QQ 1 – Wahr oder falsch?

Ändert man bei einer Folge $(a_n)_n$ endlich viele Folgenglieder ab, dann ändert sich das Konvergenzverhalten nicht.
(d.h. (Nicht-)Konvergenz bleibt erhalten, und wenn konvergent, bleibt der Grenzwert gleich).

QQ 1 – Wahr oder falsch?

Ändert man bei einer Folge $(a_n)_n$ endlich viele Folgenglieder ab, dann ändert sich das Konvergenzverhalten nicht.
(d.h. (Nicht-)Konvergenz bleibt erhalten, und wenn konvergent, bleibt der Grenzwert gleich).

Wahr – Wenn nur endlich viele Folgenglieder geändert werden, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass beide Folgen ab dem N.ten Folgenglied übereinstimmen, und Konvergenz ist sowieso nur eine Aussage für große n.

QQ 2 – Wahr oder falsch?

Sei $\alpha > 0$.

Die folgende Definition von $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ist äquivalent zu unserer Grenzwertdefinition:

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \alpha\epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

QQ 2 – Wahr oder falsch?

Sei $\alpha > 0$.

Die folgende Definition von $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ist äquivalent zu unserer Grenzwertdefinition:

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \alpha\epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Wahr – Vergleich mit unserer Definition:
Für alle $\hat{\epsilon} > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \hat{\epsilon}$ für alle $n \geq n_0$.

Von der einen zur anderen Definition: $\hat{\epsilon} = \alpha\epsilon$.

QQ 3

Die folgende Definition von $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ist äquivalent zu unserer Grenzwertdefinition:

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < n\epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

QQ 3

Die folgende Definition von $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ist äquivalent zu unserer Grenzwertdefinition:

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < n\epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Falsch – Wähle $a_n = 1$, $a = 0$. Dann gilt für alle $\epsilon > 0$ und alle $n \geq n_0 > \epsilon^{-1}$: $|1 = a_n| < n_0\epsilon \leq n\epsilon$.

QQ 4

Was bedeutet die folgende Aussage in 'natürlicher Sprache'?

$$\exists n \in \mathbb{N} \; \forall m \in \mathbb{N} : \; n \leq m$$

A Es gibt eine größte natürliche Zahl.

B Es gibt eine kleinste natürliche zahl.

C Zu jeder natürlichen Zahl gibt es ein eine natürliche Zahl, die noch größer ist.

D Zu jeder natürlichen Zahl gibt es ein eine natürliche Zahl, die noch kleiner ist.

QQ 4

Was bedeutet die folgende Aussage in 'natürlicher Sprache'?

$$\exists n \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N} : \ n \leq m$$

A Es gibt eine größte natürliche Zahl.
B Es gibt eine kleinste natürliche zahl.
C Zu jeder natürlichen Zahl gibt es ein eine natürliche Zahl, die noch größer ist.
D Zu jeder natürlichen Zahl gibt es ein eine natürliche Zahl, die noch kleiner ist.

Lösung: B – Die Aussage sagt konkret:

Es gibt eine natürliche Zahl n, so dass alle natürlichen Zahlen größer gleich n sind.

Also, es gibt eine kleinste natürliche Zahl.

QQ 5

$$(i) \quad \forall \epsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon$$

$$(ii) \quad \exists n \in \mathbb{N} \; \forall \epsilon > 0 : \frac{1}{n} < \epsilon$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- A (i) und (ii) sind wahr.
- B (i) und (ii) sind falsch.
- C Nur (i) ist wahr.
- D Nur (i) ist falsch.

QQ 5

$$(i) \quad \forall \epsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \epsilon$$

$$(ii) \quad \exists n \in \mathbb{N} \; \forall \epsilon > 0 : \frac{1}{n} < \epsilon$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- A (i) und (ii) sind wahr.
- B (i) und (ii) sind falsch.
- C Nur (i) ist wahr.
- D Nur (i) ist falsch.

Lösung: C (i) ist wahr, da $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist.
(ii) ist falsch: Wähle z.B. $\epsilon = \frac{1}{2n}$.

QQ 6

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{A}{=} \lim_{n\to\infty} 0 \overset{B}{=} \lim_{n\to\infty} \left((-1)^n + (-1)^{n+1}\right) \\
&\overset{C}{=} \lim_{n\to\infty} (-1)^n + \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \overset{D}{=} \lim_{n\to\infty} (-1)^n + \lim_{n\to\infty} (-1)^n \\
&= 2 \lim_{n\to\infty} (-1)^n \qquad \text{also: } \lim_{n\to\infty} (-1)^n = 0
\end{aligned}
$$

Bei welchem Gleichheitszeichen liegt der Fehler?

QQ 6

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{A}{=} \lim_{n\to\infty} 0 \overset{B}{=} \lim_{n\to\infty} \left((-1)^n + (-1)^{n+1}\right) \\
&\overset{C}{=} \lim_{n\to\infty} (-1)^n + \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \overset{D}{=} \lim_{n\to\infty} (-1)^n + \lim_{n\to\infty} (-1)^n \\
&= 2 \lim_{n\to\infty} (-1)^n \qquad \text{also:} \quad \lim_{n\to\infty} (-1)^n = 0
\end{aligned}
$$

Bei welchem Gleichheitszeichen liegt der Fehler?

Lösung - beim dritten: Für

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

müssen a_n und b_n beide konvergent sein.

QQ 7

Sei I das Intervall $[a, b)$. Dann ist $b = \sup I$. Welche der folgenden Aussagen ist dazu äquivalent?
Falls mehr als nur eine Aussage äquivalent zu $b = \sup I$ ist, *D* wählen.

A b ist eine reelle Zahl, die eine obere Schranke für alle Elemente von I ist.

B b ist ein Element von I, das eine obere Schranke für alle Elemente von I ist.

C b ist eine obere Schranke von I und es gibt keine kleinere obere Schranke von I

QQ 7

Sei I das Intervall $[a, b)$. Dann ist $b = \sup I$. Welche der folgenden Aussagen ist dazu äquivalent?
Falls mehr als nur eine Aussage äquivalent zu $b = \sup I$ ist, D wählen.

- A b ist eine reelle Zahl, die eine obere Schranke für alle Elemente von I ist.
- B b ist ein Element von I, das eine obere Schranke für alle Elemente von I ist.
- C b ist eine obere Schranke von I und es gibt keine kleinere obere Schranke von I

Lösung C – (A) falsch, z.B. erfüllt $b + 1$ auch (A) und ist nicht das Supremum.
(B) falsch, da $b \notin I$.
(C) ist die Definition von sup.

QQ 8

Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$.

Was ist die stärkste[1] daraus mögliche Folgerung?

- A Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > 0$.
- B Es gilt $a_n > 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.
- C Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n > 0$ für alle $n \geq n_0$ ist.
- D Es ist $a_n > 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

[1] Eine Aussage (1) ist stärker als eine Aussage (2), falls aus (1) schon (2) folgt

QQ 8

Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$.

Was ist die <u>stärkste</u>[2] daraus mögliche Folgerung?

- A Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > 0$.
- B Es gilt $a_n > 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.
- C Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n > 0$ für alle $n \geq n_0$ ist.
- D Es ist $a_n > 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Lösung C – A bis C ist wahr, aus C folgt B, aus B folgt A, D ist falsch (z.B. $a_0 = -1, a_n = 1$ für $n \geq 1$)

[2] Eine Aussage (1) ist stärker als eine Aussage (2), falls aus (1) schon (2) folgt

QQ 9 – Was ist die richtige Begründung?

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit

$$a_n = 0 \text{ für } n > n_0.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert.

- A Denn die Folge $(a_n)_n$ ist eine Nullfolge.
- B Denn $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ für $n > n_0$.
- C Denn die Folge $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_n$ ist eine Nullfolge.
- D Denn die Folge $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_n$ konvergiert gegen $\sum_{k=0}^{n_0} a_k$.

QQ 9 – Was ist die richtige Begründung?

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit

$$a_n = 0 \text{ für alle } n > n_0.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert.

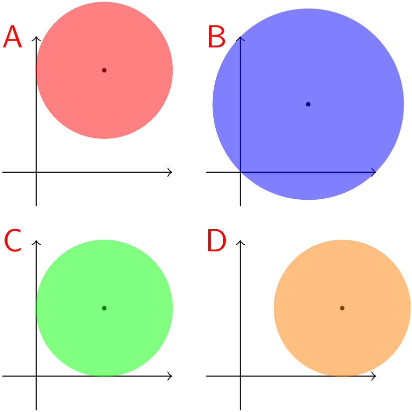
- A Denn die Folge $(a_n)_n$ ist eine Nullfolge.
- B Denn $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ für $n > n_0$.
- C Denn die Folge $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_n$ ist eine Nullfolge.
- D Denn die Folge $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_n$ konvergiert gegen $\sum_{k=0}^{n_0} a_k$.

Lösung D – (A) reicht nicht, da Nullfolge zu sein nur notwendige Bdgg für Konvergenz der Reihe ist.
(B) reicht nicht, da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ nicht konvergiert.
(C) ist i.A. falsch

QQ 10

Welches der Bilder kann die folgende Menge darstellen?

$$B_1\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left| z - \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \right| < 1 \right\}$$

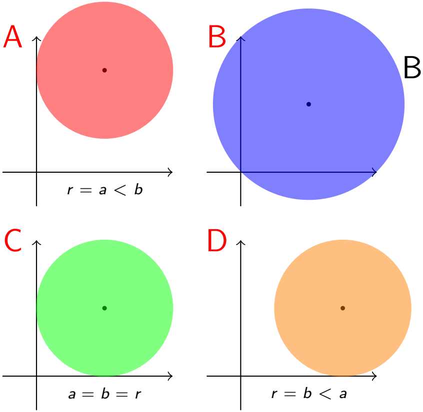


QQ 10

Welches der Bilder kann die folgende Menge darstellen?

$$B_1\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left| z - \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \right| < 1 \right\}$$

$B_r(a + b\mathrm{i})$



B ist richtig

$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$r = \sqrt{2}a = 1$

QQ 11

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.

Welche der folgenden Aussagen über den Limes Superior ist nicht wahr?

- A Es gilt $\limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- B $\limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ ändert sich nicht, wenn man endlich viele Folgenglieder ändert.
- C Es gilt $\limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \limsup_{k\in\mathbb{N}} a_{n_k}$ für jede Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$.
- D Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_k < \limsup_{n\to\infty} a_n + \frac{1}{5}$ für alle $k \geq k_0$ gilt.

QQ 11

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.

Welche der folgenden Aussagen über den Limes Superior ist <u>nicht wahr</u>?

- A Es gilt $\limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- B $\limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ ändert sich nicht, wenn man endlich viele Folgenglieder ändert.
- C Es gilt $\limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \limsup_{k\in\mathbb{N}} a_{n_k}$ für jede Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$.
- D Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_k < \limsup_{n\to\infty} a_n + \frac{1}{5}$ für alle $k \geq k_0$ gilt.

Lösung - C ist i.A. falsch: Beispiel: $a_n = (-1)^n$ und $a_{n_k} = a_{2k+1} = -1$. Dann ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\limsup_{k\to\infty} a_{n_k} = -1$. (D stimmt auch, wenn man $\frac{1}{5}$ durch irgendeine positive Zahl ersetzt.)

QQ 12

Die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ ist

A abzählbar

B überabzählbar

C sowohl abzählbar als auch überabzählbar

D weder abzählbar noch überabzählbar

QQ 12

Die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ ist

A abzählbar

B überabzählbar

C sowohl abzählbar als auch überabzählbar

D weder abzählbar noch überabzählbar

Lösung - B Wäre $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ abzählbar, dann auch die unendliche Teilmenge $\mathbb{R} \times \{1\}$. Doch diese Teilmenge ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$, was überabzählbar ist.

QQ 13

Welche der folgenden Aussagen bedeutet, dass die reelle Folge $(a_n)_n$ nicht konvergiert?

A $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: \ |a_n - a| > \frac{1}{n}$

B $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \epsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0: \ |a_n - a| \geq \epsilon$

C $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0: \ |a_n - a| \geq \epsilon$

D $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: \ |a_n - a| \geq \epsilon$

QQ 13

Welche der folgenden Aussagen bedeutet, dass die reelle Folge $(a_n)_n$ nicht konvergiert?

A $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}:\ |a_n - a| > \frac{1}{n}$

B $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \epsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0:\ |a_n - a| \geq \epsilon$

C $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0:\ |a_n - a| \geq \epsilon$

D $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0:\ |a_n - a| \geq \epsilon$

Lösung B: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ bedeutet

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$$

Negation davon:

$$\exists \epsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0:\ |a_n - a| \geq \epsilon$$

und das muss nun für alle $a \in \mathbb{R}$ gelten.

QQ 14

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $I \subset \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ und $x_0 \in I$. Dann besteht die Menge $f((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap I)$ aus allen

- A $y \in \mathbb{R}$ mit $|y - f(x_0)| < \epsilon$.
- B $y \in f(I)$ mit $|y - f(x_0)| < \epsilon$.
- C $y \in \mathbb{R}$, für die es ein $x \in I$ mit $f(x) = y$ und $|x - x_0| < \epsilon$ gibt.
- D $y \in \mathbb{R}$, für die es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$ und $|x - x_0| < \epsilon$ gibt.

QQ 14

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $I \subset \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ und $x_0 \in I$. Dann besteht die Menge $f((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap I)$ aus allen

A $y \in \mathbb{R}$ mit $|y - f(x_0)| < \epsilon$.

B $y \in f(I)$ mit $|y - f(x_0)| < \epsilon$.

C $y \in \mathbb{R}$, für die es ein $x \in I$ mit $f(x) = y$ und $|x - x_0| < \epsilon$ gibt.

D $y \in \mathbb{R}$, für die es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$ und $|x - x_0| < \epsilon$ gibt.

Lösung C:

$$
\begin{aligned}
& f((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap I) \\
& = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap I : \ f(x) = y\} \\
& = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \epsilon \text{ und } f(x) = y\}
\end{aligned}
$$

QQ 15

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist

A konvergent, da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

B konvergent, da $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$.

C nicht konvergent, da $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nicht konvergiert.

D nicht konvergent, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nicht konvergiert.

QQ 15

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist

A konvergent, da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

B konvergent, da $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$.

C nicht konvergent, da $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nicht konvergiert.

D nicht konvergent, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nicht konvergiert.

Lösung C benutzt das Minorantenkriterium. A falsch, da Nullfolge nicht reicht. B falsch, da im Quotientenkriterium der limsup <u>echt</u> kleiner 1 sein muss. Die Gleichheit in D ist totaler Blödsinn.

QQ 16

Welche Aussage über reelle Folgen stimmt <u>nicht</u>?

A Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

B Konvergiert eine Folge, dann konvergieren alle Teilfolgen.

C Ist die Folge nach oben unbeschränkt, dann konvergiert sie uneigentlich gegen ∞.

D Konvergieren alle Teilfolgen einer Folge, dann konvergiert auch die Folge selbst.

QQ 16

Welche Aussage über reelle Folgen stimmt nicht?

A Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

B Konvergiert eine Folge, dann konvergieren alle Teilfolgen.

C Ist die Folge nach oben unbeschränkt, dann konvergiert sie uneigentlich gegen ∞.

D Konvergieren alle Teilfolgen einer Folge, dann konvergiert auch die Folge selbst.

C: Gegenbeispiel: $a_{2n} = n$, $a_{2n+1} = 1$

A - Bolzano-Weierstrass, D - Die Folge selbst ist auch immer eine Teilfolge von sich

QQ 17 – Wahr oder falsch

Sei $f: [0,1] \to [0,1]$ eine Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(\frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f stetig in 0.

QQ 17 – Wahr oder falsch

Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(\frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f stetig in 0.

Falsch: Ein Gegenbeispiel wäre eine Funktion, die in allen anderen hier nicht angegebenen Punkten den Wert 1 annimmt.

In der Definition der Folgenstetigkeit braucht man eine solche Aussage für alle Folgen, die gegen x_0 (hier 0) konvergieren und nicht nur für eine.

QQ 18

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$ ist

A nicht konvergent

B konvergent aber nicht absolut konvergent

C absolut konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{-1}{3}}$

D absolut konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}$

QQ 18

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$ ist

A nicht konvergent

B konvergent aber nicht absolut konvergent

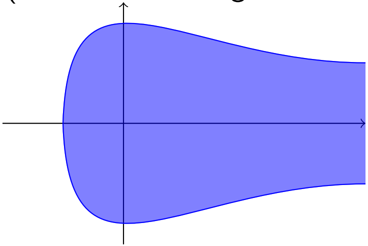
C absolut konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{-1}{3}}$

D absolut konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}$

Lösung C: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n$ sind zwei geometrische Reihe (einmal zu $q=\frac{1}{2}$ und einmal zu $q=-\frac{1}{3}$). Beide Male $|q|<1$, also absolut konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{1-q}$. Summe der beiden abs. konv. Reihen ist wieder abs. konvergent.

QQ 19

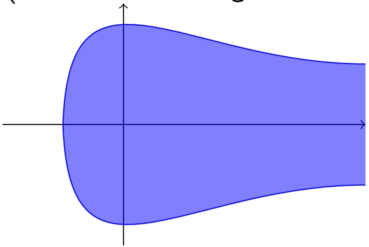
Die blaue Menge (die blaue Kurve gehört dazu) ist



(A) beschränkt, abgeschlossen, offen, kompakt
(B) beschränkt, abgeschlossen, kompakt, nicht offen
(C) abgeschlossen, nicht: beschränkt, kompakt, offen
(D) weder beschränkt, abgeschlossen, kompakt noch offen

QQ 19

Die blaue Menge (die blaue Kurve gehört dazu) ist



(A) beschränkt, abgeschlossen, offen, kompakt

(B) beschränkt, abgeschlossen, kompakt, nicht offen

(C) abgeschlossen, nicht: beschränkt, kompakt, offen

(D) weder beschränkt, abgeschlossen, kompakt noch offen

Lösung C nicht beschränkt (pos. x-Achse in der Menge)und damit nicht kompakt, nicht offen (jeder Punkt auf der blauen Kurve ist kein innerer Punkt), abgeschlossen (da Komplement offen)

QQ 20

Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(1) = 1$. Aus welcher der folgenden Voraussetzungen kann man schließen, dass f eine Nullstelle hat?

(A) f ist stetig und $f(10) = -1$

(B) f ist streng monoton und $f(10) = -1$

(C) Weder aus (A) noch (B).

(D) Aus (A) und (B).

QQ 20

Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(1) = 1$. Aus welcher der folgenden Voraussetzungen kann man schließen, dass f eine Nullstelle hat?

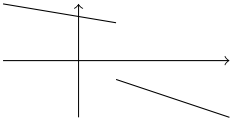
(A) f ist stetig und $f(10) = -1$

(B) f ist streng monoton und $f(10) = -1$

(C) Weder aus (A) noch (B).

(D) Aus (A) und (B).

Lösung A: (A) ist der Zwischenwertsatz
(B) Gegenbeispiel



QQ 21

Wir möchten mit dem $\epsilon - \delta$-Kriterrium zeigen, dass $\lim_{x \to 1} 2x = 2$ gilt:

(A) Sei $\delta > 0$. Wähle $\epsilon = \frac{\delta}{2}$.

(B) Sei $\delta > 0$. Wähle $\epsilon = 2\delta$.

(C) Sei $\epsilon > 0$. Wähle $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

(D) Sei $\epsilon > 0$. Wähle $\delta = 2\epsilon$.

Dann gilt für alle x mit $|x - 1| < \delta$: $|2x - 2| < \epsilon$.

QQ 21

Wir möchten mit dem $\epsilon - \delta$-Kriterrium zeigen, dass $\lim_{x \to 1} 2x = 2$ gilt:

(A) Sei $\delta > 0$. Wähle $\epsilon = \frac{\delta}{2}$.

(B) Sei $\delta > 0$. Wähle $\epsilon = 2\delta$.

(C) Sei $\epsilon > 0$. Wähle $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

(D) Sei $\epsilon > 0$. Wähle $\delta = 2\epsilon$.

Dann gilt für alle x mit $|x - 1| < \delta$: $|2x - 2| < \epsilon$.

Lösung C Sei $\epsilon > 0$. Wähle $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt für alle x mit $|x - 1| < \delta$:

$$|2x - 2| = 2|x - 1| < 2\delta = \epsilon$$

QQ 22

Wir haben zwei Funktion $f, g \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$. Es gelte $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(A) Dann gilt $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$, denn $f(x)g(x) = 0 \cdot g(x) = 0$.

(B) Dann gilt $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$, denn $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} f(x) \cdot \lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

(C) Dann gilt $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) \neq 0$.

(D) Dann gilt weder (A), (B) noch (C).

QQ 22

Wir haben zwei Funktion $f, g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$. Es gelte $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(A) Dann gilt $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$, denn $f(x)g(x) = 0 \cdot g(x) = 0$.

(B) Dann gilt $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$, denn $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} f(x) \cdot \lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

(C) Dann gilt $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) \neq 0$.

(D) Dann gilt weder (A), (B) noch (C).

Lösung D: Gegenbeispiel zu $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 0$: $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$.
Gegenbeispiel zu $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) \neq 0$: $f(x) = g(x) = x$

QQ 23

Wenn eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kein Maximum hat, dann

(A) muss sie unstetig sein,

(B) muss sie unbeschränkt sein,

(C) muss (A) und (B) gelten,

(D) muss weder (A) noch (B) gelten.

QQ 23

Wenn eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kein Maximum hat, dann

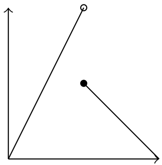
(A) muss sie unstetig sein,

(B) muss sie unbeschränkt sein,

(C) muss (A) und (B) gelten,

(D) muss weder (A) noch (B) gelten.

Lösung A: Wäre $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, gibt es ein Maximum.
Beispiel für ein beschränktes f ohne Maximum :



QQ 24

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

(A) ist in $x = 0$ differenzierbar und die Tangente in $x = 0$ ist die x-Achse.

(B) ist in $x = 0$ differenzierbar und die Tangente in $x = 0$ ist die y-Achse.

(C) ist in $x = 0$ nicht differenzierbar und es gilt $\lim_{x \to 0, x \neq 0} f'(x) = 0$.

(D) ist in $x = 0$ nicht differenzierbar und es gilt $\lim_{x \to 0, x \neq 0} f'(x) = \infty$.

QQ 24

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

(A) ist in $x = 0$ differenzierbar und die Tangente in $x = 0$ ist die x-Achse.

(B) ist in $x = 0$ differenzierbar und die Tangente in $x = 0$ ist die y-Achse.

(C) ist in $x = 0$ nicht differenzierbar und es gilt $\lim_{x \to 0, x \neq 0} f'(x) = 0$.

(D) ist in $x = 0$ nicht differenzierbar und es gilt $\lim_{x \to 0, x \neq 0} f'(x) = \infty$.

Lösung D Es ist $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ für $x > 0$ und $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}$ für $x < 0$.

QQ 25 a

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| + (1-|x|)^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 100 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Für viele x kann man aus abstrakten Regeln (ohne auch nur irgendetwas zu rechnen/abzuschätzen – egal wie einfach) hier direkt folgern, dass f in x differenzierbar ist. Was ist die größtmögliche Menge solcher $x \in \mathbb{R}$?

(A) Alle x außer 1.

(B) Alle x außer 0.

(C) Alle x außer 0 und 1.

(D) Alle x mit $x > 1$.

QQ 25 a

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| + (1-|x|)^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 100 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Für viele x kann man aus abstrakten Regeln (ohne auch nur irgendetwas zu rechnen/abzuschätzen – egal wie einfach) hier direkt folgern, dass f in x differenzierbar ist. Was ist die größtmögliche Menge solcher $x \in \mathbb{R}$?

(A) Alle x außer 1.

(B) Alle x außer 0.

(C) Alle x außer 0 und 1.

(D) Alle x mit $x > 1$.

Lösung C: Überall sonst ist f lokal eine Zusammensetzung (Produkt, Summe, Hintereinanderausführung) differenzierbarer Funktionen.

QQ 25 b

In $x = 0$ ist

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| + (1-|x|)^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 100 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

(A) nicht differenzierbar, da nicht dort stetig.
(B) nicht differenzierbar, da $|x|$ dort nicht differenzierbar.
(C) differenzierbar, da $f(x) = 1 + x^2$ für $x \leq 1$.
(D) differenzierbar, da stetig.

QQ 25 b

In $x = 0$ ist

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| + (1-|x|)^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 100 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

(A) nicht differenzierbar, da nicht dort stetig.

(B) nicht differenzierbar, da $|x|$ dort nicht differenzierbar.

(C) differenzierbar, da $f(x) = 1 + x^2$ für $x \leq 1$.

(D) differenzierbar, da stetig.

Lösung C.

QQ 25 c – Wahr oder falsch?

In $x = 1$ ist

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| + (1 - |x|)^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 100 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

differenzierbar.

QQ 25 c – Wahr oder falsch?

In $x = 1$ ist

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| + (1-|x|)^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 100 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

differenzierbar.

Lösung – Falsch. In $x = 1$ nicht stetig, da $f(1) = 2 < 100$.

QQ 26

Seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit

$$f(a) = g(a) \text{ und } f(b) = g(b).$$

Dann

(A) gibt es ein $c \in (a,b)$, für das die Tangenten an f und g parallel sind.

(B) gibt es ein $c \in (a,b)$, für das die Tangenten an f und g nicht parallel sind.

(C) gilt (A) und (B).

(D) gilt weder (A) noch (B).

QQ 26

Seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit

$$f(a) = g(a) \text{ und } f(b) = g(b).$$

Dann

(A) gibt es ein $c \in (a,b)$, für das die Tangenten an f und g parallel sind.

(B) gibt es ein $c \in (a,b)$, für das die Tangenten an f und g nicht parallel sind.

(C) gilt (A) und (B).

(D) gilt weder (A) noch (B).

Lösung A (A) – Satz von Rolle für $f - g$, (B) falsch für $f = g$.

QQ 27 – o.B.d.A.

'Ohne Beschränkung der Allgemeinheit' verwendet man, wenn die Fälle, die nicht durch diese Einschränkung abgedeckt werden, offensichtlich auf diesen Fall zurückgeführt werden können (z.B. durch Vertauschen der Variablen, Symmetriebetrachtung, ...)

Was ist in diesem Sinne kein vernünftiger Anfang des Beweises von

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \; |x+y| \leq |x| + |y|$$

(A) O.B.d.A. sei $x \leq y$...

(B) O.B.d.A. sei $x \geq 0$...

(C) O.B.d.A. sei $0 \leq x \leq y$...

QQ 27 – o.B.d.A.

'Ohne Beschränkung der Allgemeinheit' verwendet man, wenn die Fälle, die nicht durch diese Einschränkung abgedeckt werden, offensichtlich auf diesen Fall zurückgeführt werden können (z.B. durch Vertauschen der Variablen, Symmetriebetrachtung, ...)

Was ist in diesem Sinne kein vernünftiger Anfang des Beweises von

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \; |x+y| \leq |x| + |y|$$

(A) O.B.d.A. sei $x \leq y$ (sonst vertausche die Namen von x und y (ok, da Aussage symmetrisch in x und y ist))

(B) O.B.d.A. sei $x \geq 0$ (sonst gehe für x und y zu $-x$ und $-y$ über (ok, da $|x| = |-x|$, $|x+y| = |-x-y|$,..))

(C) O.B.d.A. sei $0 \leq x \leq y$. (die Fälle $y \leq x \leq 0$ und $0 \leq y \leq x$ kann man z.B. dann wie (A) und (B) behandeln. Aber es ist unklar, was man mit $x \leq 0 \leq y$ macht.)

QQ 27 – o.B.d.A.

Noch zwei Beispiele:

- Aussage: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und monoton wachsend. Dann gilt $f' > 0$.
  'o.B.d.A. sei $f(0) = 0$' ist ok, da für $g(x) = f(x) - f(0)$, g noch immer monton wachsend ist, $g(0) = 0$ und $g' = f'$ gilt.
- Aussage: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion. Dann ist $f: I \to J$ injektiv.
  'o.B.d.A. sei f monoton wachsend' ist ok, da man sonst einfach $-f$ betrachten kann und aus $-f$ injektiv auch f injektiv folgt.

QQ 28

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar und sei T das <u>n.te Taylorpolynom</u> um $x = 0$. Welche der folgenden Aussagen ist die <u>stärkste</u> richtige Aussage?

(A) $f(0) = T(0)$

(B) $f^{(k)}(0) = T^{(k)}(0)$ für alle $k = 0, \ldots, n$

(C) Es gibt ein $\delta > 0$, so dass $f(x) = T(x)$ für alle x mit $|x| < \delta$ ist.

(D) $f(x) = T(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

QQ 28

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar und sei T das n.te Taylorpolynom um $x = 0$. Welche der folgenden Aussagen ist die stärkste richtige Aussage?

(A) $f(0) = T(0)$

(B) $f^{(k)}(0) = T^{(k)}(0)$ für alle $k = 0, \dots, n$

(C) Es gibt ein $\delta > 0$, so dass $f(x) = T(x)$ für alle x mit $|x| < \delta$ ist.

(D) $f(x) = T(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Lösung B Für C/D müsste f ein Polynom nahe 0/auf ganz $\mathbb{R}$ sein.

QQ 29

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Sei $t(x)$ die Tangente an f an der Stelle $a \in \mathbb{R}$. Sei $R\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $R(x) := f(x) - t(x)$.

(A) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $R(x) = \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$.

(B) Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$R(x) = \frac{1}{2} f''(c)(x-a)^2$.

(C) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit
$R(x) = \frac{1}{2} f''(c)(x-a)^2$.

QQ 29

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Sei $t(x)$ die Tangente an f an der Stelle $a \in \mathbb{R}$. Sei $R\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $R(x) := f(x) - t(x)$.

(A) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $R(x) = \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$.

(B) Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $R(x) = \frac{1}{2}f''(c)(x-a)^2$.

(C) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $R(x) = \frac{1}{2}f''(c)(x-a)^2$.

Lösung C (Langrangesche Restglieddarstellung) Man findet immer ein c zwischen a und x, was damit i.A. von x abhängt.

QQ 30 – Wo liegt der Fehler?

$$\infty \overset{A}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} \underset{\text{l'Hopital}}{\overset{B}{=}} \lim_{x \searrow 0} \frac{(\cos x)'}{(\sin x)'} \overset{C}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} \overset{D}{=} \frac{0}{1} = 0$$

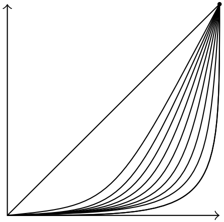
QQ 30 – Wo liegt der Fehler?

$$\infty \overset{A}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} \underset{\text{l'Hopital}}{\overset{B}{=}} \lim_{x \searrow 0} \frac{(\cos x)'}{(\sin x)'} \overset{C}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} \overset{D}{=} \frac{0}{1} = 0$$

Lösung B Die linke Seite entspricht $\frac{'1'}{'0'}$ – l'Hopital ist höchstens bei $\frac{'0'}{'0'}$ und $\frac{'\pm\infty'}{'\pm\infty'}$ anwendbar.

QQ 31

Wofür ist $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto x^n$ ein Beispiel?



(A) Eine punktweise konvergente Folge stetiger Funktionen, die gegen eine stetige Funktion konvergiert.

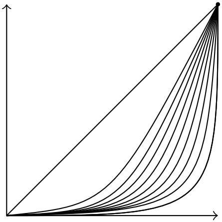
(B) Eine punktweise konvergente Folge stetiger Funktionen, die nicht gegen eine stetige Funktion konvergiert.

(C) Eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen, die gegen eine stetige Funktion konvergiert.

(D) Eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen, die nicht gegen eine stetige Funktion konvergiert.

QQ 31

Wofür ist $f_n\colon [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto x^n$ ein Beispiel?



Lösung B: f_n konvergiert punktweise gegen f mit $f(1) = 1$ und $f|_{[0,1)} = 0$. Dieses f ist nicht stetig und somit kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

(A) Eine punktweise konvergente Folge stetiger Funktionen, die gegen eine stetige Funktion konvergiert.

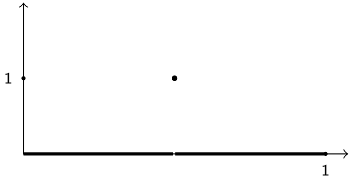
(B) Eine punktweise konvergente Folge stetiger Funktionen, die nicht gegen eine stetige Funktion konvergiert.

(C) Eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen, die gegen eine stetige Funktion konvergiert.

(D) Eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen, die nicht gegen eine stetige Funktion konvergiert.

QQ 32

Ist dieses $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrierbar?



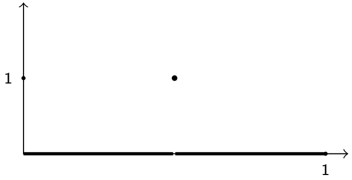
(A) Nein, da f nicht stetig ist.

(B) Ja, das Integral ist 0

(C) Ja, das Integral ist 1.

QQ 32

Ist dieses $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ integrierbar?



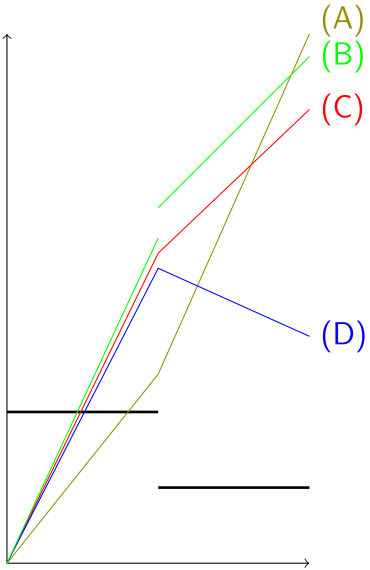
(A) Nein, da f nicht stetig ist.

(B) Ja, das Integral ist 0

(C) Ja, das Integral ist 1.

Lösung B: Das ist eine Treppenfunktion. Die zugehörigen Rechtecke haben Flächeninhalt 0.

QQ 33

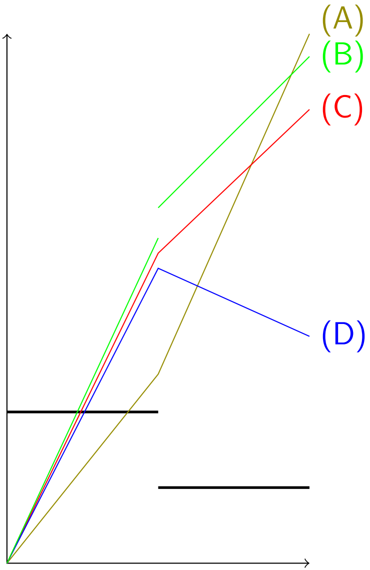


f sei die Treppenfunktion (schwarz) und sei

$$F(x) := \int_0^x f(x)dx$$

Was kann der Graph von F sein?

QQ 33



f sei die Treppenfunktion (schwarz) und sei

$$F(x) := \int_0^x f(x)dx$$

Was kann der Graph von F sein?

Lösung C: $F(0) = 0$,
Da $f \geq 0$, ist F monton steigend. F ist stetig.
Der Anstieg muss am Anfang größer sein, da die Stufe dort höher ist.