Analysis I — Ksenia Fedosova, Nadine Große

WS 20/21

Übungsblatt 9

Aufgabe 33. Wir betrachten die Funktion $f\colon \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x < -1 \\ 2 + x & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{5}x^3 - x + \frac{4}{5} & \text{für } x \in (1,5) \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion. Was ist das Supremum und Infimum der Funktion? Wird das Supremum bzw. Infimum angenommen?

Aufgabe 34 (2.5+2.5). (i) Zeigen Sie, dass $e^{|x|} - 2$ auf $\mathbb{R}$ genau zwei Nullstellen besitzt.

(ii) Sei $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'' > 0$ und f' beschränkt. Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to 1} f'(x)$ existiert.

Aufgabe 35 (2+2+1). (i) (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

gibt.

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis des Mittelwertsatzes als Verallgemeierung vom Satz von Rolle.

(ii) (Regel von l'Hopital) Sei I ein Intervall $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion. Sei x_0 ein Häufungspunkt von I. Es existiere $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Sei $f(x_0) = g(x_0) = 0$ oder $\lim_{x\to x_0} f(x_0) = \lim_{x\to x_0} g(x_0) = \infty$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gilt.

(iii) Benutzen Sie die l'Hopitalsche Regel, um folgende Grenzwerte zu bestimmen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x\to 0} x \ln x$$

Aufgabe 36. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{n+1} \\ \sin^2 \frac{\pi}{x} & \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f_n punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiert. Zeigen Sie, dass f_n nicht gleichmäßig gegen f konvergiert. Betrachten Sie die Reihe $\sum_n f_n(x)$. Zeigen Sie, dass diese für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert, aber die Funktionenfolge der zugehörigen Partialsummen nicht gleichmäßig konvergiert .

Abgabe am Mittwoch 20.01.21 bis 14 Uhr