Analysis I Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 20/21

Übungsblatt 4

Aufgabe 13 (0.5+1+1.5+2)**.** Wir betrachten die Fibonaccifolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ und $f_0 = f_1 = 1$. Wir setzen $a_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$.

(i) Finden Sie eine rekursive Beschreibung der Folge $(a_n)_n$.

(ii) Zeigen Sie, dass $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(iii) Untersuchen Sie die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie.

(iv) Konvergiert $(a_n)_n$? Wenn ja, zu welchem Grenzwert?

Aufgabe 14 (1+1+1+1+1)**.**

(i) Berechnen Sie i^n für alle $n \in \mathbb{N}$.[1]

(ii) Stellen Sie $\frac{1+\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}$ in der Form $a + \mathrm{i}b$, $a, b \in \mathbb{R}$, dar.

(iii) Untersuchen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ für $p, q \in \mathbb{R}$. Wann hat diese nur reelle Lösungen und wie viele sind das dann jeweils? Kann man in den anderen Fällen die Gleichung in $\mathbb{C}$ lösen? Was sind dann die Lösungen?

(iv) Finden Sie alle komplexen Lösungen von $x^3 = 1$ und stellen Sie diese in $\mathbb{R}^2$ graphisch dar.

(v) Bestimmen Sie $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und stellen Sie diese komplexen Zahlen graphisch dar.

Aufgabe 15 (1.5+2+1.5)**.**

(i) Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k-1})$ genau dann konvergent ist, wenn der Limes von $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ existiert. Was ist dann der Grenzwert?

(ii) Wenden Sie (i) auf die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ und $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-1}$ an.

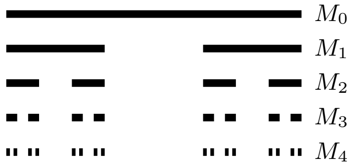
Hinweis: Schreiben Sie $\frac{1}{k(k+1)}$ in der Form $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ für geeignete a, b.

(iii) Sei $(a_n)_n$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ genau dann in $\mathbb{R}$ konvergiert, wenn die Folge der zugehörigen Partialsummen nach oben beschränkt ist.

[1] Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sei $z^0 = 1$.

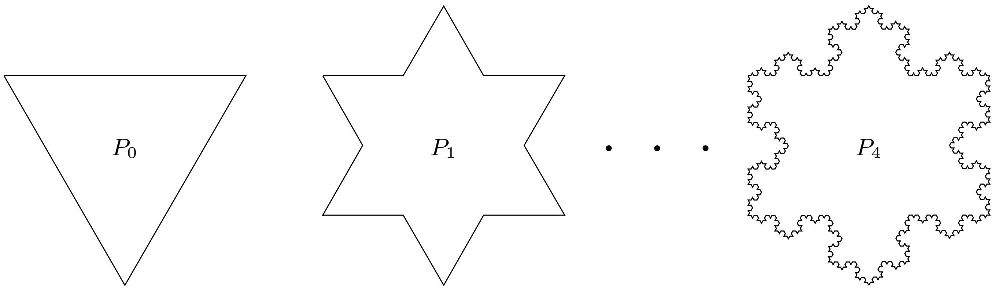
Aufgabe 16 (2+(1.5+1.5)).

(i) Sei $M_0 = [0, 1]$. Wir definieren eine Folge aus Mengen M_n, wobei jedes M_n eine disjunkte Vereinigung von Intervallen[2] ist, rekursiv wie folgt: Die Menge M_{n+1} entsteht aus M_n, indem jedes der Intervalle von M_n gedrittelt wird und das mittlere entfernt wird.



Sei s_n die Summe der Längen der Intervalle in M_n. Bestimmen Sie s_n, untersuchen Sie die Folge $(s_n)_n$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(ii) Sei P_0 das gleichseitige Dreieck mit Seitenlänge 1. Wir definieren die Polygone P_n rekursiv wie folgt: P_{n+1} entsteht aus P_n, indem jede Kante des Polygons gedrittelt wird, auf dem mitteleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge gleich dem mittleren Drittel gesetzt wird und dann dieses mittlere Drittel gelöscht wird.



Sei ℓ_n der Umfang des Polygons P_n und A_n der Flächeninhalt des Polygons P_n.

(a) Bestimmen Sie ℓ_n und zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \ell_n = \infty$ gilt.

(b) Bestimmen Sie $A_n - A_{n-1}$. Zeigen Sie, dass A_n für $n \to \infty$ konvergiert.

Abgabe am Mittwoch 02.12.20 bis 14 Uhr – bitte nicht vor Dienstag 9 Uhr abgeben

[2] Eine Vereinigung von Mengen ist *disjunkt*, wenn jede zwei dieser Menge kein Element gemeinsam haben.