Übungsblatt 8 – Frohe Weihnachten!

Aufgabe 29 (1+2+2)**.** Berechnen Sie folgende Grenzwerte

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3+2x+1}{2x^3+7x}$

(ii) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})$ Hinweis: Sie können benutzen, dass $\sqrt{x}\to\infty$ für $x\to\infty$.

(iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x}$ Hinweis: Nutzen Sie $x = e^{\ln x}$ für $x \in (0,\infty)$.

Aufgabe 30 (1+2+2)**.** Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen

(i) Tangens: $\tan\colon \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$

(ii) [1] $(x^3+2x+1)e^{x^2}$

(iii) $\ln\frac{1+x}{1-x}$

Aufgabe 31 (2.5+2.5)**.** (i) Sei g eine beschränkte Funktion auf $[-1,1]$ und $f(x) := x^2 g(x)$. Zeigen Sie, dass f in 0 differenzierbar ist.

(ii) Sei $f\colon I=(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in $x_0\in I$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0)$$

gilt. Folgt andersherum, dass, wenn der Limes $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ existiert, dann f in x_0 differenzierbar ist? Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 32 (3+2)**.** (i) Rechnen Sie die Werte des Sinus und Kosinus für die Argumente $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ nach:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Hinweis: $\cos x = \operatorname{Re} e^{\mathrm{i}x}$

(ii) Skizzieren Sie die Mengen $A=\{\cos^2\phi\; e^{\mathrm{i}\phi} \mid \phi\in[0,2\pi)\}\subset\mathbb{C}$ und $B=\{2(1+\cos\phi)\; e^{\mathrm{i}\phi} \mid \phi\in[0,2\pi)\}\subset\mathbb{C}$.

Aufgabe* (5)**.** Sei $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ stetig mit $f(0)=f(1)$. Für welche Zahlen $d\in(0,1]$ gibt es immer (also unabhängig von der gewählten Funktion f) ein $x\in[0,1-d]$ mit $f(x)=f(x+d)$?

Abgabe am Mittwoch 13.01.21 bis 14 Uhr

[1] $e^{x^2} := e^{(x^2)}$ und <u>nicht</u> gleich $(e^x)^2$ (das letztere ist gleich e^{2x}).