Übungsblatt 11

Aufgabe 41 (0.5+2+2+0.5)**.** Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion, $n > 1$, derart, dass für ein $c \in (a,b)$ gilt:

$$f'(c) = f''(c) = f^{(3)}(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0, \quad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

(i) Bestimmen Sie das n.te Taylorpolynom von f um den Entwicklungspunkt c.

(ii) Sei n ungerade. Zeigen Sie, dass dann c ein Sattelpunkt von f ist.

(iii) Sei n gerade. Zeigen Sie, dass dann c ein lokales Maximum (für $f^{(n)}(a) < 0$) oder ein lokales Minimum (für $f^{(n)}(a) > 0$) ist.

(iv) Sei $k \in \mathbb{N}_{>1}$. Wenden Sie (ii) bzw. (iii) für $f(x) = x^k$ an, um zu sehen, welche Art von Extremstelle $x = 0$ ist.

Aufgabe 42. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(a) = 0$. Es gebe ein $A \in \mathbb{R}$ mit $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ für alle $x \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass dann f konstant Null ist.

Aufgabe 43 (1.5+2.5+1)**.** (Asymptotik von Potenzen nahe Extremstellen) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar mit $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$.

(i) Zeigen Sie

$$\ln f(x) = \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2) \quad \text{für } x \to 0.$$

(ii) Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \left(f\left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = e^{\frac{1}{2} f''(0) x^2}.$$

(iii) Folgern Sie

$$\lim_{n\to\infty} \cos^n f\left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) = e^{-\frac{1}{2} x^2}.$$

Aufgabe 44 (1+3+1)**.** (i) Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{n} kx^k$ für $x \neq 1$. Hinweis: Betrachten Sie $f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} x^k$.

(ii) Wir betrachten den Logarithmus $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Sei $a > 1$. Sei $\mathcal{Z}_n$ die Zerlegung von $[1,a]$ mit $x_k = a^{\frac{k}{n}}$, $k = 0, \ldots, n$. Berechnen Sie die Untersumme U_n von $\ln x$ auf dem Intervall $[1,a]$ zur Zerlegung $\mathcal{Z}_n$. Vereinfachen Sie derart, dass am Ende kein Summenzeichen mehr dasteht.

(iii) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} U_n$.

Abgabe am Mittwoch 04.02.21 bis 14 Uhr