{kl}g^{ik}g^{jl} = |\chi_{ij}|_{g_{ij}}^2 \leq 0$ und damit $\chi_{ij} \equiv 0$ ist. Also ist $\text{Ric}_{00} = T_{00} + \frac{1}{2}\text{tr}_g T_{\mu\nu} = 0$ und damit $T_{00} = \text{tr}_g T_{\mu\nu} = 0$. Nach Annahme ist dann $T_{\mu\nu} = 0$ und damit $\text{Ric}_{\mu\nu} = 0$. Aufgrund der Form von g verschwindet dann schon die Ricci-Krümmung auf $\{t = \text{const}\}$ bzgl. der induzierten Metrik $g_{ij}(t)$. Für eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit bestimmt aber der Riccitenstensor schon den Riemannschen Krümmungstensor. Damit kann man nachrechnen, dass auch schon der Riemannsche Krümmungstensor von M verschwindet. Das ist ein Widerspruch. Also kann χ_i^i nicht überall verschwinden und damit ist I endlich. \square

Vorl. 22

*Überprüft man direkt auf Diagonalmatrizen mit der Ungleichung zum arithmetischen und quadratischen Mittel

Bemerkung II.6.3. Die Bedingungen an T_{00} und $T_{00} + \frac{1}{2}\text{tr}_g T$ werden als eine Art von Energiebedingung verstanden. Alle bekannten Singularitätentheoreme enthalten eine Art von Energiebedingung. Häufig auftretende Bedingungen fassen wir in folgender Tabelle zusammen. Die rechte Spalte gibt immer die jeweiligen Implikationen für eine perfekte Flüssigkeit an:

Name		Für perfekte Flüssigkeiten
Lichtenergiebedingung (null energy condition)	$T(X, X) \geq 0$ für alle X zukunftsgerichtet und lichtartig	$\rho + \mathfrak{p} \geq 0$
schwache Energiebedingung (weak energy condition)	$T(X, X) \geq 0$ für alle X zukunftsgerichtet und zeitartig	$\rho + \mathfrak{p} \geq 0, \rho \geq 0$
dominante Energiebedingung (dominant energy condition)	schwache Energiebedingung und $-T(Y, \cdot)^\#$ ist zukunftsgerichtet und kausal für alle zukunftsgerichteten kausalen Y	$\rho \geq \mathfrak{p} $
starke Energiebedingung (strong energy condition)	$(T - \frac{1}{2}(\text{tr}_g T)g)(X, X) \geq 0$ für alle X zukunftsgerichtet und zeitartig	$\rho + \mathfrak{p} \geq 0, \rho + 3\mathfrak{p} \geq 0$

Die Energiebedingung aus dem letzten Singularitätentheorem ist sogar noch etwas stärker als die starke Energiebedingung hier.

II.6.2. Geometrie von Untermannigfaltigkeiten

Sei S eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit einer n -dimensionalen Riemannschen oder Lorentzschenn Mannigfaltigkeit (M, g) . Sei $h := g|_S$ nichtentartet. Ist h Riemannsch oder Lorentzsch, so nennen wir (S, h) eine *Riemannsche* bzw. *Lorentzsche Untermannigfaltigkeit*.

Sei $v \in T_p M$ für $p \in S$. Dann sei v^{tan} der Anteil von v in $T_p \subseteq T_p M$. Sei $N_p S := \{v \in T_p M \setminus T_p S^* \mid g(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in S\}$. Dann gilt $T_p M = T_p S \oplus N_p S$. Den Anteil von v in $N_p S$ bezeichnen wir mit v^{nor} .

Sei ∇^M bzw. ∇^S die Levi-Civita Zusammenhänge zu (M, g) bzw. (S, g) .

Dann gilt für $X, Y \subseteq \mathfrak{X}(N)$:

$$\nabla_X^S Y = (\nabla_X^M Y)^{\text{tan}} \quad (\text{II.32})$$

und damit $(\nabla_X^M Y - \nabla_X^S Y)(p) \in N_p S$.

Lemma II.6.4. Die Abbildung $II: \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \rightarrow NS := \sqcup_{p \in S} N_p S$ gegeben durch $II(X, Y) = \nabla_X^M Y - \nabla_X^S Y$, die zweite Fundamentalform der Untermannigfaltigkeit, \dagger ist symmetrisch und bilinear.

Beweis. Bilinear folgt, da die Differenz zweier Zusammenhänge immer ein $(0, 2)$ -Tensor ist. Symmetrie folgt aus $\nabla_X^M Y - \nabla_Y^M X = [X, Y]$. \square

Satz II.6.5. Sei $S \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit wie oben. Dann gilt die Gaußgleichung

$$g(R^M(X, Y)Z, W) = g(R^S(X, Y)Z, W) - g(II(X, W), II(Y, Z)) + g(II(X, Z), II(Y, W)) \quad (\text{II.33})$$

*

\dagger erste Fundamentalform

für alle $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(S)$ und die Codazzigleichung

$$(R^M(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^M \Pi)(Y, Z) - (\nabla_Y^M \Pi)(X, Z) \quad (\text{II.34})$$

für alle $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(S)$ und wobei \perp der Anteil des Vektors ist, der Normal auf S steht und $(\nabla_X^M \Pi)(Y, Z) := (\nabla_X \Pi(Y, Z))^\perp - \Pi(\nabla_X^S Y, Z) - \Pi(Y, \nabla_X^S Z)$ sei.

Beweis. Sei R^M bzw. R^S der Riemannsche Krümmungstensor von (M, g) bzw. (S, g) . Sei $\nu_i(p)$ eine lokale Orthonormalbasis von $N_p S$, die glatt vom Punkt abhängt. Dann sei $\Pi(X, Y) = \Pi^i(X, Y)\nu_i$ und es gilt

$$\begin{aligned} \nabla_X^M \nabla_Y^M Z &= \nabla_X^M (\nabla_Y^S Z + \Pi(Y, Z)) \\ &= \nabla_X^S \nabla_Y^S Z + \Pi(X, \nabla_Y^S Z) + X \cdot \Pi^i(Y, Z)\nu_i + \Pi^i(Y, Z)\nabla_X^M \nu_i \\ R^M(X, Y)Z &= R^S(X, Y)Z + \Pi(X, \nabla_Y^S Z) + X \cdot \Pi^i(Y, Z)\nu_i + \Pi^i(Y, Z)\nabla_X^M \nu_i \\ &\quad - \Pi(Y, \nabla_X^S Z) - Y \cdot \Pi^i(X, Z)\nu_i - \Pi^i(X, Z)\nabla_Y^M \nu_i - \Pi([X, Y], Z) \\ &= R^S(X, Y)Z + \Pi^i(Y, Z)\nabla_X^M \nu_i + (\nabla_X^S \Pi^i)(Y, Z)\nu_i - \Pi^i(X, Z)\nabla_Y^M \nu_i - (\nabla_Y^S \Pi^i)(X, Z)\nu_i. \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

$$(\text{II.36})$$

Daraus folgt direkt durch

$$\begin{aligned} g(R^M(X, Y)Z, W) &= g(R^S(X, Y)Z, W) + \Pi^i(Y, Z)g(\nabla_X^M \nu_i, W) - \Pi^i(X, Z)g(\nabla_Y^M \nu_i, W) \\ &= g(R^S(X, Y)Z, W) + \Pi^i(Y, Z)\underbrace{g(\nu_i, \nabla_X^M W)}_{=\Pi^i(X, W)} - \Pi^i(X, Z)\underbrace{g(\nu_i, \nabla_Y^M W)}_{=\Pi^i(X, W)} \\ &= g(R^S(X, Y)Z, W) + g(\Pi(X, W), \Pi(Y, Z)) - g(\Pi(X, Z), \Pi(Y, W)) \end{aligned}$$

die Gaußgleichung.

Mit $(R^S(X, Y)Z)^\perp = 0$ folgt aus (II.36) dann direkt die Codazzigleichung. \square

Definition II.6.6. Der *mittlere Krümmungsvektor* ist definiert als $H := \text{tr}_h \Pi$.

Bemerkung II.6.7.

- (i) $H(p) \in N_p S$
- (ii) Ist S eine orientierte Hyperfläche mit gewähltem Einheitsnormalenvektorfeld N , dann ist $H \parallel N$ und der Proportionalitätsfaktor wird *mittlere Krümmung* genannt.

Brennpunkte von Untermannigfaltigkeiten

Definition II.6.8. Sei $S^m \subseteq M^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Sei $p \in S$ und $\nu_1(q), \dots, \nu_{m-n}(q)$ eine Basis der Normalenraumes $N_q S$ für q in einer Umgebungen $U \subseteq S$ von p , welche glatt von q abhängt.

Sei $\widetilde{\text{exp}}: \mathbb{R}^{m-n} \times U$ definiert durch $(a, q) \mapsto \exp_q(a^i \nu_i(q))$. Ein Punkt $x = \widetilde{\text{exp}}(a, q)$ heißt *Brennpunkt* von S , falls $d_x \widetilde{\text{exp}}$ nicht injektiv ist.

Bemerkung II.6.9. (i) Unabhängig von der Basiswahl...

- (ii) Ist $S = \{p\}$, dann ist $\widetilde{\text{exp}} = \text{exp}$ und $x = \exp_p(v)$ ist Brennpunkt von S , falls x konjugierter Punkt von p entlang der Geodätischen $\exp_p(tv)$ ist.

Satz II.6.10. Sei M eine (zeitorientierte) Lorentz-Mannigfaltigkeit und $\Sigma \subseteq M$ eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit. Sei $c: [0, T] \rightarrow M$ eine (zukunftsgerichtete) kausale Kurve mit $c(0) = p \in \Sigma$. Dann gibt es beliebig nahe bei c eine (zukunftsgerichtete) zeitartige Kurve von Σ nach $c(T)$ oder c ist bis auf Umparametrisierung eine (zukunftsgerichtete) lichtartige Geodätische mit $\dot{c}(0) \in N_p \Sigma$, so dass Σ längs c keine Brennpunkte vor $c(T)$ hat.

Der Beweis geht konzeptionell ähnlich wie Übungsaufgabe 37; man muss jedoch —

II.6.3. Singularitätentheorem von Penrose

Vorl. 23

Das erste Theorem über die Existenz von Singularitäten, das ohne Symmetrieanahmen und ohne nähere Spezifikation der... auskommt, ist von Penrose (1965). Ziel war ein Theorem, dass das Auftreten einer Singularität in einem Stern, der in seinem Schwarzschildradius kollabiert.

Satz II.6.11. (Penrose [1, 2]) Sei (M, g) eine vierdimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeit, die die folgenden Bedingungen erfüllt

- (i) $Ric(X, X) \geq 0$ für alle lichtartigen Vektoren X
- (ii) Es gibt eine nichtkompakte Cauchyhyperfläche S in M .
- (iii) Es gibt eine nichtleere geschlossene raumartige achronale Untermannigfaltigkeit $\Sigma \subseteq M$, deren mittlerer Krümmungsvektor zeitartig (und vergangenheitsgerichtet) ist.

Dann ist (M, g) nicht (zukunftsgerichtet) lichtartig geodätisch vollständig.

Bemerkung II.6.12. Bedingung (i) entspricht der Lichtenergiebedingung für Lösungen der Einsteingleichungen mit $\Lambda = 0$ (vgl. Bemerkung II.6.3 zusammen mit (II.30)).

Bevor wir das Theorem beweisen, schauen wir uns einige Beispiele an:

Beispiel II.6.13. (i) (Schwarzschildinnenraum) Wir setzen $S = \mathbb{R} \times \{r_0\} \times S^2 \subseteq \mathbb{R} \times (0, r_S) \times S^2$ und wollen als erstes zeigen, dass S eine raumartige nichtkompakte Cauchyhyperfläche ist. (Da wir im Schwarzschildinnenraum sind, ist ∂_t raumartig und ∂_r zeitartig.) Es ist klar, dass S nichtkompakt und eine Riemannsche Hyperfläche mit Einheitsnormalenvektorfeld $(\frac{r_S}{r} - 1)^{\frac{1}{2}} \partial_r$ ist. Man muss sich nun nur überlegen, dass jede zeitartige nichterweiterbare Kurve jedes Kompaktum des Schwarzschildinnenraums verlassen muss und damit alle r und t -Koordinaten abbildet und damit S schneidet. Sei dazu $c(s) = (t(s), r(s), \gamma(s))$ eine zeitartige Kurve mit γ eine Kurve in S^2 . Dann ist

$$0 \geq g(\dot{c}, \dot{c}) = -(1 - \frac{r_S}{r})\dot{t}^2 + (1 - \frac{r_S}{r})^{-1}\dot{r}^2 + r^2 g_{S^2}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$$

und damit $(\dot{r})^2 > 0$. Also ändert \dot{r} das Vorzeichen nicht und S wird höchstens einmal geschnitten. Weiterhin folgt aus

$$t(s_1) - t(s_0) = \int_{s_0}^{s_1} \dot{t}(u) du \leq \int_{s_0}^{s_1} |1 - \frac{r_S}{r(u)}|^{-1} \dot{r}(u) du = [r + r_S \ln |r - r_S|]_{r(s_0)}^{r(s_1)}, \quad (II.37)$$

das jede nichterweiterbare zeitartige Kurve in einem Punkt den Radius r_0 haben muss. Damit ist S eine nichtkompakte Cauchyhyperfläche.

Wir setzen $\Sigma = \{0\} \times \{r_0\} \times S^2$. In Übungsaufgabe 43 soll man nachrechnen, dass $H = -\frac{1}{r_0} \partial_r$ ist. Damit ist H zeitartig und vergangenheitsgerichtet.

Da der Schwarzschildraum Riccifach ist, sind alle Bedingungen von Penrose Singularitätentheorem erfüllt, und es muss lichtartig geodätisch unvollständig sein. Das ist natürlich richtig, wie wir schon früher überprüft hatten.

- (ii) FLRW erfüllt für $\rho + p \geq 0$ auch die Voraussetzungen von Penrose Singularitätentheorem (Übungsaufgabe 44).
- (iii) Der Schwarzschildraum mit $r_S < 0$ ist nicht global hyperbolisch und erfüllt somit nicht die Voraussetzungen obigen Theorems.

Beweis von Satz II.6.11. Wir wählen eine Zeitfunktion $t: M \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $S = t^{-1}(0)$. Das ist möglich nach ?? und definiert uns eine Zeitorientierung.

Sei n das zukunftsgerichtete Einheitsnormalenvektorfeld von S in M . Sei $\psi_S: M \rightarrow M$ der Fluss entlang n . Sei ν ein Einheitsnormalenvektorfeld von Σ in S . Da $\Sigma \subseteq S$ beide Riemannsch sind, ist n raumartig. Aber

n ist nicht eindeutig, da wir auch $-\nu$ wählen könnten. Wir werden weiter unten mit beiden arbeiten, aber hier erst einmal schauen, was wir aus einem folgern können.

Für $p \in \Sigma$ sei c_p die lichtartige Geodäte mit $c_p(0) = p$ und $\dot{c}_p(0) = \ell(p) := n(p) + \nu(p)$ (Es ist $g(\dot{c}_p(0), \dot{c}_p(0)) = -1 + 1 = 0$).

Was können wir über die speziellen lichtartigen Geodätischen c_p sagen? Sei $\widetilde{\text{exp}}: (-\epsilon, \epsilon) \times \psi_s(\Sigma) \rightarrow M$ für ein $\epsilon > 0$ definiert durch $\text{exp}(u, p) := c_p(u)$.

Sei $q = \widetilde{\text{exp}}(u_0, p)$ ein Punkt in dem $d_{(u_0, p)}\widetilde{\text{exp}}$ injektiv ist. Sei $\kappa: \tilde{U} \subseteq \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lokale Karte um p . Dann sind $(u, s, x = (x^1, x^2)) \in V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mapsto \widetilde{\text{exp}}(u, \psi_s(\kappa^{-1}(x)))$ lokale Koordinaten auf einer offenen Umgebung $U \subseteq M$ um q . In diesen lokalen Koordinaten gilt $g_{uu} = 0$ (da ∂_u lichtartig ist). Außerdem gilt auf $g_{us} = -1$ und $g_{ux^i} = 0$, da diese Identitäten auf $\psi_s(\Sigma)$ (also für $u = 0$) gelten und

$$\begin{aligned} \partial_u g_{u\mu} &= g(\underbrace{\nabla_u \partial_u}_{=0 \text{ da } c_p(u) \text{ Geod.}}, \partial_\mu) + g(\partial_u, \nabla_u \partial_\mu) = g(\partial_u, \nabla_\mu \partial_u) = \frac{1}{2} \partial_\mu g(\partial_u, \partial_u) = 0 \end{aligned}$$

ist.

Damit hat die Metrik g in diesen lokalen Koordinaten die Form

$$g = \alpha ds \otimes ds - ds \otimes du - du \otimes ds + \sum \beta_i (ds \otimes dx^i + dx^i \otimes ds) + \sum \gamma_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Als Matrix ist $g = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & \beta_i \\ -1 & 0 & 0 \\ \beta_i & 0 & \gamma_{ij} \end{pmatrix}$ und die Inverse ist $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -\alpha & \gamma^{ij} \beta_j \\ 0 & \gamma^{ij} \beta_j & \gamma^{ij} \end{pmatrix}$.

Wegen $0 > \det g = -\det \gamma_{ij}$, muss damit $g|_{\widetilde{\text{exp}}(u, \psi_s(\Sigma))}$ für festes u und s Riemannsch sein.

Bevor wir im Beweis weitergehen, schauen wir uns erst einmal an, was die Bedeutung von θ ist:

Außerdem rechnet man nach, dass

$$\text{Ric}_{uu} = -\partial_u \underbrace{(\gamma^{ij} \gamma_{ij, u})}_{=: \theta} - \gamma^{il} \gamma^{jk} \gamma_{ki, u} \gamma_{lj, u}. \quad (\text{II.38})$$

Oft wird θ die Lichtexpansion (null expansion) genannt und man kann nachrechnen, dass $\theta = \partial_u \ln(\det \gamma_{ij})^{\frac{1}{2}}$ ist. Damit misst θ die Variation des Flächenelements der zweidimensionalen Fläche $\text{exp}(u, \psi_s(\Sigma))$ bei Änderung von u . Insbesondere sieht man eine Nullstelle von $\det \gamma_{ij}$ als Singularität von θ , und damit einen konjugierten Punkt zu $\psi_u(\Sigma)$.

Weiterhin ist mit $\tilde{\ell} := 2n - \ell = n - \nu$

$$\begin{aligned} \text{II}(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) &= \nabla_{\partial_{x^i}}^M \partial_{x^j} - \nabla_{\partial_{x^i}}^S \partial_{x^j} = \Gamma_{ij}^s n + \Gamma_{ij}^u \ell \\ 2\text{II}(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) &= g^{su} (-g_{ij, u}) n + \Gamma_{ij}^u \ell \\ &= \frac{1}{2} \gamma_{ij, u} (\ell + \tilde{\ell}) + \Gamma_{ij}^u \ell \\ H = \text{tr}_\gamma \text{II} &= \frac{1}{4} \gamma_{ij, u} \gamma^{ij} \tilde{\ell} + c \ell \text{ für } c = c(\alpha, \beta_i, \gamma_{ij}). \end{aligned}$$

Also ist $\theta/2$ auch der Koeffizient vor $\tilde{\ell}$, wenn man den mittleren Krümmungsvektor in der Basis $\{\ell, \tilde{\ell}\}$ darstellt.

Aus der Energielichtbedingung (energy null condition) folgt mit (II.38)

$$-\partial_u \theta \geq \gamma^{il} \gamma^{ik} \gamma_{ki, u} \gamma_{lj, u} \geq \frac{1}{2} (\gamma^{il} \gamma_{li, u})^2 = \frac{1}{2} \theta^2,$$

wobei die letzte Ungleichung wieder $(\text{tr} A)^2 \leq n \text{tr} A A^T$ wie im Beweis von Satz II.6.1 ist. Also $\partial_u \theta + \frac{1}{2} \theta^2 \leq 0$. Der Gleichheitsfall hat die Lösung $\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta_0} + \frac{u}{2}$ mit $\theta_0 := \theta(u=0)$. Also ist $\frac{1}{\theta} \geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{u}{2}$.

II. Allgemeine Relativitätstheorie

Falls $\theta_0 < 0$ ist, folgt aus $\partial_u \theta + \frac{1}{2} \theta^2 \leq 0$, dass $\theta(u) < \theta_0 < 0$ für alle $u > 0$ ist. Für $u > \hat{u} := -\frac{2}{\theta_0}$, wäre dann $\theta(u)^{-1} \geq 0$, was ein Widerspruch wäre. D.h. nach obigen Überlegungen muss es für ein $u < \hat{u}$ einen konjugierten Punkt von $\psi_u(\Sigma)$ geben.

Wir wollen nun obiges einmal für das raumartige Einheitsnormalenvektorfeld ν und einmal für $-\nu$ verwenden und nennen die zugehörigen $\widetilde{\text{exp}}$ -Abbildungen exp^\pm und die Lichtexpansionen θ^\pm . Wir setzen $\ell^\pm(p) := n(p) \pm \nu(p)$ für alle $p \in \Sigma$. Dann sind $\ell^\pm(p)$ zukunftsgerichtete lichtartige Vektoren, die $N_p \Sigma$ aufspannen. Damit ist der mittlere Krümmungsvektor H von Σ in M eine Linearkombination von ℓ^\pm .

Aus obigen Bemerkungen zu θ und H folgt, dass $4H = \theta^+ \ell^- + \theta^- \ell^+$ ist.

Nach Annahme ist $H(p) \in N_p \Sigma$ zeitartig und vergangenheitsgerichtet. Wegen $g(4H, 4H) = -4\theta^+ \theta^-$ und $0 < g(H, n) = -\theta^+ - \theta^-$, folgt daraus $\theta^\pm < 0$. Da Σ kompakt ist, gibt es ein $\theta_0 < 0$ mit $\theta^\pm < \theta_0$. Damit folgt aus obigen Überlegungen, dass die lichtartigen Geodätischen $c_p(u)$, die mit $n(p) \pm \nu(p)$ in Σ starten, spätestens bei $\hat{u} = -\frac{2}{\theta_0}$ auf einen Brennpunkt von Σ trifft. Nach Satz II.6.10 ist damit c_p für $u > \hat{u}$ in $I_+(\Sigma)$.

Wir werden nun zeigen, dass es eine lichtartige zukunftsgerichtete Geodätische gibt, die orthogonal zu Σ startet, aber nicht für alle Parameter \mathbb{R} existiert:

Nehmen wir an, dass stimmt nicht, dann treten die Brennpunkte von oben für jedes c_p wirklich auf. Da Σ kompakt ist, ist auch $A := \text{exp}^+([0, \hat{u}], \Sigma) \cup \text{exp}^-([0, \hat{u}], \Sigma)$ kompakt. Wieder nach Satz II.6.10 ist $\partial I_+(\Sigma)$ dann eine Teilmenge von A und damit als abgeschlossene Menge wieder selbst kompakt.

Wir definieren nun eine Abbildung $\pi: \partial I_+(\Sigma) \rightarrow \Sigma$ wie folgt: Sei X ein zeitartiges Vektorfeld. Die Flusslinien von X schneiden S genau einmal, da S eine Cauchyfläche ist. Nun soll π die Abbildung sein, die einem $q \in \partial I_+(\Sigma)$ den Schnittpunkt der Flusslinie durch q mit S zuordnet. Diese Abbildung ist stetig. Da $\partial I_+(\Sigma)$ kompakt ist, ist auch das Bild in S kompakt und damit abgeschlossen. Es bleibt zu zeigen, dass das Bild auch offen in S ist. Da S zusammenhängend ist, muss S damit auch schon kompakt sein, was uns den Widerspruch gibt.

Um zu zeigen, dass das Bild offen ist, überlegen wir uns zuerst, dass π injektiv ist: Sei $\pi(p_1) = \pi(p_2)$, aber $p_1 \neq p_2$. Dann müssen p_1 und p_2 auf der gleichen Flusslinie zu X liegen. O.B.d.A. sei $p_1 \in I_+(p_2)$. Zusammen mit $p_2 \in J_+(\Sigma)$ folgt mit Satz II.5.6 $p_1 \in I_+(\Sigma)$. Da $I_+(\Sigma)$ offen ist, ist dies ein Widerspruch zu $p_1 \in \partial I_+(\Sigma)$.

Nehmen wir nun an, dass das Bild nicht offen ist. Dann gibt es ein $p \in \partial I_+(\Sigma)$ und eine Folge $q_n \in S \setminus \partial I_+(\Sigma)$ mit $q_n \rightarrow q := \pi(p)$. Sei r ein Punkt auf der zukunftsgerichteten Flusslinie von p aus und sei $S_r := t^-(t(r))$ die Cauchyfläche durch r bzgl. unserer gewählten Zeitfunktion t . Die Flusslinien von X durch q_n schneiden S_r genau einmal, sagen wir in r_n . Wegen stetiger Abhängigkeit des Flusses von den Anfangswerten haben wir $r_n \rightarrow r$. Da $r \in I_+(\Sigma)$ und $I_+(\Sigma)$ offen ist, ist $r_n \in I_+(\Sigma)$ für n groß genug und wir haben eine Kurve von $q_n \notin \pi(I_+(\Sigma))$ nach $r_n \in I_+(\Sigma)$. Damit muss die Flusslinie $\partial I_+(\Sigma)$ schneiden und wir haben unseren Widerspruch. \square

Bemerkung II.6.14. Oft wird statt unserer dritten Voraussetzung im Singularitätentheorem von Penrose geschrieben, dass es eine geschlossene zukunftsgefangene Fläche $\Sigma \subseteq S$ gibt. Die Definition einer *zukunftsgefangenen Fläche* $\Sigma \subseteq S \subseteq M$ ist, dass Σ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von S ist, so dass die Zukunftslichtexpansionen θ^\pm wie im obigen Beweis eingeführt, in allen Punkten von Σ negativ sind. Daraus folgt analog wie im obigen Beweis, dass der mittlere Krümmungsvektor H von Σ in M zeitartig und vergangenheitsgerichtet ist.

Analog gibt es den Begriff der vergangenheitsgefangenen Fläche Σ . Hier sollen $\theta^\pm > 0$ sein (also H zeitartig und zukunftsgerichtet). Dies als dritte Voraussetzung führt zu vergangenheitsgerichteter lichtartiger Unvollständigkeit von M .

Wir führen noch ein weiteres Singularitätentheorem ohne Beweis an:

Satz II.6.15 (Hawking's Singularitätentheorem). *Sei M^n eine zusammenhängende zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit mit $\text{Ric}(X, X) \geq 0$ für alle $X \in TM$ zeitartig. Sei $S \subseteq M$ eine Cauchyhyperfläche mit mittlerem Krümmungsvektorfeld H . Sei ν das zukunftsgerichtete Einheitsnormalenfeld an S . Gibt es ein $a > 0$ mit $g(H, \nu) \geq a$, dann hat jede zukunftsgerichtete zeitartige Kurve, die in S startet, Länge $\leq a^{-1}$.*

II.7. Linearisierte Gravitationstheorie

Wir wollen uns mit Störungstheorie erster Ordnung um Lösungen der Einsteingleichung beschäftigen. Wir beschränken uns hier auf Störungen der Minkoswkimetrik als Vakuumlösung.

Vorl. 24

Die Annahme ist also, dass sich unsere Metrik g lokal nur wenig von der Minkoswkimetrik η unterscheidet:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}$$

mit $\epsilon > 0$ klein.

Damit erhalten wir mittels $\delta_\gamma^\alpha = g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g^{\alpha\beta} (\eta_{\beta\gamma} + \epsilon h_{\beta\gamma})$ und dem Ansatz $g^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} + \epsilon b^{\alpha\beta} + O(\epsilon^2)$, dass

$$\begin{aligned}\delta_\gamma^\alpha &= \eta_{\beta\gamma} a^{\alpha\beta} \\ 0 &= \eta_{\beta\gamma} b^{\alpha\beta} + a^{\alpha\beta} h_{\beta\gamma}.\end{aligned}$$

Dies ergibt

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \epsilon \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} h_{\gamma\delta} + O(\epsilon^2)$$

und daraus erhalten wir für die Christoffelsymbole

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\alpha\delta} (\partial_\beta h_{\gamma\delta} + \partial_\gamma h_{\beta\delta} - \partial_\delta h_{\beta\gamma}) + O(\epsilon^2). \quad (\text{II.39})$$

Mit $h_\nu^\lambda := \eta^{\lambda\mu} h_{\mu\nu}$, $\square u := -\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta u$ und $f_\alpha := \partial_\lambda h_\alpha^\lambda - \frac{1}{2} \partial_\alpha h_\lambda^\lambda$ haben wir

$$\begin{aligned}\text{Ric}_{\mu\nu} &= \epsilon (\partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) + O(\epsilon^2) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon (\square h_{\mu\nu} - \partial_\lambda \partial_\mu h_\nu^\lambda - \partial_\lambda \partial_\nu h_\mu^\lambda + \partial_\nu \partial_\mu h_\lambda^\lambda) + O(\epsilon^2) = \frac{1}{2} \epsilon (\square h_{\mu\nu} - \partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) + O(\epsilon^2).\end{aligned}$$

Die Linearisierung des Energieimpulstensors $T_{\mu\nu} = \epsilon S_{\mu\nu} + O(\epsilon^2)$ zusammen mit (II.30) ergibt

$$\frac{1}{2} (\square h_{\mu\nu} - \partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) = S_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \text{tr}_\eta S. \quad (\text{II.40})$$

Wäre $f_\alpha \equiv 0$, dann wären die linearisierten Vakuumsteingleichungen (mit $\Lambda = 0$) einfach $\square h_{\alpha\beta} = 0$ und damit ein System von hyperbolischen Differentialgleichungen. Eine Gleichung $\square u = f$, f eine gegebene Funktion auf \mathbb{R}^4 (u die gesuchte Funktion) hat immer eine Lösung. Bei gegebenen Anfangswerten $u((0, z) \in \mathbb{R}^4)$ und $\partial_t u((0, z))$ ist diese sogar eindeutig.

II.7.1. Freiheit in der Koordinatenwahl

Da wir frei sind in der Wahl der Koordinaten, ergibt jede Lösung h und jeder Diffeomorphismus $\varphi: M \rightarrow M$ mit $\varphi^* h$ wieder eine Lösung. Man kann also keine eindeutige Lösung erwarten ohne die Wahl des Koordinatensystems einzuschränken:

Haben wir eine Einparameterfamilie von Diffeomorphismen φ_s mit $\varphi_0 = \text{id}$, dann ist $X(p) = \frac{d}{ds} \big|_{s=0} \varphi_s(p)$ ein Vektorfeld und damit $\tilde{h}_{\alpha\beta} = \frac{d}{ds} \big|_{s=0} \varphi_s^* g$.

Seien $y^\alpha = x^\alpha + \epsilon X^\alpha$ die neuen Koordinaten. Dann ist die neue Metrik im Punkt p gegeben durch

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\mu\nu}(y(p)) &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} g_{\alpha\beta}(x(p)) \\ &= (\delta_\mu^\alpha - \epsilon X_{,\mu}^\alpha) (\delta_\nu^\beta - \epsilon X_{,\nu}^\beta) g_{\alpha\beta}(x(p)) \\ &= g_{\mu\nu}(x(p)) - \epsilon X_{,\mu}^\alpha g_{\mu\beta}(x(p)) - \epsilon X_{,\nu}^\beta g_{\nu\alpha}(x(p)) \\ &= g_{\mu\nu}(x(p)) - \epsilon (\eta_{\alpha\nu} X_{,\mu}^\alpha + \eta_{\alpha\mu} X_{,\nu}^\alpha) + O(\epsilon^2).\end{aligned}$$

II. Allgemeine Relativitätstheorie

Damit ist $\tilde{h}_{\mu\nu}(y(p)) - h_{\mu\nu}(x(p)) = -\eta_{\alpha\nu}X_{,\mu}^\alpha - \eta_{\alpha\mu}X_{,\nu}^\alpha$.

Wir wollen nun $\tilde{f}_\alpha := \partial_\lambda \tilde{h}_\alpha^\lambda - \frac{1}{2} \partial_\alpha \tilde{h}_\lambda^\lambda$ berechnen:

$$\begin{aligned}\tilde{h}_\mu^\lambda &= h_\mu^\lambda - X_{,\mu}^\lambda - \eta_{\alpha\mu} \eta^{\nu\lambda} X_{,\nu}^\alpha \\ \tilde{h}_\lambda^\lambda &= h_\lambda^\lambda - 2X_{,\lambda}^\lambda \\ \tilde{f}_\alpha &= f_\alpha - X_{,\alpha\lambda}^\lambda - \eta_{\beta\alpha} \eta^{\nu\lambda} X_{,\nu\lambda}^\beta + X_{,\lambda\alpha}^\lambda = f_\alpha + \square X_\alpha.\end{aligned}$$

Um also $\tilde{f}_\alpha = 0$ zu erreichen muss man $\square X_\alpha = -f_\alpha$ lösen – wieder eine lineare hyperbolische Differentialgleichung.

Eine Wahl von Koordinaten, so dass $f_\alpha = 0$ ist, nennt man *Lorentzzeichnung*.^{*} Wie bei jeder Eichung muss man sich auch hier überlegen, dass Koordinaten immer so gewählt werden können, dass diese Gleichheit erfüllt ist. Aber wir haben gesehen, dass dies einfach auf die Existenz von Lösungen von $\square X_\alpha = f_\alpha$ zurückzuführen ist. Das ist immer möglich, wie wir oben schon bemerkt hatten.

In der Lösung für $\square X_\alpha = f_\alpha$ können wir noch die Anfangswerte von X_α frei bestimmen und so die Eichung 'verfeinern'.

Aus (II.40) ergibt sich in der Lorentzzeichnung

$$\square h_{\mu\nu} = 2S_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \text{tr}_\eta S. \quad (\text{II.41})$$

II.7.2. Newtonscher Limes

Die Newtonsche Gravitationstheorie gibt in vielen Bereichen gute Voraussagen. Ein wichtiger Test der ART ist damit die Frage, ob die Voraussagen der ART in den Bereichen, wo man weiss, dass die Newtonsche Theorie gut ist, sich auf die Newtonschen reduzieren. Wir haben die Voraussagen der ART und der Newtonschen Gravitationstheorie in Abschnitt I.1 für die Planetenbewegung verglichen. Nun wollen wir uns nun für Störungen der Minkoswkimetrik $\eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$ anschauen, ob wir die Newtonschen Bewegungsgleichungen im Limes erhalten können.

Die Newtonschen Voraussagen stimmen i.A. gut bei schwacher Gravitation – wenn die relative Geschwindigkeit der Quellen viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist und der Spannungstensor im Energieimpulstensor viel kleiner als die Massenenergiedichte T_{00} ist.

Was heißt das für das Modell der perfekten Flüssigkeit aus Staub (also $\mathbf{p} = 0$)? Sei V das Strömungsvektorfeld des Staubes. V habe kleine räumliche Geschwindigkeit. D.h. wegen $g(V, V) = -1$, dass wir annehmen $(V^0)^2 = 1 + O(\epsilon)$ und $V^i = O(\epsilon)$. Weiterhin sei die Energiedichte klein, also $\rho = \epsilon\rho_0$ für festes ρ_0 . Damit ist

$$T_{\mu\nu} = \rho g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} V^\alpha V^\beta = \epsilon\rho_0 \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} + O(\epsilon^2).$$

Damit ist $\text{tr}_\eta T = -\epsilon\rho_0 + O(\epsilon^2)$.

Für die linearisierte Einsteingleichung (II.41) folgt somit

$$\begin{aligned}\square h_{\mu\mu} &= \rho_0 \\ \square h_{\mu\nu} &= 0 \text{ sonst.}\end{aligned}$$

Für kleine Geschwindigkeiten der Änderungen muss $h_{\mu\nu,0}$ klein sein. Dann folgt mit $\square = \partial_t \partial_t - \Delta$, dass $-\Delta h_{\mu\mu} = \rho_0$ ist. Diese Gleichung erinnert an die Poissongleichung $\Delta \Psi = 4\pi G \rho$ der Newtonschen Gravitationstheorie. Da sowohl $h_{\mu\nu}$ als auch Ψ im Unendlichen verschwinden sollen, haben wir $h_{\mu\nu} = -2\Psi \delta_{\mu\nu}$ (die Konstante kommt daher, dass wir in den Einsteingleichungen die Konstante vor dem Energieimpulstensors ignoriert hatten, diese aber beim Vergleich mit der Konstante in der Poissongleichung berücksichtigt werden muss.)

Überlegen wir uns nun, was das für die freie Bewegung von Testteilchen im Gravitationsfeld heißt. In der ART sollen sich diese auf Geodätische $\gamma(s) = (t(s), x(s)) \in \mathbb{R}^4$ bewegen. Im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit

^{*}Lorentzzeichnung...

soll γ kleine räumliche Geschwindigkeit haben soll, also $(\dot{t})^2 \sim 1$ und $\dot{x}^i \sim 0$. Um es mit der Newtonschen Theorie zu vergleichen, interessieren wir uns für die räumlichen Koordinaten x^i :

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{00}^i = 0.$$

Mit der Lösung der $h_{\mu\nu}$ von oben und der Gleichung (II.39) für die Christoffelsymbole folgt $\Gamma_{00}^i = \epsilon \Psi_{,i} + O(\epsilon^2)$. Also $\ddot{x} = -\epsilon \nabla \Psi + O(\epsilon^2)$ die Newtonsche Bewegungsgleichung.

II.7.3. Gravitationswellen

Die Idee ist, dass diese 'Welle' lokal durch eine beschleunigte Masse ausgelöst wird. Da sich in der Relativitätstheorie nichts schneller als mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, muss sich die Metrikänderung von ihrem Ursprung erst noch ausbreiten. In der Newtonschen Gravitationstheorie hingegen wirken sich Veränderungen der Massendichte instantan im gesamten Raum aus. Es kann also keine Gravitationswellen im Newtonschen geben.

Wir wollen nun untersuchen, ob es in der ART solche Wellen geben könnte. Dazu betrachten wir Lösungen der linearisierten Einsteingleichungen im Vakuum. Die Idee ist, dass der Bereich der Raumzeit in dem wir Messungen durchführen annähernd ein Vakuum ist und wir dort die Minkoswkimetrik haben. Weit weg davon befindet sich eine Gravitationsquelle, die z. B. beschleunigt wird. Dadurch ändert sich die Lösung der Einsteingleichung auch bei uns. Wir nehmen an, dass die Änderungen klein ist und unsere neue Lösung die linearisierte Vakuumeinsteingleichung erfüllen muss.

In der Lorentzzeichnung wollen wir also $\Delta h_{\mu\nu} = 0$ lösen $\Delta = \eta^{ij} \nabla_i \nabla_j$. Als Ansatz nehmen wir eine ebene Welle $h_{\mu\nu}(x) = \text{Re} A_{\mu\nu}(e^{i\eta(k,x)})$ mit $x = (t = x^0, x^1, x^2, x^3)$ und $k = (\omega := k^0, k^1, k^2, k^3)$. Hier muss A eine symmetrische Matrix sein, da auch h symmetrisch sein soll. Dann ist

$$\square h_{\mu\nu} = \text{Re}(A_{\mu\nu} \underbrace{\eta^{\mu\lambda} \eta_{\mu\alpha} k^\alpha \eta_{\nu\beta} k^\beta}_{=\eta(k,k)} e^{i\eta(k,x)}).$$

Also löst $h_{\mu\nu}$ die Gleichung $\Delta h_{\mu\nu} = 0$, falls $\eta(k,k) = 0$ ist, also k lichtartig ist – sich die Welle mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Der Vektor k heißt *Wellenvektor* der Welle. Eine allgemeine Lösung ist eine Kombination aus solchen einzelnen Wellen zu gegebenem Wellenvektor:

$$h_{\mu\nu}(x) = \text{Re} \int_{\eta(k,k)=0} A_{\mu\nu}(k) e^{i\eta(k,x)} dk.$$

Wir können aber $A_{\mu\nu}$ und k^μ nicht unabhängig voneinander wählen. Da wir angenommen haben, dass wir uns in der Lorentzzeichnung befinden und damit $\partial_\lambda h_\alpha^\lambda = \frac{1}{2} \partial_\alpha h_\lambda^\lambda$ für alle α gelten muss. Für unser $h_{\mu\nu}$ impliziert dies

$$A_\alpha^\lambda \eta_{\lambda\beta} k^\beta = \frac{1}{2} A_\lambda^\lambda \eta_{\alpha\beta} k^\beta.$$

Es bleibt noch zu überprüfen, dass wir wirklich eine nichttriviale 'Welle' gefunden haben. Bis jetzt könnte es noch immer sein, dass wir bloß durch komplizierte Wahl der Koordinaten nicht mehr sehen, dass die Metrik noch immer die Minkoswkimetrik ist. Diese Bedenken kann man jedoch leicht aus der Welt schaffen, in dem man den Riemannschen Krümmungstensor berechnet und sieht, dass dieser nicht verschwindet.

2015 gab es den ersten direkten Nachweis von Gravitationswellen im LIGO-Experiment*. Dies ist ein riesiges† Michelson-Interferometer, indem die lokalen Änderungen der Metrik durch die Gravitationswellen die Interferenz von Laserstrahlen verändern.

II.8. Zu Wellengleichungen auf Lorentz-Mannigfaltigkeiten

Sei (M, g) eine Lorentz-Mannigfaltigkeit.

*<https://www.ligo.caltech.edu/>

†<https://de.wikipedia.org/wiki/LIGO>

II. Allgemeine Relativitätstheorie

Definition II.8.1. Ein *Wellenoperator* auf (M, g) ist ein linearer Differentialoperator der in lokalen Koordinaten die Form

$$P = -g^{\alpha\beta} \partial_{x^\alpha} \partial_{x^\beta} + A_\alpha(x) \partial_{x^\alpha} + B(x),$$

wobei A_α und B glatte Funktionen auf M sind.

Beispiel II.8.2. Der *d'Alembert Operator* $\square_g = -\operatorname{div}_g \circ \operatorname{grad}_g$ ist ein Wellenoperator. Für den Minkowski-Raum ist $\square = \partial_t \partial_t - \sum_i \partial_{x^i} \partial_{x^i}$.

Für allgemeines (M, g) ist in lokalen Koordinaten x^μ

$$\square_g = -g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu = -g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \text{Terme erster Ordnung.}$$

Wir schauen uns erst zwei einfachere Spezialfälle an und geben dann den Satz für den allgemeinen Fall:

II.8.1. Wellengleichung im 2D-Minkowski

Für den Wellenoperator $\partial_t^2 - \partial_x^2$ auf dem zweidimensionalen Minkowski-Raum betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \partial_x^2)u(t, x) &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}^2 \\ u|_{t=0} &= u_0 && \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R} \\ \partial_t u|_{t=0} &= u_1 && \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

bei gegebenen $u_0(x)$ und $u_1(x)$.

In diesem Spezialfall eines Wellenoperators bietet sich die Einführung lichtartiger Koordinaten $v = \frac{1}{2}(t+x)$ und $w = \frac{1}{2}(t-x)$ an. Dann ist $\partial_v = \partial_t + \partial_x$ und $\partial_w = \partial_t - \partial_x$ und damit

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)u = \partial_v \partial_w u = 0.$$

Eine allgemeine Lösung hat somit die Form $u(t, x) = f_1(t+x) + f_2(t-x)$ für geeignete Funktionen f_1, f_2 in einer Variablen.

Für die Lösung für unser Anfangswertproblems von oben muss somit

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f_1(x) + f_2(-x) \\ u_1(x) &= f_1'(x) + f_2'(-x) \quad \implies \quad f_1(x) - f_2(x) = \int_0^x u_1(s) ds + c \end{aligned}$$

gelten. Damit sind die f_i durch die Anfangswerte (bis auf eine Konstante c) eindeutig bestimmt als

$$\begin{aligned} 2f_0(x) &= u_0(x) + \int_0^x u_1(s) ds + c \\ 2f_1(x) &= u_0(x) - \int_0^x u_1(s) ds - c \end{aligned}$$

Aber die Konstante c hebt sich in der Summe $u(t, x) = f_1(t+x) + f_2(t-x)$ weg. Somit haben wir gesehen, dass unser Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung

$$2u(t, x) = u_0(t+x) + u_0(x-t) + \int_{t+x}^{x-t} u_1(s) ds$$

besitzt.

An der Struktur der Lösung sehen wir insbesondere, dass sich die Lösung mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet: Haben die Anfangswerte u_0, u_1 (zur Zeit t_0) Träger in (a, b) , dann hat $u(t_1 > t_0, \cdot)$ Träger in $(a - (t_1 - t_0), b + (t_1 - t_0))$. Oder andersherum formuliert, der Wert der Lösung im Punkt (t_1, x_0) , hängt höchstens von den Anfangswerten u_0, u_1 im Bereich $x \in (x_0 - (t_1 - t_0), x_0 + (t_1 - t_0))$ ab. Man nennt diese Eigenschaft *endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit* (*finite speed of propagation*).

Allgemeiner führt diese Beobachtung zum Begriff des Abhängigkeitsbereiches:

Definition II.8.3. Sei (M, g) global hyperbolisch mit Cauchyfläche S . Sei $U \subseteq S$ offen. Dann ist das *Abhängigkeitsgebiet* (*domain of dependence*) $D(U)$ von U definiert als alle Punkte von M , so dass für jeden Punkt $p \in D(U)$ in der Zukunft von U jede vergangenheitsgerichtete kausale Kurve U schneidet und für jeden Punkt $p \in D(U)$ in der Vergangenheit von U jede zukunftsgerichtete kausale Kurve U schneidet.

II.8.2. Klein-Gordon Gleichung auf ultrastatischen Mannigfaltigkeiten

Die Klein-Gordon Gleichung auf einer Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) ist gegeben durch

$$(\square_g + m^2)u = 0.$$

Das u beschreibt Bosonen mit Masse m . Der zugehörige Energieimpulstensor ist gegeben durch

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu u \partial_\nu u - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\alpha u \partial^\alpha u + m^2 u^2). \quad (\text{II.42})$$

Zugehörig bedeutet hier: Will man ein Materiemodell für Bosonen ansetzen, kann man obigen Energieimpulstensor ansetzen. Dann ist die Forderung der Divergenzfreiheit von T äquivalent zur Forderung, dass u die Klein-Gordon Gleichung (also die Bewegungsgleichung) für Bosonen löst.

Ist (M, g) zeitorientiert, dann erfüllt T die dominante Energiebedingung (Übungsaufgabe 46). Damit ist insbesondere $J := T(Y, \cdot)^\sharp = -T_{\mu\nu} Y^\mu g^{\nu\alpha} \partial_\alpha$ für alle zukunftsgerichteten kausalen Y selbst kausal und vergangenheitsgerichtet.

Ist Y sogar ein zukunftsgerichtetes kausales Killingvektorfeld, dann ist $J = T(Y, \cdot)^\sharp$ nach Satz II.4.6 ein erhaltener Strom, d.h. Für $\Omega \subseteq M$ eine beschränkte offene Menge mit $\Sigma := \partial\Omega$ eine geschlossene (stückweise glatte) Hyperfläche in M mit innerem Einheitsnormalenvektorfeld ν gilt

$$\int_{\Sigma} g(J, \nu) d\text{vol}_{g|_{\Sigma}} = 0.$$

Nehmen wir nun an, wir haben eine ultrastatische Lorentz-Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R} \times S$ mit Metrik der Form $g = -dt^2 + h_{ij} dx^i \otimes dx^j$. Die Riemannsche Metrik h_{ij} sei also zeitunabhängig. Damit ist insbesondere ∂_t ein zukunftsgerichtetes zeitartiges Killingvektorfeld.

Seien $t_0 < t_1$ und $S_i := \{t = t_i\}$. Sei $U_0 \subseteq S_0$ beschränkt und mit glattem Rand. Sei $U_1 = D(U_0) \cap S_1$. Wenden wir die Stromerhaltung auf das Gebiet $\Sigma := D(U_0) \cap \{t_0 \leq t \leq t_1\}$ (also $\partial\Sigma =: U_0 \sqcup U_1 \sqcup C$) und $Y = \partial_t$, dann haben wir $J = -T_{0\nu} g^{\nu\alpha} \partial_\alpha = T_{00} \partial_t$ und

$$\int_{U_0} g(J, \partial_t) + \int_C g(J, n) - \int_{U_1} g(J, \partial_t) = 0,$$

wobei n die vergangenheitsgerichtete Einheitsnormale von C ist. Da J vergangenheitsgerichtet und kausal ist, ist $g(J, n) \leq 0$ und wir erhalten

$$\int_{U_0} g(J, \partial_t) \leq \int_{U_1} g(J, \partial_t). \quad (\text{II.43})$$

Wegen

$$-g(J, \partial_t) = T_{00} \stackrel{(\text{II.42})}{=} \partial_0 u \partial_0 u + \frac{1}{2} (\partial_\alpha u \partial^\alpha u + m^2 u^2) = \frac{1}{2} ((\partial_0 u)^2 + h^{ij} \partial_i u \partial_j u + m^2 u^2). \quad (\text{II.44})$$

Aus obigen Überlegungen erhalten wir direkt

Lemma II.8.4. *Unter obigen Voraussetzungen gilt: Sind u_1 und u_2 Lösungen der Klein-Gordon Gleichung mit gleichen Anfangswerten $u_i|_{t=t_0} = u_0$ und $\partial_t u_i|_{t=t_0} = v_0$, dann ist $u_1 = u_2$.*

II. Allgemeine Relativitätstheorie

Beweis. Da die Klein-Gordon Gleichung linear ist, ist dann $u = u_1 - u_2$ eine Lösung zu den Anfangswerten $u_i|_{t=t_0} = 0$ und $\partial_t u_i|_{t=t_0} = 0$. Dann folgt aus (II.43) und (II.44)

$$\int_{U_1} ((\partial_0 u)^2 + h^{ij} \partial_i u \partial_j u + m^2 u^2) \leq 0$$

und damit $u|_{t=t_1} = 0$. Dies kann man für alle $t > t_0$ durchführen und durch Zeitumkehr ganz analog für alle $t < t_0$ und wir haben $u \equiv 0$. \square

Weiterhin gilt:

Satz II.8.5. *Gegeben glatte Anfangswerte $u_0, v_0: S_0 \rightarrow \mathbb{R}$, dann gibt es eine eindeutige glatte Lösung u der Klein-Gordon Gleichung mit diesen Anfangswerten. Außerdem hängt für eine Teilmenge $U \subseteq S_0$ die Lösung $u|_{D(U)}$ nur von $(u_0)|_U$ und $(v_0)|_U$ ab und die Abbildung*

$$(u_0, v_0) \in C^\infty(U) \times C^\infty(U) \mapsto u \in C^\infty(D(U))$$

stetig.

Wir beweisen das hier nicht, sondern geben nur ein paar Kommentare: Für den Fall, dass (N, h) eine analytische Mannigfaltigkeit ist und auch die Anfangswerte analytisch sind, folgt die Existenz aus dem Theorem von Cauchy-Kowalewski. Wir wollen hier skizzieren, wie im Fall von (N, h) analytisch, dann die Existenz für nichtanalytische Anfangswerte folgt:

Dazu definieren wir für eine beschränkte offene Teilmenge $A \subseteq M$ die Sobolevnorm

$$\|u\|_{H^k(A)}^2 = \sum_{i=0}^k \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^2(A)}^2,$$

wobei $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ ein Multiindex, $|\alpha| = \sum_{i=0}^n |\alpha_i|$ und $D^\alpha = \partial_0^{\alpha_0} \dots \partial_n^{\alpha_n}$ ist. Insbesondere ist $H^0 = L^2$.

Aus (II.43) und (II.44) und da verschiedene Normen auf kompakten Teilmengen äquivalent sind (also $\int_A u^2 + (\partial_0 u)^2 + h^{ij} \partial_i u \partial_j u$ zur H^1 -Norm äquivalent ist), haben wir direkt

$$\|u\|_{H^1(U_1)}^2 \leq C \|u\|_{H^1(U_0)}^2 \leq C \|u|_{t=t_0}\|_{H^1(U_0)}^2 + \|\partial_t u|_{t=t_0}\|_{H^1(U_0)}^2.$$

für Konstanten $C > 0$. Eine solche Ungleichung nennt man *Energieungleichung*. (Man beachte, dass wir hierfür die Analytizitätsannahme von (N, h) nicht verwenden.)

Analoge Energieungleichungen gibt es für höhere Sobolevnormen: Im Minkowskiraum ist das besonders einfach zu sehen, da mit u auch $D^\alpha u$ eine Lösung der Klein-Gordon Gleichung und wir dann in obige Energieungleichung einfach $D^\alpha u$ für verschiedene α einsetzen müssen und dann über alle α mit $|\alpha| \leq k$ summieren um

$$\|u\|_{H^k(U_1)}^2 \leq C \|u|_{t=t_0}\|_{H^k(U_0)}^2 + \|\partial_t u|_{t=t_0}\|_{H^k(U_0)}^2.$$

zu erhalten. Für allgemeinere Mannigfaltigkeiten muss man dafür etwas mehr arbeiten.

Zusammen mit der Sobolevungleichung $\|u\|_{C^m(A)} \leq C_{m,k} \|u\|_{H^k(A)}$ für alle k groß genug (die Schranke hängt von m und $n = \dim M$ ab) und erhalten so für Lösungen der Klein-Gordon Gleichung

$$\|u\|_{C^m(D(U_0))} \leq C \|u\|_{H^k(D(U_0))} \leq C (\|u_0\|_{H^k(U_0)} + \|v_0\|_{H^k(U_0)}) \leq C (\|u_0\|_{C^k(U_0)} + \|v_0\|_{C^k(U_0)}).$$

In der obigen Situation ((N, h) analytisch und Existenz der Lösung für analytische Anfangswerte) erhalten wir nun die Existenz für allgemeine Anfangswerte (u_0, v_0) wie folgt: Seien (u_{0i}, v_{0i}) eine Folge von analytischen Anfangswerten, die in C^k gegen (u_0, v_0) konvergieren. Zu diesen analytischen Anfangswerten existieren nach Cauchy-Kowalewski Lösungen u_i des Cauchyproblems der Klein-Gordon Gleichung. Mit der obigen Ungleichung sehen wir nun, dass $u_i - u_j$ eine Cauchyfolge in $C^m(D(U_0))$ ist und damit zu einem u konvergiert, welches für $m \geq 2$ selbst eine Lösung der Klein-Gordon Gleichung ist mit unseren Anfangswerten ist.

II.8.3. Auf global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wollen wir das Existenzresultat für das Cauchyproblem von Wellengleichungen auf allgemeinen global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten angeben. Wir beweisen das hier nicht, aber die Grundeigenschaften, wie die Energieungleichungen und die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, die wir in obigen Spezialfällen gesehen haben, bleiben erhalten:

Satz II.8.6. *Sei (M, g) eine global hyperbolische Mannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine glatte Cauchyfläche in M . Sei n das zukunftsgerichtete Einheitsnormalenvektorfeld von S in M und sei P ein Wellenoperator auf (M, g) . Dann gibt es für alle $u_0, u_1 \in C_c^\infty(M)$ und $f \in C_c^\infty(M)$ eine eindeutige Lösung des Cauchyansfangswertproblem*

$$\begin{aligned} Pu &= f \\ u|_S &= u_0 \\ (\nabla_n u)|_S &= u_1. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\text{supp } u \subseteq J(K) \text{ für } K := \text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1 \cup \text{supp } f.$$

In der linearisierte Gravitationstheorie in Abschnitt II.7 waren die auftretenden Differentialgleichungen genau von obiger Form – *lineare hyperbolische Differentialgleichungen*. Für das Cauchyproblem zu den Einsteingleichungen werden wir allerdings sehen, dass selbst bei geeigneter Koordinatenwahl zwar die Terme in den höchsten Ableitungen der Metrik die Form eines Wellenoperators haben werde aber zusätzlich noch nichtlineare Terme in den nullten und ersten Ableitungen auftauchen.

Dann haben wir nicht mehr allgemeine globale Existenz von Lösungen, sondern:

Satz II.8.7. *Sei (M, g) global hyperbolisch und S eine Cauchyfläche. Wir betrachten das quasilineare zweite Ordnung hyperbolische System*

$$h^{\mu\nu}(x, u, \partial_\alpha u) \nabla_\mu \partial_\nu u^\beta = F^\beta(x, u, \partial_\alpha u)$$

mit $u = u^\beta \partial_\beta$ für glatte Funktionen $h^{\mu\nu}$ und F^β und ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang zur Metrik g . Sei $u_0 = u_0^\beta \partial_\beta$ eine Lösung.

Für Anfangswerte genügend nahe an den Anfangswerten von u_0 auf S gibt es eine offene Umgebung V von S in M , so dass das obige System eine eindeutige Lösung u in V hat und $(V, h(x, u, \partial_\alpha u))$ global hyperbolisch ist. Außerdem hängt die Lösung stetig von den Anfangswerten ab und für $B \subseteq S$ hängt die Lösung in $D(B)$ nur von den Anfangswerten in B ab.

Beweisidee. Iteratives System

$$h^{\mu\nu}(x, u_i, \partial_\alpha u_i) \nabla_\mu \partial_\nu u_{i+1}^\beta = F^\beta(x, u_i, \partial_\alpha u_i)$$

startend mit u_0 . Das ist nun linear in u_{i+1}^β bei gegebenem u_i^β , und wir können den letzten Satz anwenden. Dann muss man zeigen, dass die entstehende Folge u_i^β zu einer Lösung konvergiert. \square

II.9. Das Cauchyproblem der Einsteingleichungen

Wir kennen Anfangswertprobleme für Differentialgleichungen aus vielen Bereichen, z.B. schon von den Bewegungsgleichungen $\ddot{x} = -\nabla\Psi$ in der Newtonschen Gravitationstheorie. Ist dort Ψ im \mathbb{R}^3 gegeben und x und \dot{x} zur Zeit $t = 0$ gegeben, dann bestimmt das die Lösung eindeutig.

In der ART suchen wir die Raumzeit selber. Es stellt sich also die Frage, was sollten die Größen sein, die wir als Anfangswerte verwenden zum Lösen der Einsteingleichung?

Im Prinzip haben wir habe wir schon Beispiele gesehen, z.B. in Satz II.4.35 für die Lösungen der Friedmanschen Differentialgleichungen für FLRW für Staub und für die linearisierte Einsteingleichungen im Vakuum.

II. Allgemeine Relativitätstheorie

Kommen wir nun allgemein zu global hyperbolischen Mannigfaltigkeiten (M, g) mit einer Zeitfunktion $t: M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $S := \{t = 0\}$ eine Cauchyfläche. Kann man die Einsteingleichung als Anfangswertproblem für g bzgl. der Zeitrichtung lösen? Falls ja, sollte g auf S (also für $t = 0$) und, da in den Einsteingleichungen zweite Ableitungen von g in allen Koordinatenrichtungen enthalten sind, auch noch die Zeitableitung von $g_s := g|_{\{t=s\}}$ auf S gegeben sein.

Hier kommt wieder zu tragen, dass auch der Energieimpulstensor nicht schon von vornherein bekannt ist, sondern noch durch zusätzliche Materiegleichungen bestimmt wird. Das heißt auch hier müssten wir ein Anfangswertproblem daraus machen. Der Einfachheit halber, betrachten wir hier erst einmal nur Vakuumlösungen. Dann können wir dieses zusätzliche Problem ignorieren.

Als erstes werden wir sehen, dass man im Gegensatz zu obigen Spezialfällen im Allgemeinen h und die ersten Zeitableitungen von h nicht unabhängig voneinander wählen kann.

II.9.1. Die Zwangsbedingungen

Sei (M, g) global hyperbolisch mit Metrik der Form $g = -\beta^2 dt^2 + h_t$. Seien x^i lokale Koordinaten von S . Durch Paralleltransport entlang der Flusslinien von ∂_t erhalten wir mit (t, x^i) lokale Koordinaten von M mit $\partial_t \perp \partial_{x^i}$. Sei $h_{ij} = h_t(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})$.

Dann ist $n = \beta^{-1} \partial_t$ ein Einheitsnormalenvektorfeld mit $g(n, n) = -1$. Sei $K: \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \rightarrow C^\infty(S)$ definiert durch $\Pi(X, Y) = K(X, Y)n$.

Aus $\nabla_X^M Y - \nabla_Y^S X = K(X, Y)n$, $\nabla_X^S Y \perp n$ folgt

$$K(X, Y) = -g(\nabla_X^M Y, n) = g(\nabla_X^M n, Y). \quad (\text{II.45})$$

Weiterhin ist $2g(\nabla_X^M n, n) = X.g(n, n) = 0$ und damit $\nabla_{\partial_{x^i}}^M n = a_i^k \partial_{x^k}$. Die a_i^k bestimmen sich durch

$$g(\partial_{x^\ell}, \nabla_{\partial_{x^i}}^M n) = a_i^k h_{k\ell} \implies a_i^k = h^{k\ell} K(\partial_{x^\ell}, \partial_{x^i}) = h^{k\ell} K_{\ell i}. \quad (\text{II.46})$$

Damit ist $\nabla_{\partial_{x^i}}^M (\partial_t = \beta n) = \beta_{,i} n + \beta h^{k\ell} K_{\ell i} \partial_{x^k}$. Außerdem impliziert $g(\nabla_n^M n, \partial_{x^i}) = -g(n, \nabla_n^M \partial_{x^i}) = -g(n, \nabla_{\partial_{x^i}}^M n) = 0$, dass $\nabla_n^M n = 0$ und $\nabla_{\partial_t}^M \partial_t = \beta_{,0} \partial_t$ ist.

Es gilt (vgl. Übungsaufgabe 45.ii)

$$K_{ij} = K(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) = \frac{1}{2} \beta^{-1} h_{ij,0}$$

und damit $h_{ij,0} = 2\beta K_{ij}$ sowie $\partial_n h_{ij} = 2K_{ij}$.

In den Anfangswerten unseres Cauchyproblem kann also statt der normalen Ableitung der h_{ij} die zweite Fundamentalform gegeben werden.

Sollen h und K wirklich von einer Riemannschen Hyperfläche in einer Lorentz-Mannigfaltigkeit kommen, können Sie nicht unabhängig voneinander gewählt werden:

Satz II.9.1. *Sei (M, g) eine Lorentz-Mannigfaltigkeit. Sei S eine Cauchyhyperfläche von (M, g) mit zweiter Fundamentalform Π , welche wie oben einen symmetrischen $(0, 2)$ -Tensor K induziert. Dann gilt auf S für $h := g|_S$*

$$\begin{aligned} 2G_{nn} &:= 2G(n, n) = \text{scal}^S + |K|_h^2 - (\text{tr}_h K)^2 \\ G_{ni} &:= G(n, \partial_i) = -(\text{div}_h(K - (\text{tr}_h K)h))_i \end{aligned}$$

Die erste Gleichung heißt Hamiltonsche Zwangsbedingung und die zweite Impulswangsbedingung.

*Die Vorzeichen sind in verschiedenen Quellen verschieden. In Choquet-Bruhat ist z.B.

$$\begin{aligned} 2G_{nn} &= \text{scal}^S - |K|_h^2 + (\text{tr}_h K)^2 \\ G_{ni} &= (\text{div}_h(K - (\text{tr}_h K)h))_i. \end{aligned}$$

Das liegt daran, dass dort die Riccikrümmung $\text{Ric}_{\alpha\beta} = R_{\gamma\alpha\beta}^\gamma$ – also das negative unserer Konvention ist.

Beweis. Es ist $G(n, n) = \beta^{-2}G(\partial_t, \partial_t) = \beta^{-2}G_{00}$ und $G(n, \partial_i) = \beta^{-1}G_{0i}$. Da $G_{\mu\nu} = \text{Ric}_{\mu\nu}^M - \frac{\text{scal}^M}{2}g_{\mu\nu}$ ist, müssen wir Ric^M und scal^M ausgedrückt in K und Krümmungsgrößen von S bestimmen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten dies auszurechnen. Wir bleiben hier in den lokalen Koordinaten (t, x^i) . Ein Vorteil ist die Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs für Koordinatenvektorfelder.

Für die Riccikrümmung haben wir

$$\begin{aligned}\text{Ric}_{ik}^M &= h^{\ell j} R_{ij\ell k}^M - \beta^{-2} R_{i0k0}^M \\ \text{Ric}_{00}^M &= (R^M)_{0i0}^i = h^{ir} R_{0i0r}^M \\ \text{Ric}_{0i}^M &= (R^M)_{0ji}^j = h^{jk} R_{0jik}^M = h^{jk} R_{kij0}^M\end{aligned}$$

und für die Skalarkrümmung bedeutet dies

$$\text{scal}^M = g^{\alpha\beta} \text{Ric}_{\alpha\beta}^M = h^{ik} \text{Ric}_{ik}^M - \beta^{-2} \text{Ric}_{00}^M = h^{ik} h^{\ell j} R_{ij\ell k}^M - 2\beta^{-2} h^{ir} R_{0i0r}^M.$$

Wir brauchen also $R_{ij\ell k}^M$, R_{kij0}^M und $(R^M)_{0i0}^r$. Dazu benutzen wir zum einen die Gaußgleichung (II.33) $R_{ij\ell k}^M = R_{ij\ell k}^S + K_{i\ell} K_{jk} - K_{ik} K_{j\ell}$ und die Codazzigleichung (II.34) $(R^M)_{ijk0} = -\beta((\nabla_i K)_{kj} - (\nabla_j K)_{ik})$. Es fehlt uns noch der Krümmungstensor mit zwei Nullen als Indizes:

$$\begin{aligned}R_{0i0r}^M &= g(R^M(\partial_t, \partial_{x^i})\partial_t, \partial_{x^r}) \\ &= g(\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_{x^i}} \partial_t - \nabla_{\partial_{x^i}} \nabla_{\partial_t} \partial_t, \partial_{x^r}) = g(\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_{x^i}} (\beta n) - \nabla_{\partial_{x^i}} \nabla_{\partial_t} \partial_t, \partial_{x^r}) \\ &= g(\nabla_{\partial_t} (\beta, i n + \beta^2 h^{k\ell} K_{\ell i} \partial_{x^k}) - \nabla_{\partial_{x^i}} (\beta, 0 n), \partial_{x^r}) \\ &= (\beta h^{k\ell} K_{\ell i})_{,0} h_{kr} + \beta^2 h^{k\ell} K_{i\ell} K_{ks} h^{su} h_{ur} - \beta_{,0} K_{ik} h^{ks} h_{sr} \\ &= \beta h_{,0}^{k\ell} K_{\ell i} h_{kr} + \beta K_{ri,0} + \beta^2 h^{k\ell} K_{\ell i} K_{kr} \\ &= -\beta h^{k\ell} K_{\ell i} \underbrace{h_{kr,0}}_{=2\beta K_{kr}} + \beta K_{ri,0} + \beta^2 h^{k\ell} K_{\ell i} K_{kr} \\ &= \beta K_{ri,0} - \beta^2 h^{k\ell} K_{\ell i} K_{kr},\end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichheit aus $0 = (h_{kr} h^{k\ell})_{,0} = h_{kr,0} h^{k\ell} + h_{kr} h_{,0}^{k\ell}$ folgt.

Damit haben wir

$$\begin{aligned}\text{Ric}_{ik}^M &= h^{\ell j} R_{ij\ell k}^M - h_{k\ell} \beta^{-2} (R^M)_{0i0}^r \\ &= \text{Ric}_{ik}^S + h^{\ell j} (K_{i\ell} K_{jk} - K_{ik} K_{j\ell}) - h_{k\ell} \beta^{-2} (\beta K_{ki,0} - \beta^2 h^{r\ell} K_{\ell i} K_{kr}) \\ &= \text{Ric}_{ik}^S + h^{\ell j} (K_{i\ell} K_{jk} - K_{ik} K_{j\ell}) - h_{k\ell} (\beta^{-1} K_{ki,0} - h^{r\ell} K_{\ell i} K_{kr})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ric}_{00}^M &= h^{ir} R_{0i0r}^M = h^{ir} (\beta K_{ri,0} - \beta^2 h^{k\ell} K_{\ell i} K_{kr}) \\ \text{Ric}_{0i}^M &= -h^{jk} \beta ((\nabla_k K)_{ij} - (\nabla_i K)_{jk}) = \beta (h^{jk} (\nabla_i K)_{jk} - (\text{div}_h K)_i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{scal}^M &= h^{ik} h^{\ell j} R_{ij\ell k}^M - 2\beta^{-2} h^{ir} R_{0i0r}^M \\ &= \text{scal}^S + h^{ik} h^{\ell j} (K_{i\ell} K_{jk} - K_{ik} K_{j\ell}) - 2\beta^{-2} h^{ir} (\beta K_{ri,0} - \beta^2 h^{k\ell} K_{\ell i} K_{kr}) \\ &= \text{scal}^S + |K|_h^2 - (\text{tr}_h K)^2 - 2h^{ir} (\beta^{-1} K_{ri,0} - h^{k\ell} K_{\ell i} K_{kr}).\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned}G(n, n) &= \beta^{-2} G_{00} = \beta^{-2} (\text{Ric}_{00}^M + \frac{1}{2} \text{scal}^M \beta^2) \\ 2G(n, n) &= 2h^{ir} (\beta^{-1} K_{ri,0} - h^{k\ell} K_{\ell i} K_{kr}) + \text{scal}^S + |K|_h^2 - (\text{tr}_h K)^2 - 2h^{ir} (\beta^{-1} K_{ri,0} - h^{k\ell} K_{\ell i} K_{kr}) \\ &= \text{scal}^S + |K|_h^2 - (\text{tr}_h K)^2\end{aligned}$$

II. Allgemeine Relativitätstheorie

sowie

$$\begin{aligned} G(n, \partial_{x^i}) &= \beta^{-1} G_{0i} = \beta^{-1} \text{Ric}_{0i}^M \\ &= h^{jk} (\nabla_i K)_{kj} - (\text{div}_h K)_i. \end{aligned}$$

Das heißt, es bleibt zu zeigen, dass $h^{jk} (\nabla_i K)_{kj} = (\text{tr}_h K)_i$ gilt, denn dann folgt mit $\text{div}_h(fh) = df$, vgl. ??, die Behauptung: (Γ seien hier die Christoffelsymbole zu ∇^S)

$$\begin{aligned} (\text{tr}_h K)_i &= h^{kj} K_{kj} + h^{kj} K_{kj,i} \\ h^{jk} (\nabla_i K)_{kj} &= h^{jk} K_{kj,i} - h^{jk} K_{rj} \Gamma_{ik}^r - h^{jk} K_{rk} \Gamma_{ij}^r \\ h^{jk} (\nabla_i K)_{kj} - (\text{tr}_h K)_i &= -h^{kj} K_{kj} - h^{jk} K_{rj} h^{rs} (h_{is,k} + h_{ks,i} - h_{ik,s}) \\ &= h^{\ell j} h^{kr} h_{r\ell,i} K_{kj} - h^{jk} K_{rj} h^{rs} h_{ks,i} = 0 \quad \square \end{aligned}$$

Das Problem wäre also: Gegeben sei eine $(n-1)$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit (S, h) und eine symmetrische Bilinearform K auf S , die die Zwangsbedingungen aus Satz II.9.1 erfüllt. Gibt es eine Vakuumlösung (M^n, g) der Einsteingleichungen, so dass es eine isometrische Einbettung $S \hookrightarrow M$ gibt, deren zweite Fundamentalform durch K gegeben ist?

Definition II.9.2. Das Tripel (S, h, K) nennen wir *Anfangswerte*. Die Mannigfaltigkeit (M, g) (falls existent) nennen wir *Einsteinentwicklung* der Anfangswerte. Ohne die Bedingung, dass (M, g) eine Lösung der Einsteingleichungen sein soll, nennen wir (M, g) nur *Entwicklung*.

II.9.2. Wohlgestelltheit der Vakuum-Einsteingleichungen

Vorl. 27

In diesem Abschnitt wollen wir schauen, was wir über die Existenz einer Einsteinentwicklung sagen können, im Falle von Vakuum, also $\text{Ric}^M \equiv 0$.

Aus Bemerkung II.1.21.iii

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\delta = \frac{1}{2} g^{\delta\kappa} (g_{\beta\kappa,\alpha\gamma} - g_{\beta\gamma,\kappa\alpha} - g_{\alpha\kappa,\beta\gamma} + g_{\alpha\gamma,\kappa\beta}) + \text{Terme in } g_{\alpha\beta} \text{ und erste Abl.}$$

folgt

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{\alpha\gamma} &= \frac{1}{2} g^{\delta\kappa} (g_{\delta\kappa,\alpha\gamma} - 2g_{\delta\gamma,\kappa\alpha} + g_{\alpha\gamma,\kappa\delta}) + \text{Terme in } g_{\alpha\beta} \text{ und erste Abl.} \\ &= \frac{1}{2} \square_g g_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} g^{\delta\kappa} (g_{\delta\kappa,\alpha\gamma} - 2g_{\delta\gamma,\kappa\alpha}) + \text{Terme in } g_{\alpha\beta} \text{ und erste Abl.} \quad (\text{II.47}) \end{aligned}$$

Wäre nur der erste Term $\frac{1}{2} \square_g g_{\alpha\gamma}$ da, wäre $\text{Ric}^M \equiv 0$ wieder ein System hyperbolischer Differentialgleichungen. Allerdings haben wir noch weitere zweite Ableitungen der $g_{\alpha\beta}$ und selbst die Terme in den ersten Ableitungen von $g_{\alpha\beta}$ sind hochgradig nichtlinear.

Wir kümmern uns erst einmal um die weiteren zweiten Ableitungen und erinnern wir uns an die linearisierte Theorie, wo wir ein ähnliches Problem durch eine geeignete Wahl von Koordinaten gelöst haben (dort die Lorentzzeichnung). Hier wählen wir *harmonische Koordinaten*, diese zeichnen sich dadurch aus, dass $\square_g x^\alpha = 0$ ist.

Man beachte, dass bei gegebenen lokalen Koordinaten auf S und Wahl einer Zeitableitung dieser Koordinaten auf S (z.B. $x^\alpha, t = 0$) ist dies ein System hyperbolischer Differentialgleichungen und hat damit nach Satz II.8.6 eine Lösung. (Man beachte, dass die Lösung von g abhängt, da die Metrik in \square_g eingeht.)

Was folgt aus der Wahl der harmonische Koordinaten?

$$\begin{aligned} \partial_\mu x^\alpha &= \delta_\mu^\alpha \\ \square_g x^\alpha &= g^{\lambda\mu} (\partial_\mu \partial_\lambda x^\alpha - \partial_\nu x^\alpha \Gamma_{\lambda\mu}^\nu) = -g^{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha. \end{aligned}$$

In harmonische Koordinaten ist also $g^{\lambda\mu} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha \equiv 0$ und damit

$$H_\beta := g^{\lambda\mu} (2g_{\lambda\beta,\mu} - g_{\mu\lambda,\beta}) = 0.$$

Leiten wir die letzte Gleichung in γ -Richtung ab, erhalten wir

$$H_{\beta,\gamma} = g^{\lambda\mu}(2g_{\lambda\beta,\mu\gamma} - g_{\mu\lambda,\beta\gamma}) + \text{Terme in ersten Abl.} = 0$$

Setzt man dies wiederum in (II.47) ein, erhält man

$$\text{Ric}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\square_g g_{\alpha\gamma} + \text{Terme in } g_{\alpha\beta} \text{ und erste Abl.} \quad (\text{II.48})$$

In harmonische Koordinaten ist $\text{Ric}^M = 0$ in den höchsten Ableitungen ein System hyperbolischer Differentialgleichungen.

Wir definieren in (möglicherweise) beliebigen Koordinaten den *reduzierten Ricciten* als

$$\text{Ric}_{\mu\nu}^H := \text{Ric}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu H_\nu + \frac{1}{2}\partial_\nu H_\mu.$$

und die *reduzierten Einsteinvakuungleichung* als

$$\text{Ric}^H \equiv 0.$$

Dann ist

$$\text{Ric}_{\mu\nu}^H = \frac{1}{2}\square_g g_{\mu\nu} + \text{Terme in } g_{\mu\nu} \text{ und erste Abl.}$$

(in harmonischen Koordinaten ist $\text{Ric}_{\mu\nu} = \text{Ric}_{\mu\nu}^H$) und damit bilden die reduzierten Einsteinvakuungleichung ein quasilineares zweite Ordnung hyperbolisches System wie in Satz II.8.7 .

Wenn wir schon eine Lösung kennen, können wir Satz II.8.7 verwenden, um für nahe Anfangswerte weitere Lösungen zu erhalten. Anfangswerte wären $g_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu,0}$ zur der Anfangscauchyfläche ($S = \{t = 0\}$) .

Eine Lösung zu $g_{ij} = h_{ij} = \delta_{ij}$, $g_{00} = -1$, $g_{0i} = 0$, $g_{\alpha\beta,\gamma} = 0$ (also insbesondere $g_{ij,0} = 2K_{ij} = 0$) ist der Minkowskiraum, denn dass ist eine Lösung zu den Vakuumeinsteingleichungen und die Standardminkowski-kordinaten sind harmonische Koordinaten.

Wir wählen als Anfangswerte zu den reduzierten Einsteingleichungen

$$\begin{array}{ll} g_{ij} = h_{ij} & g_{ij,0} = 2K_{ij} \\ g_{00} = -1 & g_{i0} = 0 \\ g_{00,0} = 0 & g_{0k,0} = h^{ij}(2h_{ik,j} - h_{jk,i}) \\ g_{i0,j} = 0, & \end{array}$$

wobei die ersten Zeile aus den Anfangsdaten (h, K) folgt (zusammen mit der Wahl $g_{00} = -1$, vgl. (??)) und die anderen Zeilen so gewählt sind, dass $H_\alpha = 0$ auf S gilt:

$$\begin{aligned} H_0 &= h^{ij}(2g_{i0,j} - g_{j0,i}) - g_{00,0} & \text{auf } S \\ H_k &= h^{ij}(2h_{ik,j} - h_{jk,i}) - g_{0k,0} & \text{auf } S. \end{aligned}$$

Wir werden gleich sehen, warum wir wollen, dass $H_\alpha = 0$ auf S gilt.

Für (h_{ij}, K_{ij}) in C^1 nahe $(\delta_{ij}, 0)$ sind diese Anfangswerte nahe denen zum Minkowskibeispiel von oben. Damit können wir Satz II.8.7 anwenden und erhalten eine eindeutige Lösung g der reduzierten Einsteinvakuungleichung auf einer Umgebung V von S , so dass (V, g) global hyperbolisch ist.

Aber eigentlich wollten wir ja nicht die reduzierten Einsteinvakuungleichungen lösen, sondern die unreduzierten. Wir werden sehen, dass die besondere Wahl der Anfangswerte, so dass $H_\alpha = 0$ auf S gilt, schon impliziert, dass $H_\alpha \equiv 0$ für die gesamte Lösung ist. Somit haben wir sogar harmonische Koordinaten und damit schon eine Lösung der Einsteinvakuungleichung.

II. Allgemeine Relativitätstheorie

Dazu betrachten wir den Einsteintensor

$$G_{\mu\nu} = \text{Ric}_{\mu\nu}^H - \frac{\text{scal}_H}{2} g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu H_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu H_\mu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha H^\alpha.$$

wobei $\text{scal}_H := g^{\alpha\beta} \text{Ric}_{\alpha\beta}^H$ ist.

Für eine Lösung der reduzierten Einsteinvakuumgleichung $\text{Ric}_{\mu\nu}^H = 0$ (und damit $\text{scal}_H = 0$) folgt:

Aus der Zwangsbedingung $G_{\mu 0} = 0$ auf S erhalten wir

$$0 = -\partial_\mu H_0 - \partial_0 H_\mu + g_{\mu 0} \partial_\alpha H^\alpha.$$

Also (für $\mu = i$) $\partial_i H_0 = -\partial_0 H_i$ und (für $\mu = 0$) $-2\partial_0 H_0 = \partial_\alpha H^\alpha$. Da die Anfangswerte so gewählt sind, dass $H_\alpha \equiv 0$ auf S gilt, sind damit auch $\partial_i H_\alpha \equiv 0$ auf S . Damit haben wir $\partial_0 H_\alpha = 0$ auf S .

Aus der Divergenzfreiheit des Einsteintensors folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla^\mu G)_{\mu\nu} = g^{\beta\mu} \nabla_\beta \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu H_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu H_\mu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha H^\alpha \right) \\ &= g^{\beta\mu} \left(-\frac{1}{2} \partial_\beta \partial_\mu H_\nu - \frac{1}{2} \partial_\beta \partial_\nu H_\mu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\gamma} \partial_\beta \partial_\alpha H_\gamma \right) + A_{\beta\nu}^\alpha \partial_\alpha H^\beta \\ &= -\frac{1}{2} g^{\beta\mu} \partial_\beta \partial_\mu H_\nu - \frac{1}{2} g^{\beta\mu} \partial_\beta \partial_\nu H_\mu + \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} \partial_\nu \partial_\alpha H_\gamma + A_\nu^{\alpha\beta} \partial_\alpha H_\beta \\ &= -\frac{1}{2} g^{\beta\mu} \partial_\beta \partial_\mu H_\nu + A_\nu^{\alpha\beta} \partial_\alpha H_\beta + B_\nu^\alpha H_\alpha \end{aligned}$$

für geeignete $A_{\beta\nu}^\alpha, B_\nu^\alpha$ als Funktionen in $g_{\kappa\lambda}$, dem Inversen und bis zu zweiten Ableitungen davon.

Also ist H_α Lösung einer linearen hyperbolischen Differentialgleichungssystem (bei gegebener Metrik g) wie in Satz II.8.6, dessen Anfangswerte verschwinden. Damit ist H_α überall gleich Null und damit löst g nicht nur die reduzierten Einsteingleichungen, sondern sogar die Einsteinvakuumgleichungen.

Sei nun ein Riemannsche Mannigfaltigkeit (S, h) und sei K_p für jedes $p \in S$ eine symmetrische Bilinearform, die glatt vom Punkt abhängt, so dass die Zwangsbedingungen mit $G \equiv 0$ erfüllt. Sei $p \in S$ beliebig. Dann gibt es eine Umgebung von p für die nach obigen Überlegungen, die Einsteinvakuumgleichungen lösbar sind.

Satz II.9.3 (Choquet-Bruhat). *Sei (S, h) eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei K_p für jedes $p \in S$ eine symmetrische Bilinearform, die glatt vom Punkt abhängt. Seien die Zwangsbedingungen ?? für $G \equiv 0$ erfüllt. Dann gibt es (bis auf Isometrie) eine eindeutige Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) , so dass*

- (i) (M, g) ist eine Lösung der Vakuumeinsteingleichungen
- (ii) (M, g) ist global hyperbolisch mit Cauchyfläche S
- (iii) Es ist $h = g|_S$ und die zweite Fundamentalform von S in M ist K .
- (iv) Jede Lorentz-Mannigfaltigkeit (\tilde{M}, \tilde{g}) , die Bedingung (i)-(iii) erfüllt, kann isometrisch in (M, g) eingebettet werden.

Eine solche Lösung (M, g) wird maximale Cauchyentwicklung von (S, h, K) genannt.

Seien (S, h, K) und $(\tilde{S}, \tilde{h}, \tilde{K})$ Anfangswerte, die die Zwangsbedingungen erfüllen, und auf eine geschlossenen Teilmenge $B \subseteq S, \tilde{B} \subseteq \tilde{S}$ mit $B \cong \tilde{B}$ übereinstimmen. Dann sind die Lösungen auf den Abhängigkeitsgebieten $D(B)$ und $D(\tilde{B})$ isometrisch.

A. Ableitung der Schwarzschildlösung mittels des Computeralgebrasystems Maxima

Maxima ist ein Computeralgebra-System (OpenSource, maxima.sourceforge.net). Das Folgende ist die Ausgabe (exportiert in $\text{T}_\text{E}_\text{X}$) von http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Diffgeo-Schwarzschild_maxima.wxm. Dieses 'Arbeitsblatt' rechnet nach, dass die Schwarzschildlösung die einzige statische Vakuumlösung im \mathbb{R}^4 (Signatur: $-+++$) ist, die invariant unter räumlichen Rotationen ist: in Vorl. 9

```
--> /* Ableiten der Schwarzschild-Metrik aus den Bedingungen:
Eine statische (= alle Metrikoeffizienten sind zeitunabhängig) Raumzeit
(Signatur = (-,+,+,+)) auf dem  $\mathbb{R}^4$ , die invariant unter räumlichen
Rotationen ist und die Einsteinvakuumgleichungen (Ric=0) erfüllt.
*/;

(%i4) /* Parametrisierung der Kugel durch Kugelkoordinaten */
x: cos(theta[1])*cos(theta[2]);
y: cos(theta[1])*sin(theta[2]);
z: sin(theta[1]);
F: [x,y,z];
```

$$(\%o1) \quad \cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2)$$

$$(\%o2) \quad \cos(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2)$$

$$(\%o3) \quad \sin(\theta_1)$$

$$(\%o4) \quad [\cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2), \cos(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2), \sin(\theta_1)]$$

```
--> /* Die induzierten Metrik*/
g[i,j]:= diff(F, theta[i]).diff(F, theta[j]);
```

$$(\%o5) \quad g_{i,j} := \text{diff}(F, \theta_i) \cdot \text{diff}(F, \theta_j)$$

```
(%i6) /* Gibt die zugehörige Matrix der induzierten Metrik aus
-- trigsimp performs simplifications that use the Pythagorean identity
-- genmatrix (a, i_2, j_2, i_1, j_1): Generiert eine Matrix aus einem Array a.
Das erste Element der Matrix ist der Wert a[i_1,j_1] und das letzte Element
der Matrix ist a[i_2,j_2].
*/
A:trigsimp(genmatrix(g,2,2,1,1));
```

$$(\%o6) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_1)^2 \end{pmatrix}$$

```
(%i9) /* Ansatz: Statische Metrik in R^4 mit Rotationssymmetrie
-- h1 und h2 sollen Funktionen von r sein
*/

depends([h1, h2],r);
dependencies;

lg: matrix ([-h1(r), 0,0,0], [0, h2(r),0,0], [0,0, r^2*A[1,1], r^2*A[1,2]],
[0,0, r^2*A[2,1], r^2*A[2,2]]);
```

```
(%o7) [h1(r), h2(r)]
```

```
(%o8) [h1(r), h2(r)]
```

$$(\%o9) \begin{pmatrix} -h1(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h2(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_1)^2 \cdot r^2 \end{pmatrix}$$

```
(%i10) /* Setzt ug auf die inverse Matrix von lg*/
ug:invert(lg);
```

$$(\%o10) \begin{pmatrix} -\frac{1}{h1(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h2(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\cos(\theta_1)^2 \cdot r^2} \end{pmatrix}$$

```
(%i13) /* Laden des ctensor-Pakets - das ist ein Paket zum Manipulieren von Tensoren
(wie Metrik, Krümmungstensor...)
Anleitung unter http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima_26.html
-- ausserdem uebergeben wir die Dimension und die Koordinaten */
load(ctensor);
dim:4;
ct_coords:[t,r,theta[1], theta[2]];
```

```
(%o11)
```

```
/usr/share/maxima/5.37.2/share/tensor/ctensor.mac
```

```
(%o12) 4
```

```
(%o13) [t, r, theta[1], theta[2]]
```

```
(%i14) /*Ricci tensor (es werden nur die Komponenten ungleich 0 angezeigt)*/
```

```
uricci(1);
```

$$(\%t14) \quad uric_{1,1} = -\frac{\frac{d}{dr} \cdot h1(r)}{r \cdot h2(r)} - \frac{\left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right)^2}{4 \cdot h1(r) \cdot h2(r)} + \frac{\frac{d^2}{dr^2} \cdot h1(r)}{2 \cdot h2(r)} - \frac{\left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right) \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h2(r)\right)}{4 \cdot h2(r)^2}$$

$$(\%t15) \quad uric_{2,2} = \frac{\left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right)^2}{4 \cdot h1(r)^2} - \frac{\frac{d^2}{dr^2} \cdot h1(r)}{2 \cdot h1(r)} + \frac{\frac{d}{dr} \cdot h2(r)}{r \cdot h2(r)} + \frac{\left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right) \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h2(r)\right)}{4 \cdot h1(r) \cdot h2(r)}$$

$$(\%t16) \quad uric_{3,3} = \frac{1 - \frac{1}{h2(r)} - \frac{r \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h1(r)\right)}{2 \cdot h1(r) \cdot h2(r)} + \frac{r \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h2(r)\right)}{2 \cdot h2(r)^2}}{r^2}$$

$$\begin{aligned}
 (\%t17) \quad uric_{4,4} &= \frac{\cos(\theta_1)^2 - \frac{\cos(\theta_1)^2}{h_2(r)} - \frac{\cos(\theta_1)^2 \cdot r \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h_1(r)\right)}{2 \cdot h_1(r) \cdot h_2(r)} + \frac{\cos(\theta_1)^2 \cdot r \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h_2(r)\right)}{2 \cdot h_2(r)^2}}{\cos(\theta_1)^2 \cdot r^2} \\
 (\%o17) \quad &done
 \end{aligned}$$

--> /* uric[3,3]=uric[4,4], Ziel alle uric[i,j]=0*/;

(%i18) /* also auch: uric[1,1]-uric[2,2]=0*/
 expand(-r*h2(r)^2*h1(r)*(uric[1,1]-uric[2,2]));

$$(\%o18) \quad h_1(r) \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h_2(r)\right) + h_2(r) \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h_1(r)\right)$$

(%i21) /* 0 = d(h1*h2)/dr -- also h2=a/h1 für eine Konstante a*/

e1:subst(a/h1(r), h2(r), uric[1,1]);
 e2:subst(a/h1(r), h2(r), uric[2,2]);
 e3:subst(a/h1(r), h2(r), uric[3,3]);

$$(\%o19) \quad - \frac{\frac{h_1(r) \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h_1(r)\right)}{a \cdot r} - \frac{h_1(r)^2 \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot \frac{a}{h_1(r)}\right) \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h_1(r)\right)}{4 \cdot a^2} - \frac{\left(\frac{d}{dr} \cdot h_1(r)\right)^2}{4 \cdot a} + \frac{h_1(r) \cdot \left(\frac{d^2}{dr^2} \cdot h_1(r)\right)}{2 \cdot a}}{h_1(r)}$$

$$(\%o20) \quad \frac{h_1(r) \cdot \left(\frac{h_1(r) \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot \frac{a}{h_1(r)}\right)}{a \cdot r} + \frac{\left(\frac{d}{dr} \cdot \frac{a}{h_1(r)}\right) \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h_1(r)\right)}{4 \cdot a} + \frac{\left(\frac{d}{dr} \cdot h_1(r)\right)^2}{4 \cdot h_1(r)^2} - \frac{\frac{d^2}{dr^2} \cdot h_1(r)}{2 \cdot h_1(r)}\right)}{a}$$

$$(\%o21) \quad \frac{1 - \frac{h_1(r)}{a} + \frac{r \cdot h_1(r)^2 \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot \frac{a}{h_1(r)}\right)}{2 \cdot a^2} - \frac{r \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h_1(r)\right)}{2 \cdot a}}{r^2}$$

(%i22) ev(e1, nouns);
 /* nouns vs. verbs see:
http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/maxima_6.html
 #Item_003a-Nouns-and-Verbs */;

$$(\%o22) \quad - \frac{\frac{h_1(r) \cdot \left(\frac{d}{dr} \cdot h_1(r)\right)}{a \cdot r} + \frac{h_1(r) \cdot \left(\frac{d^2}{dr^2} \cdot h_1(r)\right)}{2 \cdot a}}{h_1(r)}$$

(%i25) /* nounify und zusammenfassen */

f1:expand(ev(e1, nouns));
 f2:expand(ev(e2, nouns));
 f3:expand(ev(e3, nouns));

$$(\%o23) \quad - \frac{\frac{d^2}{dr^2} \cdot h_1(r)}{2 \cdot a} - \frac{\frac{d}{dr} \cdot h_1(r)}{a \cdot r}$$

$$(\%o24) \quad - \frac{\frac{d^2}{dr^2} \cdot h_1(r)}{2 \cdot a} - \frac{\frac{d}{dr} \cdot h_1(r)}{a \cdot r}$$

$$(\%o25) \quad - \frac{\frac{d}{dr} \cdot h_1(r)}{a \cdot r} - \frac{h_1(r)}{a \cdot r^2} + \frac{1}{r^2}$$

(%i26) /*ode2 kann ODEs zweiter Ordnung lösen*/;
 ode2(r^2*f3=0, h1(r),r);

$$(\%o26) \quad h_1(r) = \frac{\%c + a \cdot r}{r}$$

(%i29) z1:subst((b+a*r)/r, h1(r), f1);
 z2:subst((b+a*r)/r, h1(r), f2);
 z3:subst((b+a*r)/r, h1(r), f3);

A. Ableitung der Schwarzschildlösung mittels des Computeralgebrasystems Maxima

$$(\%o27) \quad -\frac{\frac{d^2}{dr^2} \cdot \frac{b+a \cdot r}{r}}{2 \cdot a} - \frac{\frac{d}{dr} \cdot \frac{b+a \cdot r}{r}}{a \cdot r}$$

$$(\%o28) \quad -\frac{\frac{d^2}{dr^2} \cdot \frac{b+a \cdot r}{r}}{2 \cdot a} - \frac{\frac{d}{dr} \cdot \frac{b+a \cdot r}{r}}{a \cdot r}$$

$$(\%o29) \quad -\frac{\frac{d}{dr} \cdot \frac{b+a \cdot r}{r}}{a \cdot r} - \frac{b + a \cdot r}{a \cdot r^3} + \frac{1}{r^2}$$

```
(%i32) expand(ev(z1, nouns));
      expand(ev(z2, nouns));
      expand(ev(z3, nouns));
```

(%o30) 0

(%o31) 0

(%o32) 0

```
--> /* Also ist die allgemeine Metrik:
      -(a+b/r)*dt^2 +1/(a+b/r)*dr^2 + r^2 Metrik(S^2)*;/
--> /* a entspricht der Lichtgeschwindigkeit c:
      sieht man, wenn man sich lichtartige Geodäten für die asymptotische Metrik
      (r\to infy) anschaut:
      \gamma: \tau \mapsto (\tau , c\tau, 0,0) ist lichtartig für c^2=a^2*/;
--> /* b=-r_S der Schwarzschildradius
      für r_S=0 kommt wieder die Minkowskimetrik raus,
      r_S\in (0, infy) ist die Schwarzschild-Metrik,
      und r_S <0 ? ->
      */;
```


B. Sternmodell

B.1. Statische radialsymmetrische Sterne

Wir wollen uns ein einfaches Materiemodell für einen statischen radialsymmetrischen Stern anschauen. Dazu beginnen wir zunächst mit einem Newtonschen Modell.

B.1.1. Newton

Um Newtonsch den Stern zu beschreiben, brauchen wir die Gleichung für das Gravitationspotential $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ und Materiegleichungen für ρ . Wir modellieren hier den Stern aus perfekte Flüssigkeit, wie Abschnitt II.4.3. Dann sei unser Stern im hydrostatisches Gleichgewicht (Aus Navier-Stokes): $\nabla\mathbf{p} = -\rho\nabla\Phi$ (Hier ist \mathbf{p} der Druck) und erfülle die polytrope Zustandsgleichung $\mathbf{p} = K\rho^{\varkappa:=1+\frac{1}{n}}$ mit Konstanten K und \varkappa , vgl. Bemerkung II.4.34.

Da wir Radialsymmetrie annehmen ist $\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Phi) = 4\pi G\rho$.

Zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned}\partial_r\Phi &= -\rho^{-1}\partial_r\mathbf{p} = -K\rho^{-1}\partial_r\rho^{\varkappa} \\ 4\pi G\rho &= -K\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\rho^{-1}\partial_r\rho^{\varkappa}).\end{aligned}\tag{B.1}$$

Setzen wir $\rho = \rho_c\theta^n$, $n = (\varkappa - 1)^{-1}$, $\tilde{r} = ar$ und $a^2 = \frac{4\pi G}{Kn\varkappa}\rho_c^{2-\varkappa}$, dann muss

$$\frac{1}{\tilde{r}^2}\partial_{\tilde{r}}(\tilde{r}^2\partial_{\tilde{r}}\theta) + \theta^n = 0\tag{B.2}$$

gelten. Das ist die *Lane-Emden-Gleichung*. θ is per Definition dimensionslos und die Lösung von θ hängt nur noch von n (also von \varkappa) ab.

Lösungen für verschiedene n sind in Abbildung B.1 für die Anfangswerte $\theta(0) = 1$ (d.h. $\rho_c = \rho(0)$) und $\partial_r\theta(0) = 0$ abgebildet. Wir wollen $\partial_r\theta(0) = 0$, da sonst es einen δ -Term in der Poissongleichung $\Delta\Phi = 4\pi\rho$ gäbe. Die Lösungen sind im Allgemeinen nicht analytisch, für spezielle Werte hingegen schon: Für $n = 0$ ist $\theta(\tilde{r}) = 1 - \frac{\tilde{r}^2}{6}$, für $n = 1$ ist $\theta(\tilde{r}) = \frac{\sin\tilde{r}}{\tilde{r}}$ und für $n = 5$ ist $\theta(\tilde{r}) = \left(1 + \frac{\tilde{r}^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Wir wollen einen Stern mit definierter Oberfläche bei Radius R , also soll dort $\rho(R) = 0$ sein. Abbildung B.1 suggeriert, dass dies nicht für alle n der Fall ist, z.B. nicht für $n = 5$ siehe oben. Falls doch, nennen wir die Nullstelle der Lane-Emden-Gleichung \tilde{R}_n und dann ist $R = R_n = a^{-1}\tilde{R}_n$.

Wir werden $\rho_c = \rho(0)$ noch mit der Masse des Sterns in Verbindung bringen:

$$M = \int_0^{R_n} \rho(u)4\pi u^2 du = \int_0^{\tilde{R}_n} \rho_c\theta^n 4\pi a^{-3}v^2 dv = c_n\rho_c^{\frac{3}{2}\varkappa-2}$$

mit c_n einer Konstante, die nur von n abhängt. Insbesondere kann jeder Kombination von (R, M) durch geeignete Wahl von ρ_c erreicht werden, da R und M mit unterschiedlichen Potenzen von ρ_c gehen.

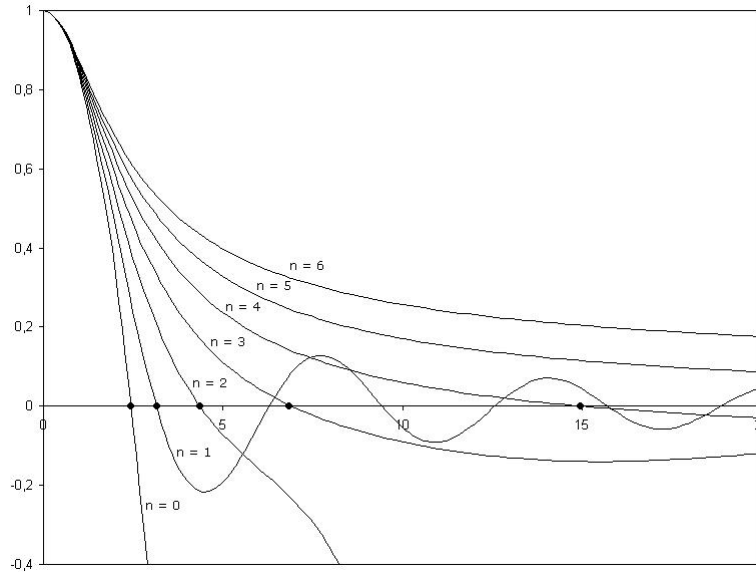


Abb. B.1.: Lösungen der Lane-Emden Gleichung (B.2) für verschiedene n (also verschiedene \varkappa) für die Anfangswerte $\theta(0) = 1$ und $\partial_r\theta(0) = 0$.

Quelle: Von Lechatjaune - Eigenes Werk, Gemeinfrei,

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4202264>

B.1.2. ART

Wir wollen nun das Sternmodell relativistisch rechnen auf $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ (noch immer radialsymmetrisch, siehe Definition unten) zu jeder Zeit t . Wir wollen also die Einsteingleichung (für $\Lambda = 0$) eine perfekte Flüssigkeit wie in (II.25) lösen:

$$G_{00} = \rho, \quad G_{ij} = \mathfrak{p}g_{ij}.$$

In der ART entspricht in diesem Modell die Gleichung fürs hydrostatische Gleichgewicht die Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensor (Das ist einfach wieder die Impulserhaltung, vgl. Seite 26.).

Zusätzlich brauchen wir noch eine Materiegleichung $\rho = \rho(\mathfrak{p})$, z.B. der Einfachheit halber wieder die polytrope Zustandsgleichung $\mathfrak{p} = K\rho^\varkappa$ (bzw. eine relativistische Version davon). Aber hier schauen wir einfach, was wir schon für eine allgemeine Materiegleichung der Form $\rho = \rho(\mathfrak{p})$ sagen können.

Erst einmal müssen wir sagen, was radialsymmetrisch eigentlich heißen soll:

Definition B.1.1. Sei $((t, x) \in M \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, g)$ eine Lorentzmannigfaltigkeit. Seien $M_s := \{t = s\} \subseteq M$ raumartige Untermannigfaltigkeiten, d.h. $g_s := g|_{M_s}$ ist Riemannsche Metrik auf M_s . Sei ∂_t zeitartig. Dann nennen wir (V, g) *radial symmetrisch*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Für jedes $s \in \mathbb{R}$ ist M_s diffeomorph zu \mathbb{R}^3 ohne Umgebung des Ursprungs ist g_s sind die Rotationen um den Ursprung Isometrien.
- (ii) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist sowohl die Länge von ∂_t und die Länge der orthogonalen Projektion auf TM_s invariant unter räumlichen Rotationen.

Lemma B.1.2. Eine radial symmetrische Lorentzmannigfaltigkeit (V, g) besitzt lokale Koordinaten (t, r, φ, θ) , so dass die Metrik die Form

$$g = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{B.3}$$

hat, wobei λ und ν nur Funktionen von t und r sind.

Beweisskizze – Übungsaufgabe 38. Aus Übungsaufgabe 18.ii folgt $g_s = e^{\tilde{\lambda}(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$. Für die Metrik g haben wir damit den Ansatz $-a^2(r, \tau) d\tau^2 + b(r, \tau)(d\tau \otimes dr + dr \otimes d\tau) + e^{\lambda(r, \tau)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$. Um $b(r, \tau)$ zu eliminieren führt man eine geeignete neue Zeitkoordinate $t = t(r, \tau)$ ein. \square

Satz B.1.3. (Birkhoff) *Jede radialsymmetrische Lösung der Vakuum-Einsteingleichung mit $\Lambda = 0$ ist isometrisch zur Schwarzschildmetrik.*

Beweis. Übungsaufgabe 39 \square

Der letzte Satz verallgemeinert damit Appendix A, wo wir ausgerechnet hatten, dass statische radialsymmetrische Lösungen der Vakuum-Einsteingleichung mit $\Lambda = 0$ die Schwarzschildmetriken sind.

Wir suchen hier jetzt auch erst einmal nach statischen radial symmetrischen Lösungen für das Sternmodell, wobei statisch impliziert, vgl. Def. ??, dass ν und λ nur noch Funktionen von r sind.

Die Metrik (B.3) mit $\nu = \nu(r)$ und $\lambda = \lambda(r)$ ist eine Lösung der Einsteingleichungen mit $\Lambda = 0$ für den Energie-Impuls-Tensor einer perfekten Flüssigkeit mit Druck \mathbf{p} und Energiedichte ρ , falls

$$\mathbf{p} = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \quad (\text{B.4})$$

$$\rho = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dr} = - \frac{\mathbf{p} + \rho}{2} \nu' \quad (\text{B.6})$$

Wollen wir einen Stern mit definierter Oberfläche, muss es ein R mit $\mathbf{p}(R) = 0$ geben. Damit erhalten wir aus (B.6)

$$\nu(r) = \nu(R) - \int_0^{r-R} \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{p} + \rho(\mathbf{p})} dr.$$

Für $r > R$ gibt es dann keine Materie und die einzigen radial symmetrischen Lösungen sind die Schwarzschildmetriken, parametrisiert über den Schwarzschildradius. Da ρ und \mathbf{p} auch in R stetig sind, folgt dass λ und ν in r mindestens C^1 ist. Wir können also $\nu(R)$ durch matchen mit einer Schwarzschildlösung mit dem Schwarzschildradius r_S in Verbindung bringen:

$$e^{\nu(r)} = \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) e^{-\int_0^{r-r_S} \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{p} + \rho(\mathbf{p})} dr}$$

für $r \leq R$. Damit wird $\nu(r)$ durch $\mathbf{p}(r)$ bestimmt.

Wir setzen $u(r) := \frac{r}{2}(1 - e^{-\lambda})$ und erhalten aus (B.5) und (B.4) zusammen mit (B.6)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= \frac{1}{2} \rho r^2 \\ \frac{d\mathbf{p}}{dr} &= - \frac{\mathbf{p} + \rho}{2r(r - 2u)} (r^3 \mathbf{p} + 2u). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Dies ist ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in u und \mathbf{p} .

Aus der ersten Differentialgleichung folgt $e^{-\lambda} = 1 - \frac{1}{r} \int_0^r \rho v^2 dv$ und damit $e^{-\lambda} \leq 1$. Für eine glatte Metrik in Kugelkoordinaten muss $\lambda(0) = 0$ und damit $e^{-\lambda(0)} = 1$ sein.

Die Gesamtenergie des Sterns ist $M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) e^{-\lambda(r)} dr$

B. Sternmodell

$$M \leq \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr = 2\pi(u(R) - u(0)) = 2\pi u(R) = \pi R(1 - e^{-\lambda(R)}) = \pi R \left(1 - \left(1 - \frac{r_S}{R}\right)\right) = \pi r_S.$$

Wir hatten einige Naturkonstanten auf eins gesetzt, deshalb passen die Einheiten nicht.

Außerdem sehen wir wegen

$$M \leq 2\pi u(R) = \pi R(1 - e^{-\lambda}) \leq \pi R.$$

Im Gegensatz zum Newtonschen sind der Radius des Sterns und die Gesamtenergie des Sterns nicht mehr unabhängig.

Die Gleichung (B.7) ist die *Tolman-Oppenheimer-Volkoff*-Gleichung des relativistischen hydrostatischen Gleichgewichts.

Mit dieser Gleichung und der Annahme, dass der Druck \mathbf{p} endlich sein soll, kann man eine bessere obere Schranke an die Gesamtenergie finden: $M \leq \frac{8\pi}{9} R$.

B.2. Gravitativer Kollaps

Am Beispiel von sphärisch symmetrischem Staub wollen wir nun einen gravitativen Kollaps anschauen. Beim Staub (=perfekte Flüssigkeit mit verschwindendem Druck) sind die Trajektorien der Staubteilchen zeitartige Geodätische. Benutzen wir diese Geodätische als Zeitlinien, dann erhalten wir *mitbewegte Koordinaten*. Im sphärisch symmetrischen Fall hat die Metrik in diesen mitbewegten Koordinaten die Form

$$-dt^2 + \omega(t, r)^2 dr^2 + R(t, r)^2 (d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2).$$

Der r -Parameter nummeriert die einzelnen Staubsphären zur Anfangszeit. A priori sind das nur gute Koordinaten, so lange es kein *shell crossing* gibt, d.h. dass der Staub auf der r_1 -Sphäre nach einiger Zeit mit dem Staub auf der r_2 -Sphäre auf der gleichen Sphäre im Raum liegt. Das kann wirklich passieren, wie man schon im Newtonschen sehen kann: Hat eine äußere Staubsphäre eine sehr hohe Anfangsgeschwindigkeit in Richtung Ursprung und hat eine innere Staubsphäre Anfangsgeschwindigkeit Null, wird beide äußere Sphäre die innere im Kollabieren überholen.

Wir fixieren den r -Parameter durch $r = R(0, r)$. Da der Staub sich auf den Zeitlinien bewegt, ist der Energieimpulstensor durch $T_{\mu\nu} = \rho(t, r)\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0}$ mit Energiedichte ρ gegeben.

Berechnen wir für obige Metrik die Einsteingleichungen erhalten wir

$$\rho = G_{tt} = \frac{1}{R^2 w^3} (2\dot{R}R\dot{w}w^2 + 2R'Rw' + \dot{R}^2 w^3 - 2R''Rw - (R')^2 w + w^3) \quad (\text{B.8})$$

$$0 = G_{tr} = \frac{2}{Rw^3} (R'\dot{w} - \dot{R}'w) \quad (\text{B.9})$$

$$0 = G_{rr} = \frac{1}{R^2 w^2} (2\ddot{R}Rw^2 + \dot{R}^2 w^2 - (R')^2 + w^2) \quad (\text{B.10})$$

$$0 = G_{\varphi\varphi} = G_{\theta\theta} = \frac{1}{Rw^3} (\ddot{w}w^2 R + \dot{R}\dot{w}w^2 + R'w' + \ddot{R}w^3 - R''w) \quad (\text{B.11})$$

Aus (B.9) folgt $R'\dot{w} = \dot{R}'w$ und damit

$$R' = f(r)w \quad (\text{B.12})$$

für eine beliebige Funktion $f = f(r)$. Einsetzen in (B.8) ergibt

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\dot{R}^2}{R^2} + 2\frac{\dot{R}'\dot{R}}{RR'} - 2\frac{ff'}{RR'} + \frac{f^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} \\ \rho R^2 R' &= -\dot{R}^2 R' - 2\dot{R}'\dot{R}R + 2ff'R + f^2 R' - R' \\ M(t, r) &:= \int_0^r \rho R^2 R' ds = f^2 R - R - \dot{R}^2 R \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Einsetzen von ...

$$\begin{aligned} 0 &= 2\ddot{R}R + \dot{R}^2 - f^2 + 1 \\ 0 &= \ddot{w}R + \dot{R}\dot{w} + \ddot{R}w - f' \end{aligned}$$

Aus der Divergenzfreiheit des Energieimpulstensors folgt

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\mu\alpha}(\nabla_\mu T)_{\nu\alpha} = g^{\mu\alpha}(\partial_\mu T_{\nu\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^\kappa T_{\kappa\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\kappa T_{\kappa\nu}) \\ \nu = 0 & \quad 0 = -\dot{\rho} + \Gamma_{00}^0 \rho - g^{\mu\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^0 \rho = -\dot{\rho} - \rho(\omega^{-1}\dot{\omega} + 2R^{-1}\dot{R}) \\ \nu = i & \quad 0 = \Gamma_{0i}^0 \rho \end{aligned}$$

Nur die 0-Komponente der Divergenz enthält demnach eine nichttriviale Information: $0 = \dot{\rho} + \rho(\omega^{-1}\dot{\omega} + 2R^{-1}\dot{R})$. Damit erhalten wir

$$\rho(t, r) = \frac{1}{R^2 \omega} \varphi(r) \stackrel{(\text{B.12})}{=} \frac{f(r)\varphi(r)}{R^2 R'} \quad (\text{B.14})$$

für eine beliebige Funktion $\varphi = \varphi(r)$.

Wegen $R(0, r) = r$ ist $R'(0, r) = 1$ und damit $\rho_0(r) := \rho(0, r) = \frac{f(r)\varphi(r)}{r^2}$. Zusammen ergibt sich mit (B.13)

$$M(t, r) = \int_0^r \rho_0(s) s^2 ds,$$

dass $M(r) := M(t, r)$ nur von r abhängt.

Zusammen also

$$\dot{R}^2 - \frac{M(r)}{R} = f^2(r) - 1.$$

Da wir erst einmal an überhaupt einer Lösung interessiert sind, betrachten wir den Fall $f(r) = 1$:

$$\dot{R}R^{\frac{1}{2}} = \pm \sqrt{M(r)}.$$

Für eine kontrahierende Staubwolke suchen wir eine Lösung mit Minus, also

$$R(t, r)^{\frac{3}{2}} = A(r) - \frac{3}{2}\sqrt{M(r)}t$$

für eine Funktion $A = A(r)$. Wegen der Anfangsbedingung $R(0, r) = r$ folgt $A(r) = r^{\frac{3}{2}}$ und damit

$$R(t, r) = \left(r^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{M(r)}t \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Das ergibt

$$R^{\frac{1}{2}} R' = r^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}M(r)^{-\frac{1}{2}}M'(r)t. \quad (\text{B.15})$$

B. Sternmodell

Weiterhin folgt mit $M'(r) = \rho_0(r)r^2$ und (??)

$$\rho(t, r) = \frac{r^2 \rho_0(r)}{(r^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \sqrt{M(r)} t)(r^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} M(r)^{-\frac{1}{2}} \rho_0(r) r^2 t)}$$

Außerdem folgt aus (B.15), dass zur Zeit

$$t_1(r) = \frac{2r^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{M(r)}}$$

die Staubsphäre zum Parameter r bei $R = 0$ auftritt.

Wir machen einen Koordinatenwechsel von r, t zu R, t : Wegen $f \equiv 1$ ist $R' = \omega$ und damit

$$dR = R' dr + \dot{R} dt = \omega dr - R^{-\frac{1}{2}} \frac{3}{2} \sqrt{M(r)} dt.$$

Für die Metrik bedeutet das

$$g = - \left(1 - \frac{\sqrt{M(r)}}{R} \right) dt^2 + 2R^{-\frac{1}{2}} \sqrt{M(r)} dR dt + dR^2 + R^2 d\Omega^2.$$

Dieser Koordinatenwechsel ist nur dann wohldefiniert, wenn R' nicht verschwindet. Aus (B.15) folgt, dass R' zur Zeit

$$t_2(r) = \frac{2r^{\frac{1}{2}} M(r)^{\frac{1}{2}}}{M'(r)} = \frac{2M(r)^{\frac{1}{2}}}{\rho_0(r) r^{\frac{3}{2}}}.$$

Also für $t \in (0, t_2(r))$ ist dieser Koordinatenwechsel erlaubt und wir sehen, dass für konstantes t der räumliche Anteil der Metrik dann einfach nur die euklidische Metrik ist.

Damit $t_1(r)$ der Kollaps der r -Staubsphäre wirklich stattfindet, bevor wir in eine Koordinatensingularität ($R' \equiv 0$) kommen, brauchen wir $t_1(r) \leq t_2(r)$. Also

$$\frac{1}{3} \rho_0(r) r^3 \leq M(r) = \int_0^r \rho_0(s) s^2 ds.$$

Wenn wir annehmen, dass ρ_0 monoton von $r = 0$ bis zur Sternoberfläche, sagen wir bei $r = a$, fällt, ist dies der Fall. Dann ist das erste Mal, dass eine Singularität auftritt, also eine erste Staubsphäre bei $R = 0$ auftritt durch

$$t_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \left(t_1(r) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{r^3}{\int_0^r \rho_0(s) s^2 ds}} \right) = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \sqrt{\lim_{r \rightarrow 0} \frac{3r^2}{\rho_0(r) r^2}} = 2\sqrt{3} \rho_0(0)^{-\frac{1}{2}}.$$

Insbesondere sehen wir, dass die Singularität nicht instantan auftritt. Aber je größer $\rho_0(0)$ ist, um kleiner ist t_0 .

Bis jetzt haben wir im Falle von Staub mit monoton fallender Anfangsenergiedichte $\rho_0(r)$ auf $r \in (0, a)$ die resultierende Metrik für $r \in (0, a)$, $t \in (0, t_2(r))$ erhalten. Nun wollen wir diese noch auf $r \geq a$ (also $R \geq (a^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \sqrt{M_a} t)^{\frac{2}{3}}$) erweitern. Unsere Berechnungen von oben gelten auch für $r \geq a$; allerdings ist dort $\rho_0(r) = 0$ und $M(r) = M_a := \int_0^a \rho_0(s) s^2 ds$.

Die Metrik für $r \geq a$ ist also

$$g_{\text{ext}} = - \left(1 - \frac{\sqrt{M_a}}{R} \right) dt^2 + 2R^{-\frac{1}{2}} \sqrt{M_a} dR dt + dR^2 + R^2 d\Omega^2.$$

Das ist eine geboostete Schwarzschildmetrik – die Standardschwarzschildform erhält man durch einen Wechsel der Zeitkoordinate

$$d\tau = dt - \left(1 - \frac{M_a}{R}\right)^{-1} \sqrt{\frac{M_a}{R}} dR.$$

Insgesamt haben wir für $0 \leq R \leq \left(a^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{M_a t}\right)^{\frac{2}{3}}$ die innere Lösung von oben und für größere R die externe Metrik g_{ext} . Für $R < M_a$ ist also die innere Staublösung hinter dem Schwarzschildhorizont und damit von außen nicht sichtbar. Das beginnt zur Zeit

$$t_3 = \frac{2}{3}(a^{\frac{3}{2}} - M_a^{\frac{3}{2}})M_a^{-\frac{1}{2}}$$

(im Falle $a < M_a$ ist der Staubstern schon zur Zeit $t = 0$ nicht sichtbar).

Würde die Singularität sichtbar sein, also nicht hinter einem Horizont verschwinden, nennt man sie *nackte Singularität*.

Diese Beobachtung, dass der Kollaps hinter einem Horizont stattfindet, wurde auch für andere Lösungen....

Aufgrund dessen hat Penrose folgende Vermutung aufgestellt:

(Weak) Cosmic censorship conjecture: Eine generische Lösung der Einsteingleichungen mit physikalisch vernünftigen Gravitationsquellen besitzt keine nackten Singularitäten.

Hier tritt neben der Frage was physikalisch vernünftige Gravitationsquellen sein sollen auch wieder die Frage nach einer guten Definition von Singularitäten auf, vgl. Abschnitt ??.

C. Übungsaufgaben

Übungsaufgabe A. [Zur Newtonschen Mechanik] Sei $\Psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Sei $x = x(t)$ der Pfad eines Körpers der Masse m , der die Bewegungsgleichung $\ddot{x} = -\nabla\Psi$ erfüllt.

- (i) Rechnen Sie nach, dass die Energie des Körpers $E = \frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 + m\Psi(x)$ entlang $x(t)$ konstant ist.
- (ii) (Bewegungsgleichung über die Lagrangefunktion L)
Für $y \in C^\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^3)$ sei

$$L(y) := \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2}m|\dot{y}(t)|^2 - m\Psi(y(t)) \right) dt. *$$

Sei $\delta \in C^\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^3)$ mit $\delta(t_0) = \delta(t_1) = 0$. Wir setzen $y_\epsilon(t) = y(t) + \epsilon\delta(t)$. Dann heißt $y(t)$ *kritischer Punkt* von L , wenn für alle $\delta \in C^\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^3)$ mit $\delta(t_0) = \delta(t_1) = 0$, $\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}L(y_\epsilon) = 0$ gilt.

Berechnen Sie $\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}L(y_\epsilon)$ und zeigen Sie, dass $y(t)$ genau dann ein kritischer Punkt von L ist, wenn $\ddot{y} = -\nabla\Psi$ ist, also für y die Bewegungsgleichung gilt.

- (iii) (Allgemeine Lagrangegleichungen) Sei nun $\mathcal{L}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und setze für $y \in C^\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$

$$S(y) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(y(t) = (y^1(t), \dots, y^n(t)), \dot{y}(t) = (\dot{y}^1(t), \dots, \dot{y}^n(t))) dt.$$

Zeigen Sie analog zu (ii), dass y ein kritischer Punkt von S ist, wenn die *Lagrangegleichungen*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^k} \quad \text{für } k = 1, \dots, n \quad (\text{C.1})$$

erfüllt sind.

Übungsaufgabe B. Sei $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ radialsymmetrisch und habe Träger in $r \leq R$. Wir setzen $M := \int_0^R 4\pi u^2 \rho(u) du$. Sei $\Delta\Psi = 4\pi G\rho$. Zeigen Sie, dass $\Psi(r) = -\frac{MG}{r}$ für $r > R$ eine Lösung ist.

*Beachten Sie, dass der Integrand von L die kinetische Energie minus die potentielle Energie ist – die Energie in (i) die Summe beider Energien ist.

Übungsaufgabe 1. [Planetenbewegung mittels Newton] Nehmen wir an, dass $\Psi(x) = -\frac{M}{|x|}$ das Gravitationspotential der Sonne sei.* Wir setzen die Masse des Testkörpers $m = 1$. Hier nehmen wir an, dass wir den Gravitationseinfluss des Testkörpers vernachlässigen können, vgl. dazu Übungsaufgabe 2, und dass wir die Planeten, wie Punktteilchen behandeln können, vgl. dazu Übungsaufgabe B.

- (i) Zeigen Sie, dass $x \times \dot{x}$ konstant in t ist und folgern Sie, daraus, dass die Bewegung auf einer Ebene durch $x = 0$ stattfindet.

Von nun an können wir die Betrachtungen nur auf eine Ebene reduzieren.

- (ii) Berechnen Sie die kinetische Energie T und potentielle Energie V eines Testkörpers der Masse m im Gravitationsfeld der Sonne in Polarkoordinaten (r, φ) . Berechnen Sie die Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten (Hinweis: Nutzen Sie (C.1) mit $\mathcal{L} = T - V$. Es ist besser die $\frac{d}{dt}$ Ableitungen nicht gleich auszurechnen.)
- (iii) Folgern Sie, dass $\ell := r^2 \dot{\varphi}$ konstant ist und berechnen Sie $E := T + V$ als Funktion von r, \dot{r}, ℓ . (Nach Aufgabe 1(i) ist E konstant in der Zeit. Die Konstanten ℓ und E werden durch die Anfangswerte $(r(0), \varphi(0), \dot{r}(0), \dot{\varphi}(0))$ bestimmt.)
- (iv) Folgern Sie aus (ii) und (iii), dass $\ddot{r} = \frac{dW(r)}{dr}$ für ein geeignetes $W(r)$ gilt. Skizzieren Sie, den qualitativen Verlauf von $W(r)$. $W(r)$ wird *effektives Potential* genannt. Für welche Anfangswerte gibt es Lösungen mit $a \leq r(t) \leq b$ für $[a, b] \subseteq (0, \infty)$ und alle t ? (Hinweis: Für solche Lösungen muss es Punkte mit $\dot{r} = 0$ geben.)
- (v) Wir wollen nun die Spur $r = r(\varphi)$ der Planetenbewegung bestimmen. Die Ableitung bzgl. φ bezeichnen wir mit $'$ (also $r' = \frac{dr}{d\varphi}$) im Gegensatz zur Zeitableitung \dot{r} . Wir setzen $u = 1/r$. Rechnen Sie die Differentialgleichung $\ddot{r} = \dots$ aus (iii) in eine für u'' um, vgl. Bemerkung I.1.2.

Übungsaufgabe 2. [Planetenbewegung nach Newton Teil 2] In der letzten Aufgabe haben wir eigentlich angenommen, dass der Testkörper/der Planet gar keinen Effekt auf die Sonne hat, bzw. dass wir diesen vernachlässigen können. Wie gerechtfertigt ist das eigentlich? Dazu verwenden wir hier den Lagrangeformalismus:

Die Sonne bewege sich entlang $x(t) \in \mathbb{R}^3$ und habe die Masse M , der Planet entlang $y(t) \in \mathbb{R}^3$ und Masse m .

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2}_{\text{gesamte kinetische Energie}} - m\Psi(x - y) \text{ mit } \Psi(x) = -\frac{M}{|x|} \text{ das Gravitationspotential.}$$

- (i) Führen Sie die Koordinatentransformation $z = x - y$ und $u = \frac{1}{M+m}(Mx + my)$ aus und berechnen Sie $\mathcal{L}(z, u, \dot{z}, \dot{u})$.
- (ii) Berechnen Sie für z und u mittels (C.1) die Bewegungsgleichungen.
- (iii) Was bedeutet die Gleichung für u ?
- (iv) Vergleichen Sie die Gleichung für z mit $\ddot{y} = -\nabla\Psi(y)$, die wir erhalten, wenn wir annehmen dass die Sonne starr in $x = 0$ sitzt und die Gravitation des Planeten keine Auswirkungen hat. Wann ist diese Annahme sinnvoll?
- (v) Statt den Lagrangeformalismus hätten wir auch direkt die Bewegungsgleichungen für $(x, y) \in \mathbb{R}^6$ verwenden können - wie sehen diese aus?

*vgl. Übungsaufgabe B. Wir setzen $G = 1$.

Übungsaufgabe 3. [Zu Lorentztransformationen]

Ein Beobachter bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit $v = (v^0, v^1, 0, 0)$ im Minkowskiraum (also gilt insbesondere $\eta(v, v) = -1$).

- (i) Finden Sie einen Lorentz-Boost, so dass sich der Beobachter in den neuen Koordinaten in (räumlicher) Ruhe befindet – *Eigenzeitkoordinaten* ($y^0(\tau) = \tau, y^i(\tau) = 0$). Ist diese Transformation eindeutig?
- (ii) Ein Körper befinde sich in einem konstantem Abstand r zum Beobachter. Es ist klar, was dies in Eigenzeitkoordinaten bedeutet – der Körper bewegt sich auf der Geraden $t \mapsto (t, y^1, y^2, y^3)$ mit $\sum_i (y^i)^2 = r^2$. Wie bewegt sich dieser Körper in den alten Koordinaten?
- (iii) In den Eigenzeitkoordinaten ist das *Jetzt* (alles was sich für den Beobachter gleichzeitig ist) des Beobachters die Ebene $\{\tau = 0\}$. Wie sieht das Jetzt des Beobachters konkret in den alten Koordinaten aus?
- (iv) Zeigen Sie allgemein, dass das Jetzt eines Beobachters im Punkt x mit der Geschwindigkeit v , die Hyperebene $v^\perp = \{y \in M \mid \langle v, y \rangle_L = 0\}$ ist.
- (v) Zeigen Sie, dass alle Elemente von v^\perp raumartig sind.

Übungsaufgabe 4.

- (i) Ein Beobachter sei in einem Bezugssystem in Ruhe – also ($t = x^0, \vec{0}$). Zwischen $t = 0$ und $t = T$ vergeht für diesen Beobachter die Eigenzeit T . Finden Sie eine Folge von Beobachtern γ_i mit $\gamma_i(0) = (0, \vec{0})$ und $\gamma_i(T) = (T, \vec{0})$ für welche zwischen diesen zwei Raumzeitpunkten die Eigenzeit $T_i \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$ vergeht.
- (ii) Zeigen Sie, dass im Minkowskiraum $M = \mathbb{R}^n$ für alle $x, y \in M$, die licht- oder zeitartig sind, die *inverse Cauchy-Ungleichung* gilt:

$$\eta(x, y)^2 \geq \eta(x, x)\eta(y, y).$$

Charakterisieren Sie den Gleichheitsfall. (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass es für $x \in M$ zeitartig und $y \in M$ immer ein $a \in \mathbb{R}$ und $z \in M$ mit $y = ax + z$ und $\eta(x, z) = 0$ gibt.)

- (iii) Nutzen Sie (ii) um die *inverse Dreiecksungleichung* zu beweisen: Seien $x, y \in M$ zeitartig oder lichtartig, so dass auch $x + y$ zeit- oder lichtartig ist. Wir setzen $|x| := \sqrt{|\eta(x, x)|}$. Dann gilt

$$|x + y| \geq |x| + |y|.$$

Übungsaufgabe 5 (Das 'Garagenparadox'). Lösen Sie diese Aufgabe aus [10] "The lack of a notion of absolute simultaneity in special relativity leads to many supposed paradoxes. One of the most famous of these involves a car and a garage of equal proper length. The driver speeds toward the garage, and a doorman at the garage is instructed to slam the door shut as soon as the back end of the car enters the garage. According to the doorman, 'the car Lorentz contracted and easily fitted into the garage when I slammed the door.' According to the driver, 'the garage Lorentz contracted and was too small for the car when I entered the garage.' Draw a spacetime diagram showing the above events and explain what really happens. Is the doorman's statement correct? Is the driver's statement correct? For definiteness, assume that the car crashes through the back wall of the garage without stopping or slowing down."

Übungsaufgabe 6. Seien $x = (x^0, \dots, x^n) \mapsto y = (y^0, \dots, y^n)$ ein Diffeomorphismus und

$$g_{\mu\nu}(x) := \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \text{ sowie } \Gamma_{\mu\nu}^\lambda := \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

(i) Rechnen Sie

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (g_{\mu\kappa,\nu} + g_{\nu\kappa,\mu} - g_{\mu\nu,\kappa}).$$

nach. (Hinweis: Berechnen Sie $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\eta}$.)

(ii) Bestimmen Sie alle Lorentzmetriken $(g_{\mu\nu} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})_{\mu\nu}$ für die $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv 0$ für alle μ, ν, λ gilt.

Übungsaufgabe 7. Sei $(M = N \times \mathbb{R}, g = f^2(u)h \pm du^2)$, wobei h eine Riemannsche Metrik auf der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit N sei. Sei (x^1, \dots, x^n) ein lokales Koordinatensystem auf N , in dem h die Form $h_{ij}dx^i dx^j$ habe.

- (i) Berechnen Sie die Geodätengleichungen (= kritische Punkte des Energiefunktionals (II.3)) im lokalen Koordinatensystem (u, x^1, \dots, x^n) . (Hinweis: Verwenden Sie (C.1) analog zu den Rechnungen zum Minkowskiraum auf Seite 11. Hier ist $\mathcal{L} = \frac{1}{2}f^2(u)h_{ij}dx^i dx^j \pm \frac{1}{2}du^2$.)
- (ii) Zeigen Sie, dass für den Fall $g = h - du^2$ die Geodätischen (= Lösungen der Geodätengleichung) von M alle die Form $c(t) = (\gamma(t), at)$ für ein konstantes a und eine Geodätische γ von (N, h) haben.
- (iii) Zeigen Sie, dass im Fall $(N = S^1, h = dx^2)$ alle Geodätische eine Gleichung $\ddot{u} = 2c \frac{f'(u)}{f(u)}$ für ein konstantes $c \in \mathbb{R}$ erfüllen. Was sind dann die Geodätischen in \mathbb{R}^2 ($f(u) = u$), in S^2 ($f(u) = \sin u$) und in \mathbb{H}^2 ($f(u) = \sinh u$)?

Übungsaufgabe 8.

- (i) Sei ein Vektorfeld X auf einer glatten Mannigfaltigkeit in einer lokalen Karte $\kappa: U \rightarrow V$ als $X(p) = X^i(\kappa(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ für glatte $X^i: V \rightarrow \mathbb{R}$ darstellbar. Rechnen Sie diese Darstellung in eine andere Karte $\kappa': U \rightarrow V'$ (lokale Koordinaten auf V' seien dann y^α .) um.
- (ii) Seien M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten und $f: M \rightarrow N$, so dass für eine Karte $\kappa: U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ um p (d.h. $p \in U$) und eine Karte $\tilde{\kappa}: \tilde{U} \subseteq N \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ um $f(p)$ die Abbildung

$$\tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1}: V \rightarrow \tilde{V}$$

stetig/glatt in $\kappa(p)$ ist. Zeigen Sie, dass dies dann auch für alle anderen Karten um p bzw. $f(p)$ gilt.

Übungsaufgabe 9.

- (i) Zeigen Sie, dass der de-Sitterraum $S_1^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \eta(x, x) = r^2\}$ eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} und damit eine glatte Mannigfaltigkeit ist. (Hinweis: Verwenden Sie dazu das Kriterium vom regulären Wert.)
- (ii) Wir definieren $g(X, Y) = \eta(X, Y)$ für $X, Y \in T_p S_1^n(r) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie, dass g eine Lorentzmetrik auf $S_1^n(r)$ definiert. (Hinweis: Betrachten Sie die Normalenvektoren an $S_1^n(r) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.)
- (iii) Zeigen Sie, dass der Anti-de-Sitterraum $H_1^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid r^2 - (x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2 = 0\}$ eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} .
- (iv) Wir definieren $g(X, Y) = \eta_2(X, Y)$ für $X, Y \in T_p H_1^n(r) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\eta_2(x, y) = -(x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2$. Zeigen Sie, dass g eine Lorentzmetrik auf $H_1^n(r)$ definiert.
- (v) Zeigen Sie, dass $\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \eta(x, x) = -1\}$ mit der durch das Minkowskiprodukt η auf \mathbb{R}^{n+1} induziertem Bilinearprodukt eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

Übungsaufgabe 10.

- (i) Seien M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten und $f: M \rightarrow N$ glatt. Sei $\kappa: U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte um p und $\tilde{\kappa}: \tilde{U} \subseteq N \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um $f(p)$. Rechnen Sie nach, dass $d_{f(p)} \tilde{\kappa} [f \circ \kappa]_{f(p)} = D_{\kappa(p)} (\tilde{\kappa} \circ f \circ \kappa^{-1}) (d_p \kappa([c]_p))$ gilt.
- (ii) Wie sieht $d_p f$ in lokalen Koordinaten aus? Benutzen Sie x^α für κ und y^β auf $\tilde{\kappa}$, dann ist $f: x = (x^1, \dots, x^m) \mapsto (y^1 = f^1(x), \dots, y^n = f^n(x))$.*
- (iii) Überprüfen Sie für den Levi-Civita-Zusammenhang die Eigenschaften (ii)-(iv) in Lemma II.1.10 in lokalen Koordinaten.

Übungsaufgabe 11. Für $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ sei $X(f) := df(X): M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto d_p f(X(p))$. Zeigen Sie:

- (i) $X(fg) = X(f)g + fX(g)$, $X(f + g) = X(f) + X(g)$ und $(X + Y)(f) = X(f) + Y(f)$ für alle $f, g \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$
- (ii) Jede Abbildung $T: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ mit $T(fg) = T(f)g + fT(g)$ und $T(af + g) = aT(f) + T(g)$ für alle $f, g \in C^\infty(M)$ und $a \in \mathbb{R}$ definiert ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $T(f) = X(f)$. Solche Abbildungen T heißen *Derivationen*.†

Übungsaufgabe 12. Wir betrachten die Minkowskimetrik $g = -dt^2 + dx^2 + dy^2$ auf $M = \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie g in den neuen Koordinaten (t', x', y') gegeben durch

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\varphi - \omega t) \\ y' &= \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\varphi - \omega t) \end{aligned}$$

für $\varphi := \arctan \frac{y}{x}$ und ein festes $\omega \in \mathbb{R}$. Was ist die Interpretation dieser neuen Koordinaten und insbesondere von ω ? Berechnen Sie die Umkehrabbildung $(t', x', y') \mapsto (t, x, y)$ und die Christoffelsymbole Γ in den neuen Koordinaten.

*Dabei sieht man auch, dass $d_p f(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}|_p) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}|_p$ ist, was die Schreibweise $X(f)$ für $df(X)$ und die Schreibweise $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}|_p$ für einen Basistangentenvektor erklärt.

†Diese Charakterisierung von Vektorfeldern als Derivationen wird manchmal auch als Definition von Vektorfeldern verwendet.

Übungsaufgabe 13. Sei $\mathcal{A}_s^r M$ die Menge aller multilinearen Abbildungen

$$T: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{s\text{-mal}} \rightarrow \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{r\text{-mal}},$$

die $T(f_1 X_1, \dots, f_s X_s) = f_1 \dots f_s T(X_1, \dots, X_s)$ für alle $f_i \in C^\infty(M)$ und $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ erfüllen und für die in allen lokalen Koordinaten $T_i(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_s}}): U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto T_i(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_s}}|_p)$, glatt für alle α_j und i ist. Hierbei sind T_i die Komponentenfunktionen von T , also $T = (T_1, \dots, T_r)$.

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s^r M &\rightarrow \mathcal{T}_s^r M \\ T &\mapsto \left(\tilde{T}: (\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) \mapsto (\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r)(T(X_1, \dots, X_s)) = \prod_{i=1}^r \omega^i T_i(X_1, \dots, X_s) \right) \end{aligned}$$

wohldefiniert und eine Bijektion ist.

Übungsaufgabe 14. Zeigen Sie, dass es für alle (r, s) genau eine Abbildung $\nabla: \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{T}_{s+1}^r M$ mit folgenden Eigenschaften für $X, Y_i \in \mathfrak{X}(M), \omega, \omega^i \in \Omega^1(M)$ gibt:

- (i) Auf Vektorfeldern ist ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang.
- (ii) Für alle Tensoren T und S gelte $\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X S$.
- (iii) Es ist $X(\omega(Y)) = (\nabla_X \omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y)$.

Hierbei sei $(\nabla_X S)(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) := (\nabla S)(\omega^1, \dots, \omega^r, X, Y_1, \dots, Y_s)$.

Übungsaufgabe 15. Sei (M, g) Lorentz- oder Riemannsche Mannigfaltigkeit.

- (i) Berechnen Sie $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}} dx^\beta$ und $\nabla_X \omega$ für $\omega \in \Omega^1(M)$ in lokalen Koordinaten.
- (ii) Berechnen Sie ∇g^{-1} wobei g^{-1} der $(2, 0)$ -Tensor mit $g^{-1}(\omega, \eta) := g(\omega^\#, \eta^\#)$ ist.
- (iii) Zeigen Sie die zweite Bianchiidentität, d.h. $(\nabla_U R)(\omega, X, Y, Z) + (\nabla_X R)(\omega, Y, U, Z) + (\nabla_Y R)(\omega, U, X, Z)$ für alle $X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M)$ und $\omega \in \Omega^1(M)$.

Übungsaufgabe 16. Benutzen Sie ein Computeralgebrasystem mit Differentialgeometriepaket (z.B. Maxima, siehe die Informationen und das Beispiel auf der Vorlesungshompae). Finden Sie heraus, wie man mittels dieses Computeralgebrasystems Aufgabe 12 löst und berechnen Sie zusätzlich den Krümmungstensor, die Riccikrümmung und die Skalarkrümmung. Geben Sie dazu einen Ausdruck ihres Programms mit Ausgabe ab.

Finden Sie insbesondere heraus, wie sich die Indizes des Krümmungstensors und Riccitorsors, in dem von Ihnen verwendeten Computeralgebrasystem, auf die Konvention der Vorlesung abbilden.

Übungsaufgabe 17. Seien (N_i, h_i) für $i = 1, 2$ Riemannsche oder Lorentzsche Mannigfaltigkeiten (nicht beide Lorentzsch). Sei $M = N_1 \times N_2$.

- (i) Zeigen Sie, dass $T_{p=(p_1, p_2)}M \cong T_{p_1}N_1 \times T_{p_2}N_2$ ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass $h = h_1 + h_2$ eine Riemannsche oder Lorentzsche Metrik auf M ist (Hierbei sei $h_p(X, Y) := h_1|_{p_1}(X_1, Y_1) + h_2|_{p_2}(X_2, Y_2)$ wobei $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ die Identifizierung aus (i) ist.
- (iii) Zeigen Sie, dass

$$R^h(X, Y)Z = R^{h_1}(X_1, Y_1)Z_1 + R^{h_2}(X_2, Y_2)Z_2$$

und

$$\text{Ric}^h(X, Y) = \text{Ric}^{h_1}(X_1, Y_1) + \text{Ric}^{h_2}(X_2, Y_2)$$

für alle $X, Y, Z \in T_pM$ ist. Hierbei ist $X = (X_1, X_2)$, ... wie oben und R^h der Krümmungstensor für (M, h) etc.

- (iv) Sei nun $(M = \mathbb{R} \times N, g = -dt^2 + h)$ mit (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass (M, g) genau dann eine Lösung der Vakuumeinsteingleichung mit $\Lambda \equiv 0$ ist, falls $\text{Ric}^h \equiv 0$ ist. Solche Lösungen heißen *ultrastatisch*.
- (v) Gibt es ultrastatische Lösungen, also Lorentzmannigfaltigkeiten der Form $(M = \mathbb{R} \times N, g = -dt^2 + h)$, der Vakuumeinsteingleichung falls $\Lambda \neq 0$ ist?

Übungsaufgabe 18.

- (i) Sei (M, g) eine Riemannsche oder Lorentzmannigfaltigkeit. Sei $f: M \rightarrow M$ eine Isometrie. Sei $\kappa: U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte von M mit lokalen Koordinaten x^i um $p \in U$. Sei $f(p) \in U$. Zeigen Sie, dass $g_{\alpha\beta}(f(p)) = \frac{\partial f^\gamma}{\partial x^\alpha}|_p \frac{\partial f^\delta}{\partial x^\beta}|_p g_{\gamma\delta}(p)$ gilt.
- (ii) Sei $(M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, g)$. In Kugelkoordinaten $(r, \varphi, \theta) \mapsto (x = r \cos \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \cos \theta, z = r \sin \theta)$ gegeben sei $g = a(r, \varphi, \theta)^2 dr^2 + b(r, \varphi, \theta)(dr \otimes d\varphi + d\varphi \otimes dr) + c(r, \varphi, \theta)(dr \otimes d\theta + d\theta \otimes dr) + r^2 d\Omega^2$ mit $d\Omega^2 = \cos^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2$ die Standardmetrik auf S^2 , a, b, c glatte Funktionen auf M und a nirgends verschwindend. Seien Rotationen um den Ursprung Isometrien von (M, g) . Zeigen Sie, dass dann $b \equiv 0$, $c \equiv 0$ und a nur von r abhängt.

Übungsaufgabe 19. [Periheldrehung] Wir betrachten die Differentialgleichung für $u = \frac{rs}{r}$ als Funktion von φ der Spur zeitartiger Geodäten

$$u'^2 = \underbrace{\frac{E^2}{\lambda^2} - (1-u)(u^2 + \frac{1}{\lambda^2})}_{=: P(u)}.$$

Wir nehmen an, dass unsere Geodäte ein *gebundener Zustand* ist.

- (i) Zeigen Sie, dass $P(u)$ drei reelle Nullstellen $0 < u_1 < u_2 < u_3$ besitzt und sich die u -Koordinate der Geodäten in $[u_1, u_2]$ bewegt.
- (ii) Benutzen Sie <http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/>, insbesondere die Seiten 589–591 und 597, um die Periheldrehung $\varphi = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{P(u)}}$ in der Form $\varphi = 2\mu F(\frac{\pi}{2}|\alpha) = 2\mu K(m)$ als vollständiges elliptisches Integral zuschreiben. Was ist hier α , μ und m in Abhängigkeit von den u_i ?
- (iii) Entwickeln Sie die Nullstellen u_1 , u_2 und u_3 in $\frac{1}{\lambda}$ (Beachten Sie, dass Sie dabei auch $E^2 = 1 - \frac{e_0}{\lambda} + O(\lambda^{-2})$ ansetzen müssen, da der erlaubte Bereich von E für gebundene von λ abhängt.) und finden sie φ_{per} in $\varphi = 2\pi(1 + \varphi_{per} \frac{1}{\lambda} + O(\lambda^{-2}))$ in Abhängigkeit von λ und e_0 .

Übungsaufgabe 20. Sei $f: (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow M$ eine glatte Abbildung, so dass $f_s := f(s, \cdot): M \rightarrow M$ für alle s eine Isometrie von (M, g) mit $f_0 = \text{id}$ ist. Für $p \in M$ definieren wir $X(p) := \frac{d}{ds}|_{s=0} f_s(p)$. Zeigen Sie, dass $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist und X die Gleichung $(\nabla_{\partial_\alpha} X)_\gamma + (\nabla_{\partial_\gamma} X)_\alpha = 0$ bzw. für alle $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0$$

erfüllt.

Übungsaufgabe 21.

- (i) Verifizieren Sie, dass ein Beobachter, der im Schwarzschildaußenraum startet, $r = r_S$ in endlicher Eigenzeit erreichen kann.*
- (ii) Verifizieren Sie, dass ein Beobachter, der im Schwarzschildinnenraum startet, $r = 0$ in endlicher Eigenzeit erreichen kann.
- (iii) Sei γ ein Beobachter, der bezüglich der Schwarzschildkoordinaten in Ruhe bewegt, startend bei $r = R, \varphi = \frac{\pi}{4}, \theta = 0$. Dieses γ beobachte wie ein anderes Teilchen sich entlang $\varphi = \theta = 0$ auf $r = r_S$ hinzubewegt. Sieht γ das Teilchen jemals bei $r = r_S$ verschwinden? Falls nein, warum ist das kein Widerspruch zu (i)?

Übungsaufgabe 22. [GPS]

- (i) Ein Beobachter/Satellit bewege sich auf einer stabilen geodätischen Kreisbahn[†] $r = r_{\text{Sat}}$ in der Schwarzschildraumzeit. Berechnen Sie $\frac{d\tau_{\text{Sat}}}{dt}$ (ausgedrückt nur im Schwarzschildradius der Erde und r_{Sat}), wobei τ_{Sat} die Eigenzeit des Satelliten ist .
- (ii) Wir befinden uns auf der Erdoberfläche. Berechnen Sie das Verhältnis der Eigenzeit Berechnen Sie das Verhältnis der Eigenzeit $d\tau_{\text{Sat}}$ zu unserer Eigenzeit $d\tau_{\text{Wir}}$ unter Vernachlässigung der Erdrotation und unter der Annahme, dass in der Umgebung der Erde die Raumzeit die Schwarzschildmetrik (mit geeignetem Schwarzschildradius) trägt.
- (iii) GPS-Satelliten schicken zu Ihrem Navigationssystem auf der Erde ein (Licht-)Signal mit einem Zeitstempel (bzgl. einer Atomuhr im Satelliten), wann das Signal abgeschickt wurde. An ihrem Navigationssystem trifft dieses Signal dann an nach einer bestimmten Lichtlaufzeit an und der Eintritt wird mit der Ihrer Eigenzeit abgespeichert. Ohne Kenntnis der Relativitätstheorie würde man den Abstand des Satelliten jetzt als (Zeitstempel Ankunft - Zeitstempel Absendezeit) \cdot (c=Lichtgeschwindigkeit) ermitteln. Wenn die Zeiten auf der Erde und dem Satelliten, wie in der ART, nicht mehr global sind sondern von einander um δ abweichen, führt das ohne eine Korrektur zu einem Abstand von zum Satelliten der um $c \cdot \delta$ falsch ist. Um wieviel würde so ein GPS nach einem Tag falsch gehen, wenn man diese Korrektur nicht macht und am Beginn des Tages die Eigenzeiten überein stimmten. Vernachlässigen die Unterschiede in den Laufzeiten des Signals bzgl. unterschiedlicher Satellitenpositionen.

GPS-Satellit befinden sich in einer Höhe von 20 200 km. Die Erde hat einen Radius von 6371 km und eine Schwarzschildradius von 8.8 mm

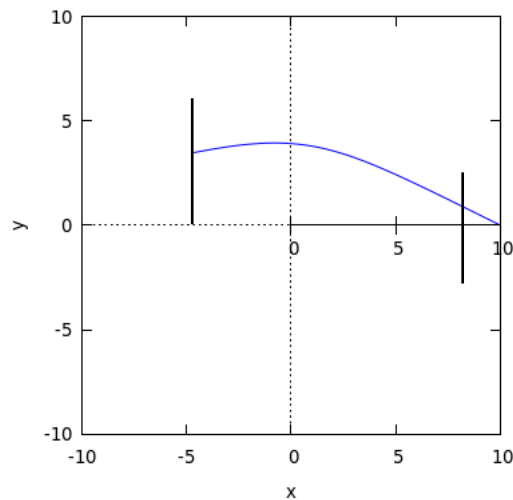
- (iv) Wir haben oben die Rotationsgeschwindigkeit der Erde vernachlässigt. (Warum) War das gerechtfertigt (um die richtige Größenordnung der Korrektur zu erhalten)?

*Im Sinne von: Es gibt eine zeitartige nach Eigenzeit parametrisierte Kurve $\gamma: [0, T) \rightarrow M$, M der Schwarzschildraum und $T < \infty$, so dass für $\gamma(s) = (t(s), r(s), \varphi(s), \theta(s))$ mit $r(s) \rightarrow r_S$ für $s \rightarrow T$.

[†]Kreisbahn bzgl. Schwarzschildkoordinaten

Übungsaufgabe 23.

Wir betrachten den Schnitt des Schwarzschildraums mit $\theta \equiv 0$. Sie befinden in Ruhe bzgl. der Schwarzschildkoordinaten in $r = 100r_s$, $\varphi = 0$, $\theta = 0$. Auch in Ruhe befindet sich (unrealistischerweise) ein Lineal der Länge $5r_s$ senkrecht zur $(\varphi = 0)$ -Linie bei $r = 5r_s$ und $\varphi = -\pi$, vgl. Abb. Auch in Ruhe befindet sich ein Bildschirm senkrecht und symmetrisch zur $(\varphi = 0)$ -Linie bei $r = 9r_s$. Jede lichtartige Geodäte, die auf dem Lineal startet und bei Ihnen ankommt, trifft unterdessen auf dem Bildschirm und hinterlasse dort die Information, wo sie auf dem Lineal gestartet ist.



Verwenden Sie ein Computeralgebrasystem,* um das Bild auf dem Bildschirm zu berechnen. Visualisieren Sie das Bild (bilden Sie zum Vergleich auch das Lineal und das darauf von Ihnen gewählte Bild bzw. Skala ab). Eine Möglichkeit ist es eine diskrete Menge von lichtartigen Geodäten zu berechnen, die an Ihrem Standort starten und in verschiedenen Winkeln auf den Bildschirm treffen und auszurechnen, wo diese auf den Bildschirm treffen. †

Übungsaufgabe 24. (i) Wir betrachten den zweidimensionalen Minkowskiraum $(\mathbb{R}^2, -dt^2 + dx^2)$. Zeigen Sie, dass diese Mannigfaltigkeit maximal ist, in dem Sinne, dass für jede zeit- oder raumartige Geodätische $\gamma: [0, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$, die in keiner kompakten Teilmenge des \mathbb{R}^2 enthalten ist, schon $a = \infty$ sein muss.

(ii) Betrachten Sie $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Metrik $-x^2 dt^2 + dx^2$. Führen Sie eine ähnliche Prozedur wie bei den Schwarzschildkoordinaten durch, um zu sehen, dass $x = 0$ eine Koordinatensingularität ist. Geben Sie eine maximale Erweiterung an.

*Wenn Sie einen Raytracer verwenden können, können Sie natürlich auch einen solchen hierfür verwenden.

†Zur numerischen Lösung der Geodätengleichung, vgl. Abbildung II.2. Beachten Sie, dass dies nur eine diskrete Anzahl von Punkten der Geodäte ergibt, von denen im Zweifel keiner auf Bildschirm oder Lineal liegt (Näherungen verwenden). Es bietet sich an, mit Geodäten zu starten, die einen größeren Winkel zur $\varphi = 0$ Linie haben, da diese weniger vom schwarzen Loch abgelenkt werden. Wenn ihr Winkel zu flach wird, wird die Geodäte sich erst ums schwarze Loch winden, bevor sie das Lineal trifft. Im Limes dauert das beliebig lange - hören Sie also ggf. rechtzeitig auf. Um das Bild auf dem Bildschirm zu veranschaulichen, könnten Sie z.B. eine Skala oder einen Farbverlauf auf dem Lineal verwenden.

Übungsaufgabe 25. Berechnen Sie (per Hand) eine Basis der Killingvektorfelder auf der Standardsphäre $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. (Hinweis: Ein Ansatz könnte sein, dass in Kugelkoordinaten ein jedes Vektorfeld die Form $a(\varphi, \theta)\partial_\varphi + b(\varphi, \theta)\partial_\theta$.)

Übungsaufgabe 26. Seien X und Y Vektorfelder auf (M, g) mit zugehörigen Flüssen Φ_s bzw. Ψ_t . Zeigen Sie, dass $\Phi_s \circ \Psi_t = \Psi_t \circ \Phi_s$ genau dann gilt, wenn $[X, Y] = 0$ ist.

Übungsaufgabe 27. [Parallelverschiebung und Jacobifelder] Sei (M, g) eine Lorentzmannigfaltigkeit und $c: I \rightarrow M$ eine glatte Kurve auf M .

- (i) Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Berechnen Sie $\nabla_{\dot{c}}X$ in lokalen Koordinaten.
- (ii) Zeigen Sie, dass es für gegebenes $p = c(t_0) \in M$ und $v \in T_pM$ immer ein eindeutiges Vektorfeld Y entlang c^* mit $Y(t_0) = v$ und $\nabla_{\dot{c}}Y = 0^\dagger$ gibt. (Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung erst in lokalen Koordinaten.)

Wir setzen $\parallel_{t_0, t_1}^c: T_{c(t_0)}M \rightarrow T_{c(t_1)}M$, $X_0 \mapsto X(t_1)$, wobei $X(t)$ die eindeutige Lösung von $\nabla_{\dot{c}}X = 0$ mit $X(t_0) = X_0$ sei. Diese Abbildung heißt *Paralleltransport (oder Parallelverschiebung) entlang c* .

- (iii) Zeigen Sie, dass $\parallel_{t_0, t_1}^c: (T_{c(t_0)}M, g_{c(t_0)}) \rightarrow (T_{c(t_1)}M, g_{c(t_1)})$ eine lineare Isometrie ist.
- (iv) Sei $(e_\alpha(t_0))_\alpha$ eine Basis von $T_{c(t_0)}M$ und sei $e_\alpha(t) := \parallel_{t_0, t}^c e_\alpha(t_0)$. Folgern Sie, dass die $(e_\alpha(t))_\alpha$ eine Basis von $T_{c(t)}M$ bilden.
- (v) Zeigen Sie, dass es für alle $v, w \in T_{c(t_0)}M$ genau ein Jacobivektorfeld J entlang c mit $J(t_0) = v$ und $(\nabla_{\dot{c}}J)(t_0) = w$ gibt. (Hinweis: Entwickeln sie $J(t)$ in der Basis $e_\alpha(t)$ aus (iii).)

Übungsaufgabe 28. Sei X ein Killingvektorfelder von (M, g) und $f: p \in M \mapsto \frac{1}{2}g_p(X(p), X(p)) \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

- (i) $\text{grad}_g f = -\nabla_X X$
- (ii) Sei $\gamma_p(s)$ die Lösung von $\dot{\gamma}_p(s) = X(\gamma_p(s))$ mit $\gamma_p(0) = p$, wobei p kritischer Punkt von f ist, also $(\text{grad}_g f)(p) = 0$, ist. Dann ist $\gamma_p(s)$ eine Geodätische.

* Y heißt Vektorfeld entlang c , falls es eine Abbildung $Y: t \in I \mapsto Y(t) \in T_{c(t)}M$ ist

[†]Hier ist $\nabla_{\dot{c}}Y$ lokal um ein $t \in I$ als $(\nabla_{\dot{c}}Y)(t) := (\nabla_{\dot{c}}\tilde{Y})(c(t))$ mit $\tilde{Y}(c(t)) = Y(t)$ zu verstehen, vgl. Bemerkung II.4.23(i). Lokal um t gibt es ein solches \tilde{Y} immer, wenn c nicht lokal konstant ist.

Übungsaufgabe 29. Sei (M, g) eine Riemannsche oder Lorentzmannigfaltigkeit. Sei $p \in M$ und $E \subseteq T_p M$ ein zweidimensionaler Untervektorraum von $T_p M$, so dass $g_p|_{E \times E}$ nichtentartet ist. Wir definieren für eine Basis X, Y von E :

$$\text{sec}_p(E) := \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}. \quad (\text{C.2})$$

Zeigen Sie:

- (i) $\text{sec}_p(E)$ ist unabhängig der gewählten Basis X, Y von E .
- (ii) Aus (M, g) isotrop in p folgt, dass es ein $k(p)$ mit

$$g_p(R(X, Y)Z, W) = k(p)(g_p(X, Z)g_p(Y, W) - g_p(Y, Z)g_p(X, W))$$

für alle $X, Y, Z, W \in T_p M$ folgt.

- (iii) Aus (M, g) isotrop in allen Punkten folgt, dass $k(p)$ in p konstant ist.

Übungsaufgabe 30. Wählen Sie auf den folgenden Mannigfaltigkeiten eine Zeitorientierung (sofern möglich) und bestimmen Sie $I_+(p)$ für ein $p \in M$.

- (i) $M = S^1 \times \mathbb{R} \ni (r, t), g = dr^2 - dt^2$
- (ii) $M = S^1 \times \mathbb{R} \ni (t, r), g = dr^2 - dt^2$
- (iii) Der de Sitter-Raum aus Beispiel II.1.9.
- (iv) $M = I \times \mathbb{R}^3, g = -dt^2 + f(t)^2 g_E$ für ein glattes $f \in C^\infty(I, \mathbb{R}_{>0})$ (Hier ist g_E die euklidische Metrik auf \mathbb{R}^3).

Übungsaufgabe 31. Sei (M, g) eine zusammenhängende Lorentzmannigfaltigkeit mit gewählter Zeitorientierung. Zeigen Sie

- (i) $I_+(p)$ ist offen
- (ii) $J_+(p)$ muss nicht abgeschlossen sein
- (iii) $J_+(p) \subseteq \overline{I_+(p)}$
- (iv) $I_+(p) = \text{Innere}(J_+(p))$.

Übungsaufgabe 32. Wir betrachten $(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$ mit der Metrik

$$g = -dt^2 - \sqrt{2} \frac{r^2}{a} (d\varphi \otimes dt + dt \otimes d\varphi) + \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) d\varphi^2,$$

wobei bei (r, φ) Polarkoordinaten zu (x, y) seien.

- (i) Zeigen Sie, dass g stetig auf $r = 0$ fortsetzbar ist, Lorentzsch und zeitorientierbar ist.
- (ii) Finden Sie jeweils eine geschlossene zeitartige, lichtartige und raumartige Kurve in (\mathbb{R}^3, g) .
- (iii) Welche Koordinatenvektorfelder $\partial_r, \partial_\varphi, \partial_t$ sind Killingvektorfelder?
- (iv) Finden Sie ein Killingvektorfeld der Form $\partial_r + f_1(r, \varphi, t)\partial_\varphi + f_2(r, \varphi, t)\partial_t$ und folgern Sie, dass (\mathbb{R}^3, g) homogen in allen Punkten ist.
- (v) Finden Sie, die Differentialgleichungen, die lichtartige Geodätische der Form $\gamma(s) = (t(s), r(s), 0)$ erfüllen müssen.
- (vi) Was können Sie über $I_+(0)$ sagen?

Übungsaufgabe 33. Sei $M = I \times \mathbb{R}^3$, $g = -dt^2 + f(t)^2 g_E$ mit g_E die euklidische Metrik auf \mathbb{R}^3 .

Wir nehmen an, dass wir und die Galaxien fundamentale Beobachter in M seien. Wir messen die Rotverschiebung (zur Zeit $t = s$) für eine Galaxie, die im Jetzt $M_s := M \cap \{t = s\}$ den räumlichen Abstand R_s zu uns habe. Um im zweidimensionalen Minkowskiraum die gleiche Rotverschiebung zu erreichen, sei die dazu nötige relative Geschwindigkeit der Galaxie zu uns gleich $v_s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass in erster Ordnung das Hubble-Gesetz

$$v_s \sim H(s) \cdot R_s$$

gilt.

Gilt das Hubble-Gesetz auch für Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker Mannigfaltigen ($M = I \times N$, $g = -dt^2 + f(t)^2 h$) mit (N, h) maximal symmetrisch zur Schnittkrümmung k ?

Übungsaufgabe 34. Sei $(M = \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), g = \frac{1}{\cos^2 x}(-dt^2 + dx^2))$. Zeigen Sie,

- (i) (M, g) ist geodätisch vollständig
- (ii) Es gibt Punkte $p, q \in M$, zwischen denen es beliebig lange zeitartige Kurven gibt.
- (iii) $\exp_{(0,0)}$ ist nicht surjektiv.

Übungsaufgabe 35. Sei (M, g) eine kompakte Lorentzmannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass es eine geschlossene zeitartige Kurve gibt.

Übungsaufgabe 36. Sei (M, g) eine Lorentzmannigfaltigkeit. Sei $c: [0, 1] \rightarrow M$ eine lichtartige Kurve von $c(0) = p$ nach $c(1) = q$, die nicht die Spur einer Geodätischen ist. Zeigen Sie, dass es dann eine zeitartige Kurve von p nach q gibt.

(Hinweis: Als Ansatz kann man eine Variation $c_s(t) = c(s, t)$ mit Variationsvektorfeld $X(t) (= \partial_s|_{s=0} c(s, t)) = \alpha(t)Y(t) + \beta(t)\nabla_{\dot{c}}\dot{c}(t)$ für geeignete Funktionen $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow M$ und ein geeignetes Vektorfeld Y längs c so finden, dass $g(\nabla_{\dot{c}}X, \dot{c}) < 0$ ist und dann argumentieren, dass c_s für s klein genug zeitartig ist. Überlegen Sie sich auch, dass die Bedingung, dass c nicht die Spur einer Geodätischen ist, impliziert, dass $\nabla_{\dot{c}}\dot{c}$ für ein $t \in [0, 1]$ mal raumartig sein muss.)

Übungsaufgabe 37. Sei $c_i: [0, 1] \rightarrow M$ für $i = 1, 2$ zwei zukunftsgerichtete kausale Geodätische mit $c_1(0) = p$, $c_1(1) = c_2(0) = x$ und $c_2(1) = q$ und $\dot{c}_1(1) \neq \dot{c}_2(1)$. Zeigen Sie, dass es eine kausale zukunftsgerichtete Kurve γ von p nach q mit $L(\gamma) > L(c_1) + L(c_2)$ gibt.

Übungsaufgabe 38. Sei $(V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, g)$ in lokalen Koordinaten $(\tau, r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$g = -a^2(r, \tau)d\tau^2 + b(r, \tau)(d\tau \otimes dr + dr \otimes d\tau) + e^{\lambda(r, \tau)}dr^2 + r^2d\Omega^2.$$

- (i) Berechnen Sie g in neuen Koordinaten $(t = t(\tau, r), r, \varphi, \theta)$.
- (ii) Zeigen Sie, dass falls

$$a(\tau, r)\frac{\partial t}{\partial r} = b(\tau, r)\frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{C.3}$$

gilt, g in den neuen Koordinaten die Form $g = -m(\tau, r)dt^2 + n(\tau, r)dr^2 + r^2d\Omega^2$ für geeignete $m(\tau, r)$ und $n(\tau, r)$ hat.

- (iii) Um zu zeigen, dass (C.3) eine Lösung hat, kann man die *Methode der Charakteristiken* verwenden. Die Idee dabei ist: Die Lösung $t = t(\tau, r)$ kann als zweidimensionale Fläche $\{(\tau, r, t(\tau, r))\}$ im \mathbb{R}^3 aufgefasst werden. Ausgehend von einem Punkt auf einer Anfangskurve $\Gamma: s \in \mathbb{R} \mapsto (\tau_0(s), r_0(s), t_0(s)) \in \mathbb{R}^3$ konstruiert man eine *charakteristische Kurve* $\gamma_s: u \mapsto (\tau(u), r(u), t(u))$ in der Fläche u , d.h. $\gamma_s(0) = \Gamma(s)$ und $\frac{dr}{du} = a(\tau(u), r(u))$ und $\frac{dt}{du} = -b(\tau(u), r(u))$ und $\frac{dt}{du} = 0$ gilt. Alle diese Kurven werden zu der Fläche $F: (s, u) \mapsto (\tau(u, s), r(u, s), t(u, s))$ (C.3) zusammengeklebt.

Zeigen Sie, dass falls Γ *nichtcharakteristisch*, d.h. falls $a(\Gamma^1(s), \Gamma^2(s))\partial_s\Gamma^2(s) + b(\Gamma^1(s), \Gamma^2(s))\partial_s\Gamma^1(s) \neq 0$, ist, ist $(s, u) \mapsto (\tau(u, s), r(u, s))$ lokal (nahe $(\Gamma^1(s), \Gamma^2(s))$) invertierbar und $t(\tau, r) := t(u(\tau, r), s(\tau, r))$ löst die Gleichung (C.3).

Übungsaufgabe 39. Zeigen Sie analog zu Appendix A, dass jede radial symmetrische Vakuumlösung der Einsteingleichungen mit $\Lambda = 0$ isometrisch zur Schwarzschildlösung ist.

Übungsaufgabe 40. Betrachten Sie nun die Schwarzschildlösung für $r_S < 0$.

- (i) Finden Sie ein globales zeitartiges Vektorfeld und benutzen Sie dieses, um global zukunftsgerichtete Vektoren zu definieren.
- (ii) Gibt es einen zukunftsgerichteten Beobachter, der in endlicher Eigenzeit $r = 0$ erreicht?
- (iii) Ist $r = 0$ eine gravitative Singularität?
- (iv) Gibt es einen zukunftsgerichtete zeitartige Geodätische, die (in ggf. unendlicher Eigenzeit) nach $r = 0$ strebt?
- (v) Gibt es einen zukunftsgerichtete und/oder vergangenheitsgerichtete lichtartige Geodätische, die nach $r = 0$ streben oder davon kommen? Falls ja, wieviel Zeit, bzgl. des globalen Zeitparameters t , ist bis dahin oder seit dem vergangen?

Übungsaufgabe 41. Sei S eine orientierte Riemannsche Hyperfläche einer Riemannschen oder Lorentzmannigfaltigkeit (M, g) . Sei n ein Einheitsnormalenvektorfeld von S in M . Sei e_i eine lokale Orthonormalbasis von S in einer offenen Teilmenge $U \subseteq S$. Sei $h_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\text{II}(e_i, e_j) = h_{ij}n$.

- (i) Zeigen Sie, dass $\nabla_{e_i}^M n = -h_{ij}g(n, n)e_j$.
- (ii) Berechnen Sie II und H für $S^2(r) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = r\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Übungsaufgabe 42. Sei $S \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen oder Lorentzmannigfaltigkeit (M, g) . Sei $g|_S$ nichtentartet. Seien ∇^S bzw. ∇^M jeweils der Levi-Civita-Zusammenhang von S bzw. M . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) Die zweite Fundamentalform von S in M ist identisch Null.
- (ii) Jede Geodätische von S ist auch Geodätische von M .
- (iii) Für $p \in S$ und $v \in T_p S \subseteq T_p M$ liegt die Geodätische c von M mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$ vollständig in S .
- (iv) Ist $c: I \rightarrow S$ eine Kurve und $X: I \rightarrow TM$ ein Vektorfeld entlang c mit $X(t) \in T_{c(t)}S$ und $\nabla_{\dot{c}}^S X = 0$, dann ist auch $\nabla_{\dot{c}}^M X = 0$.

Untermannigfaltigkeiten $S \subseteq M$ mit $\text{II} \equiv 0$ heißen *total geodätisch*.

Übungsaufgabe 43. Sei (M, g) eine Riemannsche oder Lorentzmannigfaltigkeit. Seien $\Sigma \subseteq S$ und $S \subseteq M$ jeweils Riemannsche Untermannigfaltigkeiten. Sei II bzw. II^Σ bzw. II^M die zweite Fundamentalform von Σ in M bzw. Σ in S bzw. S in M .

- (i) Zeigen Sie, dass $\text{II}(X, Y) = \text{II}^\Sigma(X, Y) + \text{II}^S(X, Y)$ für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ gilt.
- (ii) Sei $M = \mathbb{R} \times (0, r_S) \times S^2$ mit der Schwarzschildmetrik $g = -(1 - \frac{r_S}{r})dt^2 + (1 - \frac{r_S}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$ gegeben. Sei $S = \mathbb{R} \times \{r_0\} \times S^2$ und $\Sigma = \{0\} \times \{r_0\} \times S^2$. Berechnen Sie II , II^Σ und II^M .

Übungsaufgabe 44. Wir betrachten die FLRW Raumzeit $(M = I \times \mathbb{R}^3, g = -dt^2 + f(t)^2g_E)$. Wir nehmen an, dass (M, g) eine Lösung der Einsteingleichungen (mit $\Lambda = 0$) für den Energieimpulstensor einer perfekten Flüssigkeit mit Energiedichte ρ und Druck \mathfrak{p} ist, so dass $\rho + \mathfrak{p} \geq 0$ ist. Überprüfen Sie, dass die Voraussetzungen des Singularitätentheorems von Penrose erfüllt sind, d.h. zeigen Sie:

- (i) $\text{Ric}(X, X) \geq 0$ für alle lichtartigen Vektoren X .
- (ii) Es gibt eine nichtkompakte Cauchyhyperfläche S in M .
- (iii) Es gibt eine nichtleere geschlossene raumartige achronale Untermannigfaltigkeit $\Sigma \subseteq M$, deren mittlerer Krümmungsvektor zeitartig und vergangenheitsgerichtet ist.

Übungsaufgabe 45. Sei (M, g) global hyperbolisch mit gewählter Zeitfunktion t , so dass $\{t = s\}$ glatte Cauchyflächen sind. Sei $S = \{t = 0\}$. Sei $h_s = g|_{t=s}$. Seien x^i lokale Koordinaten von S . Durch Paralleltransport entlang der Flusslinien von ∂_t erhalten wir mit (t, x^i) lokale Koordinaten von M mit $\partial_t \perp \partial_{x^i}$. Sei $h_{ij} = h_t(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})$. Sei $K: \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \rightarrow C^\infty(S)$ definiert durch $\Pi(X, Y) = K(X, Y)n$. Zeigen Sie:

(i) Es gibt $\beta \in C^\infty(M, \mathbb{R}_{>0})$ und $X \in \mathfrak{X}(S)$, so dass $g = -\beta^2 dt^2 + h_{ij}(dx^i + X^i dt)(dx^j + X^j dt)$ ist.

Die Funktion $\beta \in C^\infty(M, \mathbb{R}_{>0})$ heißt *Lapsefunktion* und das Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(S)$ *Verschiebungsvektorfeld* (*shift vector field*).

(ii) Dann ist $n = \beta^{-1}(\partial_t - X)$ das zukunftsgerichtete Einheitsnormalenvektorfeld von S .

(iii) Berechnen Sie $K_{ij} := K(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})$ ausgedrückt in β, X, h_{ij} .

Übungsaufgabe 46. Sei u eine glatte Funktion auf einer zeitorientierten Lorentzmannigfaltigkeit (M, g) . Wir setzen

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu u \partial_\nu u - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\alpha u \partial^\alpha u + m^2 u).$$

(i) Berechnen Sie $\operatorname{div}_g T$.

(ii) Überprüfen Sie, dass T die dominante Energiebedingung erfüllt.

Übungsaufgabe 47. Sei $(t, x) \in M = S^1 \times \mathbb{R}$ mit der Metrik $g = -dt^2 + dx^2$ gegeben. Wir betrachten das Cauchy Anfangswertproblem $(\partial_t^2 - \partial_x^2)u = 0$ bei gegebenen $u|_{t=0}$ und $\partial_t u|_{t=0}$. Für welche Anfangswerte $u|_{t=0}$ und $\partial_t u|_{t=0}$ existiert eine Lösung?

Übungsaufgabe 48. Betrachten Sie das Cauchy Anfangswertproblem $(\partial_t^2 + \Delta_h)u = 0$ für $(M = \mathbb{R} \times N, g = -dt^2 + h)$, wobei (N, h) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit ist und $\Delta_h := \operatorname{div}_h \circ \operatorname{grad}_h$ auf Funktionen von N wirkt. Finden Sie bei gegebenen Anfangswerten $u|_{t=0}$ und $\partial_t u|_{t=0}$ eine Lösung u . (Hinweis: Verwenden Sie, dass es Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ($i \in \mathbb{N}$) von Δ_h zu Eigenfunktionen $v_i \in C^\infty(N)$ gibt (also $\Delta_h v_i = \lambda_i v_i$ mit $\int_N v_i v_j = \delta_{ij}$) und dass jede glatte Funktion $v \in C^\infty(N)$ eine Darstellung $v = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i v_i$ für $\alpha_i \in \mathbb{R}$ gibt. (Die unendliche Summe ist so zu verstehen, dass die Partialsummen in allen C^k zu v konvergieren.))

Literaturverzeichnis

- [1] BERNAL, A. N., AND SÁNCHEZ, M. Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes. *Comm. Math. Phys.* 257, 1 (2005), 43–50.
- [2] BORCHERS, H. J., AND HEGERFELDT, G. C. The structure of space-time transformations. *Comm. Math. Phys.* 28 (1972), 259–266.
- [3] EINSTEIN, A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik und Chemie* 17 (1905), 891–921.
- [4] GROSSE, N. Differentialgeometrie I. http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/DiffGeo_WS1617_Skript.pdf.
- [5] GROSSE, N. Differentialgeometrie II. http://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/DiffGeo2_WS1718_Skript.pdf.
- [6] LOVELOCK, D. The four-dimensionality of space and the Einstein tensor. *J. Mathematical Phys.* 13 (1972), 874–876.
- [7] MISNER, C. W., THORNE, K. S., AND WHEELER, J. A. *Gravitation*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1973.
- [8] NOMIZU, K., AND OZEKI, H. The existence of complete Riemannian metrics. *Proc. Amer. Math. Soc.* 12 (1961), 889–891.
- [9] O’NEILL, B. *Elementary differential geometry*, second ed. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2006.
- [10] WALD, R. M. *General relativity*. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1984.