Übungsblatt 7

Achtung: Abgabe am Dienstag 22.12.20 bis 22 Uhr

Aufgabe 25 (3+2). (i) Wir betrachten die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| + |z| < 4\}$. Ist diese beschränkt, abgeschlossen, kompakt und/oder offen? Begründen Sie. Skizzieren Sie diese Menge.

Hinweis: Falls Sie die Menge nicht (auch nicht mal annähernd) skizzieren können: Nicht nötig für den Rest der Frage. Aber es ist hilfreich sich wenigstens zu überlegen, welche Punkte auf der x-Achse zur Menge gehören. Orientieren Sie sich von der Vorgehensweise her an Beispiel 4.1.24.(iv) der Vorlesung.

(ii) Lösen Sie (i) noch einmal für: $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| + |z| \leq 4\}$

Aufgabe 26 (1+2+2). (i) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 1 \\ ax+2 & \text{für } x \in (1,2] \\ be^x & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ unstetig und in allen anderen x stetig ist. Ändert sich was, wenn man $f(0) = a$ für ein $a \in \mathbb{R}$ setzt?

(iii) Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 27 (2.5+2.5+1*). (Anwendung vom Zwischenwertsatz) Sei $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Zeigen Sie, dass f streng monoton (wachsend oder fallend) ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + x^2\cos x + 1 \in \mathbb{R}$ mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

(iii*) Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ stetig. Zeigen Sie, dass f mindestens einen Fixpunkt ($f(x) = x$) besitzt.

Aufgabe 28. Wir finden den folgenden Beweis für die Aussage:
Die Funktion $\frac{\sin x}{x}\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ ist auf $x = 0$ stetig fortsetzbar.

Beweis. Es ist

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots$$

und damit

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + - \dots$$

Also ist $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ☐

Das ist richtig, doch begründen Sie bitte die einzelnen Schritte (also warum die roten Gleichheitszeichen richtig sind.)

Abgabe am Dienstag 22.12.20 bis 22 Uhr