

Übungsblatt 0

Das 0.te Übungsblatt wird in der ersten Übung (in der Woche vom 9.11) besprochen, wird jedoch nicht abgegeben. Die Übungsaufgaben befinden sich auf der zweiten Seite.

Um für die folgenden Woche schon mal die Technik des Abgebens zu testen, legen wir Ihnen nahe auch schon diese Woche einen Abgabe bis **Freitag, 6.11., 15 Uhr** zu machen, aber nicht mit der Lösung der Übungsaufgaben von diesem Blatt, sondern einfach mit einer Visualisierung der Mengengleichheit

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Die Anweisungen für die Abgabe finden Sie in README_allgemein.pdf im Ordner mit den Kursmaterialien.

Allgemeine Hinweise zur Digitalisierung ihrer Lösung:

- Falls Sie einen Scanner besitzen oder direkt ihre Lösungen auf ein Tablet oder ähnliches schreiben, sollten Sie mit der Vorgabe des Dateiformats (pdf) und der Maximalgröße (2MB) keine Probleme haben.
- Eine andere Möglichkeit ist es von den aufgeschriebenen Lösungen Fotos zu machen. Wie man Bilder (meist *.jpg) in pdf umwandelt, verschiedene pdf's zu einer pdf-Datei macht (google: pdf merge) und ggf. pdf's komprimiert, findet man im Internet (sowohl als Programme zum Installieren als auch als Online-Tools). Wenn die Fotos zu groß sind, kann es sein, dass auch das Komprimieren des pdfs nicht ausreicht. Dann mal die Auflösung der Kamera heruntersetzen (sollte natürlich noch alles lesbar sein).

- Aufgabe.** (i) Bestimmen Sie alle Teilmengen der folgenden Mengen. a) $\{1\}$ b) $\{1, 2, 3\}$ c) $\emptyset$
- (ii) Sei $M = \{1, 2\}$ und $N = \{2, 3, 4\}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?
a) $M \subset N$ b) $2 \in N$ c) $\{3\} \in N$ d) $\{2, \{3, 4\}\} \subset N$
- (iii) Seien X und Y jeweils eine leere Menge, d.h. sie enthalten jeweils keine Elemente. Gilt dann $X = Y$?
- (iv) Zeigen Sie, dass aus $A \subset B$ folgt, dass $A \cup B = B$ und $A \cap B = A$ folgt.
- (v) Zeigen Sie, dass $(X \times Y) \cup (A \times Y) = (X \cup A) \times Y$ gilt.

- Aufgabe.** (i) Sind die Mengen $\{(a, b), (a, c), (b, c)\}$ bzw. $\{(a, b), (b, a), (c, c)\}$ Graphen einer Funktion? Wenn ja, welcher?
- (ii) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und seien A und B Teilmengen von X . Zeigen Sie: Aus $A \subset B$ folgt $f(A) \subset f(B)$.
- (iii) Sei $f: X \times X \rightarrow X$ eine Abbildung. Denken Sie als Beispiel für ein solches f an Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{N}$. Definieren Sie, wann f kommutativ bzw. assoziativ ist, so dass es auf obigem Beispiel der Standardbedeutung von Kommutativität bzw. Assoziativität entspricht.
- (iv) Seien $f: X \rightarrow Y$, $g: Z \rightarrow X$ bijektive Abbildungen. Zeigen Sie $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

- Aufgabe.** (i) Sei M die Menge aller Geraden in der Ebene. Wir setzen voraus, dass wir aus der Schule wissen, wann zwei Geraden senkrecht aufeinander stehen. Für $g, h \in M$ schreiben wir nun $g \sim h$, falls g und h senkrecht zueinander stehen. Entscheiden Sie: Ist diese Relation, reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv?
- (ii) Sei M die Menge aller Geraden in der Ebene. Wir setzen voraus, dass wir aus der Schule wissen, wann zwei Geraden parallel sind. Außerdem legen wir fest, dass eine Gerade auch parallel zu sich selbst ist. Für $g, h \in M$ schreiben wir nun $g \sim h$, falls g und h parallel sind. Entscheiden Sie: Ist diese Relation, eine Äquivalenzrelation?
- (iii) Es gelte $(r_1, r_2) \sim (s_1, s_2)$ für $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{N}$, $r_2, s_2 \neq 0$ falls $r_1 s_2 = r_2 s_1$ gilt. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe. Sei A eine Menge mit genau n Elementen. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ genau $2^n := \underbrace{2 \cdot \dots \cdot 2}_{n\text{-mal}}$ Elemente besitzt.

Übungsblatt 1

! Es werden nur Abgaben gewertet, die die Vorgaben an Dateiname und Format erfüllen (siehe README_allgemein.pdf im Ordner mit den Kursmaterialien)!

Aufgabe 1 (2+1+(1+1)).¹ Sei $f: A \rightarrow B$ eine Funktion. Seien C, D Teilmengen von B , sowie E, F Teilmengen von A .

- (i) Zeigen Sie

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

und veranschaulichen Sie diese Gleichheit in einer Abbildung.

- (ii) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, um zu zeigen, dass im Allgemeinen nicht

$$f(E \cap F) = f(E) \cap f(F)$$

gilt.

- (iii) Nehmen wir nun zusätzlich an, dass f (a) injektiv bzw. (b) surjektiv ist. Gilt nun $f(E \cap F) = f(E) \cap f(F)$? Begründen Sie.

Aufgabe 2 (1+(1+1+1+1)). (i) Ist die Nachfolgerfunktion $\nu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Aus welchem Peanoschen Axiom folgt jeweils ihre Antwort?

- (ii) Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Beweisen Sie oder finden Sie ein Gegenbeispiel für jede der folgenden Aussagen:

- (a) Sind f und g injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.
- (b) Ist f injektiv und g surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.
- (c) Sind f und g surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.
- (d) Ist f injektiv und g surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

Aufgabe 3 ((2+1)+2). (i) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die folgenden Aussagen:

$$A(n): \sum_{k=0}^n k \cdot k! = (n+1)! + 1$$

$$B(n): \sum_{k=0}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

Es kann höchstens eine der beiden Aussagen wahr sein.

- (a) Zeigen Sie, falls für ein $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr. Zeigen Sie die analoge Aussage für $B(n)$.
 - (b) Warum folgt aus (a) nicht schon, dass doch beide Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr sind? Welche der Aussagen $A(n)$ bzw. $B(n)$ stimmt für alle $n \in \mathbb{N}$? Begründen Sie.
- (ii) (Division mit Rest) Sei $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > 0$. Zeigen Sie, dass es immer $q, r \in \mathbb{N}$ mit $n = qm + r$ und $0 \leq r < m$ gibt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass

$$|a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt. Wann gilt Gleichheit?²

Abgabe am Mittwoch 11.11.20 bis 14 Uhr

¹Die Zahlen in Klammern geben die Punkteverteilung auf die jeweiligen Teilaufgaben an.

²D.h. man muss alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ finden, so dass Gleichheit in der Ungleichung gilt.

Übungsblatt 2

! Es werden nur Abgaben gewertet, die die Vorgaben an Dateiname und Format erfüllen (siehe README_allgemein.pdf im Ordner mit den Kursmaterialien)!

Abgabe am Mittwoch 18.11.20 bis 14 Uhr. Bitte nicht vor Dienstag 17.11. 9 Uhr abgeben!

Hinweis: Teilaufgaben haben oft (wenn auch nicht immer) etwas miteinander zu tun. Sie können für eine spätere (Teil-)Aufgabe alle (Teil-)Aufgaben davor als gelöst annehmen.

Aufgabe 5 (1.5+1.5+2). Berechnen Sie genügend Folgenglieder dieser Folgen, um eine Idee zu bekommen, ob und wohin diese konvergieren könnten. Benutzen Sie die Grenzwertdefinition (nicht schon abgeleitete Konvergenzkriterien oder Rechenregeln mit konvergenten Folgen), um ihre Beobachtung zu beweisen:

$$(a) \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n>0} \quad (b) \left(\frac{n^2+1}{n^2+n}\right)_{n>0} \quad (c) \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n>0}$$

Aufgabe 6 (1+1.5+2.5). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Wir nennen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von (a_n) , falls es eine Folge $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit $i_0 < i_1 < i_2 < \dots$ gibt, so dass $b_n = a_{i_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- (i) Ist $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n>0}$ für $p \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge der harmonischen Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n>0}$?¹ Begründen Sie. Geben Sie eine (ggf. weitere) Teilfolge der harmonischen Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ an.
- (ii) Zeigen Sie, dass jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert. Gegen welchen Grenzwert?
- (iii) Seien $(a_{i_n})_n$ und $(a_{j_n})_n$ zwei Teilfolgen von $(a_n)_n$. Wir nehmen an, dass jedes Folgenglied von $(a_n)_n$ zu einer der beiden Teilfolgen gehört. Weiterhin gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{i_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{j_n} = a$. Zeigen Sie, dass dann auch $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ist.

Aufgabe 7 (2+1.5+1.5). (i) (Bernoullische Ungleichung) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

gilt. (Hinweis: vollständige Induktion)

- (ii) (Geometrische Folge) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ gilt.
- (iii) (Geometrische Reihe) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Zeigen Sie, dass $a_n = \sum_{i=0}^n q^i$ eine konvergente Folge ist. Was ist der Grenzwert?

¹Für $p > 0$ ist $n^p := \underbrace{n \cdot \dots \cdot n}_{p\text{-mal}}$. Für $p = 0$ sei $n^0 := 1$.

Aufgabe 8 (2+2+1). Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $I_n := [a_n, b_n] := \{x \in \mathbb{R} \mid a_n \leq x \leq b_n\}$ ein abgeschlossenes Intervall mit $a_n < b_n$. Wir nennen $(I_n)_n$ eine *Intervallschachtelung*, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
 - Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| := b_n - a_n < \epsilon$.
- (i) Zeigen Sie, dass es zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_n$ es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ ²
- (ii) Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Intervallschachtelung $(I_n = [a_n, b_n])$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ und $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ gibt.
- (iii) Sei $x = 0, \bar{9} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{9}{10^i}$. Zeigen Sie, dass $x = 1$ gilt. Benutzen Sie dafür eine geeignete Intervallschachtelung.

Zusatzaufgabe - Brücke zur Schulmathematik (0.5+1.5). Angelehnt an eine Aufgabe aus einem Schulbuch der Klasse 9 (mathwerkstatt):

- (i) Warum hat $(*, * * 9)^2$ genau sechs Nachkommastellen und was ist die letzte Nachkommastelle? Was wäre, wenn die Ziffer 9 durch eine andere Ziffer ersetzt wird?
- (ii) Nutzen Sie (i), um zu zeigen, dass $\sqrt{2}$ keine Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen sein kann.

Abgabe am Mittwoch 18.11.20 bis 14 Uhr. Bitte nicht vor Dienstag um 9 Uhr abgeben!

² $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_0 \cap I_1 \cap I_2 \cap \dots$, also: Es ist genau dann $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$, wenn $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

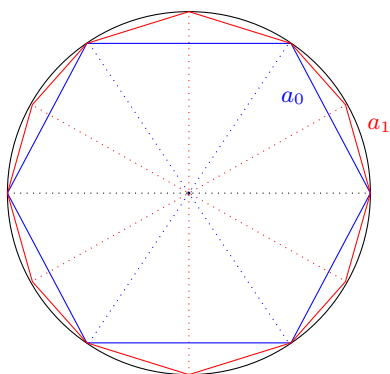
Übungsblatt 3

Aufgabe 9 (3+(1+0.5+0.5)). (i) Untersuchen Sie die Folgen

$$(a_n = n - \frac{1}{n})_{n>0}, \quad (b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n})_n$$

auf folgende Eigenschaften: von oben beschränkt, von unten beschränkt, monoton wachsend/fallend, (uneigentlich) konvergent.

- (ii) Sei V_0 das im Kreis mit Radius 1 einbeschriebene reguläre Sechseck. Wir definieren rekursiv die regulären Vielecke V_n , derart dass V_n doppelt so viele Ecken wie V_{n-1} hat. Sei a_n die Seitenlänge von V_n .



- (a) Zeigen Sie, dass $a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$ gilt.

Hinweis: Wir setzen im Folgenden den Satz des Pythagoras und weitere (notwendige) Sätze am Dreieck als bekannt voraus.

- (b) Stellen Sie den Flächeninhalt f_n des Vielecks V_n in Abhängigkeit von a_n dar.

- (c) Zeigen Sie, dass die Folge f_n konvergiert.

Hinweis: Sie können verwenden, dass für zwei Polygone P_1, P_2 , wobei P_1 vollständig in P_2 liegt, ist der Flächeninhalt von P_1 immer kleiner gleich dem Flächeninhalt von P_2 .

Man kann diese Folge verwenden, um π als den Grenzwert dieser Folge zu definieren.

Aufgabe 10 (1.5+1+2.5).

- (i) Wir betrachten zwei Folgen a_n und b_n . Die Folge a_n habe die Folgenglieder $0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots$ und so weiter periodisch fortgesetzt. Die Folge b_n habe die Folgenglieder $2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, \dots$ und so weiter periodisch fortgesetzt. Bestimmen Sie jeweils den Limes Superior und den Limes Inferior von $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ und $(a_n + b_n)_n$.
- (ii) Sei a_n eine reelle Folge. Zeigen Sie, dass $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ gilt.
- (iii) Seien a_n, b_n zwei reelle Folgen. Was muss für $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ gelten, damit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

gilt? Begründen Sie. Was ist für die verbleibenden Fälle von $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$?

Aufgabe 11 (1+2+2). Sei $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow I \subset \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall I , die eine *Kontraktion* ist, d.h. es gibt ein $q \in (0, 1)$ mit $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ für alle $x, y \in I$. Ein *Fixpunkt* von f ist ein $x \in I$ mit $f(x) = x$.

- (i) Zeigen Sie, dass f maximal einen Fixpunkt besitzt.
- (ii) Sei $x_0 \in I$ und $x_{n+1} = f(x_n)$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_n$ gegen den eindeutigen Fixpunkt von f konvergiert.
- (iii) Sei k_n der Anteil von Kindern mit Grippe in einer Kindergartengruppe am Tag n . Wir nehmen an, dass bei jedem Kontakt zwischen zwei Kindern, von welchen ein Kind krank und eines gesund ist, eine Grippevirusübertragung möglich ist. Die Infektionswahrscheinlichkeit durch Gruppengröße sei hier $\alpha \in [0, 1)$. Außerdem sei ein Kind, wenn es krank ist, nur einen Tag lang krank, und es gibt keine Immunität nach erfolgter Krankheit. Das Modell ist dann näherungsweise $k_{n+1} = \alpha k_n(1 - k_n)$. Benutzen Sie (ii) um zu zeigen, dass k_n konvergiert. Was ist der Grenzwert bei gegebenem k_0 ?

Aufgabe 12 (0.5+1+1+1+1.5). Sei $c, x_0 \in \mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$. Wir betrachten die Heron-Folge

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right).$$

Zeigen Sie:

- (i) Für alle $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, gilt $a + \frac{1}{a} \geq 2$.
- (ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt $x_n^2 \geq c \geq \frac{c^2}{x_n^2}$.
- (iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt $[\frac{c}{x_{n+1}}, x_{n+1}] \subset [\frac{c}{x_n}, x_n]$.
- (iv) Für $\ell_n := x_n - \frac{c}{x_n}$ gilt $\ell_{n+1} = \frac{1}{4x_{n+1}} \ell_n^2$.
- (v) Die Folge $(x_n)_n$ konvergiert.

Abgabe am Mittwoch 25.11.20 bis 14 Uhr – bitte nicht vor Dienstag 9 Uhr abgeben

Übungsblatt 4

Aufgabe 13 (0.5+1+1.5+2). Wir betrachten die Fibonaccifolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ und $f_0 = f_1 = 1$. Wir setzen $a_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$.

- (i) Finden Sie eine rekursive Beschreibung der Folge $(a_n)_n$.
- (ii) Zeigen Sie, dass $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- (iii) Untersuchen Sie die Teilfolgen $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ auf Monotonie.
- (iv) Konvergiert $(a_n)_n$? Wenn ja, zu welchem Grenzwert?

Aufgabe 14 (1+1+1+1+1).

- (i) Berechnen Sie i^n für alle $n \in \mathbb{N}$.¹
- (ii) Stellen Sie $\frac{1+i}{3+2i}$ in der Form $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, dar.
- (iii) Untersuchen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ für $p, q \in \mathbb{R}$. Wann hat diese nur reelle Lösungen und wie viele sind das dann jeweils? Kann man in den anderen Fällen die Gleichung in $\mathbb{C}$ lösen? Was sind dann die Lösungen?
- (iv) Finden Sie alle komplexen Lösungen von $x^3 = 1$ und stellen Sie diese in $\mathbb{R}^2$ graphisch dar.
- (v) Bestimmen Sie $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und stellen Sie diese komplexen Zahlen graphisch dar.

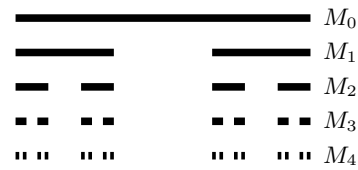
Aufgabe 15 (1.5+2+1.5).

- (i) Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1})$ genau dann konvergent ist, wenn der Limes von $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ existiert. Was ist dann der Grenzwert?
- (ii) Wenden Sie (i) auf die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ und $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-1}$ an.
Hinweis: Schreiben Sie $\frac{1}{k(k+1)}$ in der Form $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ für geeignete a, b .
- (iii) Sei $(a_n)_n$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ genau dann in $\mathbb{R}$ konvergiert, wenn die Folge der zugehörigen Partialsummen nach oben beschränkt ist.

¹Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sei $z^0 = 1$.

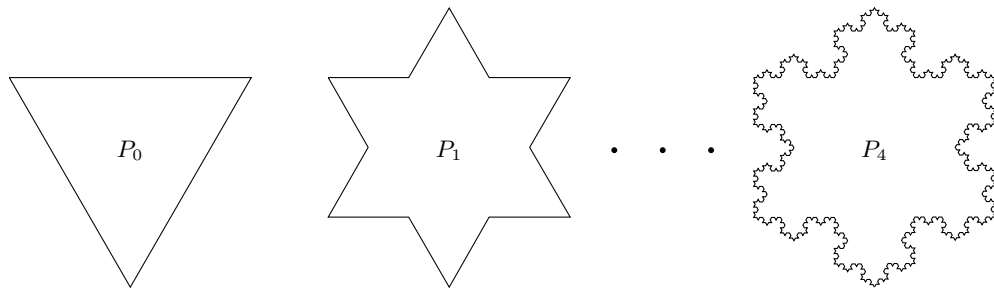
Aufgabe 16 (2+(1.5+1.5)).

- (i) Sei $M_0 = [0, 1]$. Wir definieren eine Folge aus Mengen M_n , wobei jedes M_n eine disjunkte Vereinigung von Intervallen² ist, rekursiv wie folgt: Die Menge M_{n+1} entsteht aus M_n , indem jedes der Intervalle von M_n gedrittelt wird und das mittlere entfernt wird.



Sei s_n die Summe der Längen der Intervalle in M_n . Bestimmen Sie s_n , untersuchen Sie die Folge $(s_n)_n$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

- (ii) Sei P_0 das gleichseitige Dreieck mit Seitenlänge 1. Wir definieren die Polygone P_n rekursiv wie folgt: P_{n+1} entsteht aus P_n , indem jede Kante des Polygons gedrittelt wird, auf dem mittleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge gleich dem mittleren Drittel gesetzt wird und dann dieses mittlere Drittel gelöscht wird.



Sei ℓ_n der Umfang des Polygons P_n und A_n der Flächeninhalt des Polygons P_n .

- (a) Bestimmen Sie ℓ_n und zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = \infty$ gilt.
 (b) Bestimmen Sie $A_n - A_{n-1}$. Zeigen Sie, dass A_n für $n \rightarrow \infty$ konvergiert.

Abgabe am Mittwoch 02.12.20 bis 14 Uhr – bitte nicht vor Dienstag 9 Uhr abgeben

²Eine Vereinigung von Mengen ist *disjunkt*, wenn jede zwei dieser Menge kein Element gemeinsam haben.

Übungsblatt 5

Aufgabe 17 (1+2+2). Konvergieren die folgenden Reihen? Konvergieren sie absolut? Begründen Sie.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{3n-1}}$

Aufgabe 18 (1+2+2). Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} x^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n 2^n}}{(n+1)^4} x^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

Aufgabe 19 (1.5+1.5+2). Wir betrachten ein komplexes Polynom $p(z) = \sum_{i=0}^d a_i z^i$, $a_i \in \mathbb{C}$, mit $a_0 \neq 0$.

- (i) Zeigen Sie, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ es ein komplexes Polynom q vom Grad $d-1$ mit $p(z) - p(\lambda) = (z - \lambda)q(z)$ gibt. (Beachten Sie, dass das Polynom q von λ abhängen wird.)

Hieraus folgt insbesondere: Ist λ eine Nullstelle von p , also $p(\lambda) = 0$, dann kann man den Linearfaktor $z - \lambda$ abspalten, d.h. $p(z) = (z - \lambda)q(z)$ für ein komplexes Polynom q .

- (ii) Benutzen Sie (i), um zu zeigen, dass ein komplexes Polynom vom Grad d höchstens d komplexe Nullstellen haben kann.¹
- (iii) Sei ein komplexes Polynom p vom Grad d mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{C}$ gegeben. Sei $x_0 \in \mathbb{C}$. Wir betrachten das folgende Schema:

The diagram shows the Ruffini-Horner scheme for dividing the polynomial $p(x) = x^3 - 8$ by $(x - x_0)$ with $x_0 = 2$. The coefficients of $p(x)$ are $1, 0, 0, -8$. The coefficients of the quotient $q(x)$ are $1, 2, 4$. The remainder is 0 . The diagram uses arrows to show the calculation of each coefficient of $q(x)$ and the final remainder.

Zeigen Sie, dass der Algorithmus in diesem Schema für beliebiges p und x_0 als z immer $p(x_0)$ ausrechnet. Zeigen Sie, dass, falls x_0 Nullstelle von p ist, dann $p(x) = (x - x_0)q(x)$ gilt.

Aufgabe 20 (3+1+1). Sei $(s_k)_{k \geq 0}$ eine Folge. Wir setzen $\sigma_n := \frac{1}{n}(s_1 + s_2 + \dots + s_n)$.

- (i) Zeigen Sie: Falls $s_k \rightarrow s$ für $k \rightarrow \infty$, dann $\sigma_n \rightarrow s$ für $n \rightarrow \infty$.
- (ii) Sei $(s_k = \sum_{i=1}^k a_i)_k$ die Folge der Partialsummen einer Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Zeigen Sie, dass $\sigma_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i a_j$ gilt. Konvergiert diese Folge σ_k , dann nennt man die Reihe *Cesaro-summierbar* und den Grenzwert von σ_k , den *Cesaro-Grenzwert* dieser Reihe.
- (iii) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ Cesaro-summierbar ist und berechnen Sie den Cesaro-Grenzwert.

Abgabe am Mittwoch 09.12.20 bis 14 Uhr – bitte nicht vor Dienstag 9 Uhr abgeben

¹Der Fundamentalsatz der Algebra gibt einem dann später, dass es (mit Vielfachheit gezählt) genau d komplexe Nullstellen sind.

Übungsblatt 6

Aufgabe 21. Wir haben den Logarithmus $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ als Umkehrfunktion von $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ definiert. Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $z \in \mathbb{C}$ haben wir definiert: $a^z = \exp(z \cdot \ln a)$.

Rechnen Sie nach, dass für $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $r, s \in \mathbb{C}$ gilt

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad (a^r)^s = a^{rs}, \quad a^r a^s = a^{r+s}, \quad a^r b^r = (ab)^r$$

Aufgabe 22 (3+2). (a) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Reihe mit Konvergenzradius R_a und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ eine Reihe mit Konvergenzradius R_b . Zeigen Sie, dass dann $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ für alle x mit $|x| < \min\{R_a, R_b\}$ absolut konvergiert und dass $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ gilt.

(b) Der *Kosinus hyperbolicus* ist definiert als

$$\cosh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

und der *Sinus hyperbolicus* als

$$\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Berechnen Sie die Potenzreihe zu $\cosh x$ und $\sinh x$.

Aufgabe 23 (2.5+2.5). Zeigen Sie, jeweils unter Verwendung der Definition der Folgenstetigkeit bzw. der Stetigkeit (also nicht unter Verwendung der Aussage, dass folgenstetig und stetig eigentlich dasselbe sind), dass die folgenden Funktionen folgenstetig und stetig sind.

(i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 5(x-3)^2 - 1$

(ii) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

Aufgabe 24 (1.5+3.5). Sei $x \in \mathbb{R}$.

$$2 \sin x \cos x = \sin(2x) \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie (1) mit Hilfe der Eulerformel.

(ii) Zeigen Sie (1) mit Hilfe des Cauchyprodukts für Reihen.

Hinweis: Bei der Multiplikation der Reihen werden Sie zwischendurch eine endliche Summe von gewissen Binomialkoeffizienten erhalten. Um diese Summe zu bestimmen, nutzen Sie $2^{2k+1} = (1+1)^{2k+1} + (1-1)^{2k+1}$ zusammen mit dem binomischen Satz.

Übungsblatt 7

Achtung: Abgabe am **Dienstag 22.12.20 bis 22 Uhr**

Aufgabe 25 (3+2). (i) Wir betrachten die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| + |z| < 4\}$. Ist diese beschränkt, abgeschlossen, kompakt und/oder offen? Begründen Sie. Skizzieren Sie diese Menge.

Hinweis: Falls Sie die Menge nicht (auch nicht mal annähernd) skizzieren können: Nicht nötig für den Rest der Frage. Aber es ist hilfreich sich wenigstens zu überlegen, welche Punkte auf der x -Achse zur Menge gehören. Orientieren Sie sich von der Vorgehensweise her an Beispiel 4.1.24.(iv) der Vorlesung.

(ii) Lösen Sie (i) noch einmal für: $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| + |z| \leq 4\}$

Aufgabe 26 (1+2+2). (i) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgende Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 1 \\ ax + 2 & \text{für } x \in (1, 2] \\ be^x & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ unstetig und in allen anderen x stetig ist. Ändert sich was, wenn man $f(0) = a$ für ein $a \in \mathbb{R}$ setzt?

(iii) Zeigen Sie, dass $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 27 (2.5+2.5+1*). (Anwendung vom Zwischenwertsatz) Sei $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Zeigen Sie, dass f streng monoton (wachsend oder fallend) ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + x^2 \cos x + 1 \in \mathbb{R}$ mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

(iii*) Sei $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig. Zeigen Sie, dass f mindestens einen Fixpunkt ($f(x) = x$) besitzt.

Aufgabe 28. Wir finden den folgenden Beweis für die Aussage:

Die Funktion $\frac{\sin x}{x}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist auf $x = 0$ stetig fortsetzbar.

Beweis. Es ist

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

und damit

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Also ist $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. □

Das ist richtig, doch begründen Sie bitte die einzelnen Schritte (also warum die roten Gleichheitszeichen richtig sind.)

Abgabe am Dienstag 22.12.20 bis 22 Uhr

Übungsblatt 8 – Frohe Weihnachten!

Aufgabe 29 (1+2+2). Berechnen Sie folgende Grenzwerte

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 2x + 1}{2x^3 + 7x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})$ Hinweis: Sie können benutzen, dass $\sqrt{x} \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$.

(iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x}$ Hinweis: Nutzen Sie $x = e^{\ln x}$ für $x \in (0, \infty)$.

Aufgabe 30 (1+2+2). Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen

(i) Tangens: $\tan: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$

(ii) $^1(x^3 + 2x + 1)e^{x^2}$

(iii) $\ln \frac{1+x}{1-x}$

Aufgabe 31 (2.5+2.5). (i) Sei g eine beschränkte Funktion auf $[-1, 1]$ und $f(x) := x^2 g(x)$. Zeigen Sie, dass f in 0 differenzierbar ist.

(ii) Sei $f: I = (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0)$$

gilt. Folgt andersherum, dass, wenn der Limes $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$ existiert, dann f in x_0 differenzierbar ist? Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 32 (3+2). (i) Rechnen Sie die Werte des Sinus und Kosinus für die Argumente $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ nach:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Hinweis: $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$

(ii) Skizzieren Sie die Mengen $A = \{\cos^2 \phi e^{i\phi} \mid \phi \in [0, 2\pi)\} \subset \mathbb{C}$ und $B = \{2(1 + \cos \phi) e^{i\phi} \mid \phi \in [0, 2\pi)\} \subset \mathbb{C}$.

Aufgabe* (5). Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$. Für welche Zahlen $d \in (0, 1]$ gibt es immer (also unabhängig von der gewählten Funktion f) ein $x \in [0, 1 - d]$ mit $f(x) = f(x + d)$?

Abgabe am Mittwoch 13.01.21 bis 14 Uhr

¹ $e^{x^2} := e^{(x^2)}$ und nicht gleich $(e^x)^2$ (das letztere ist gleich e^{2x}).

Übungsblatt 9

Aufgabe 33. Wir betrachten die Funktion $f: \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x < -1 \\ 2+x & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{5}x^3 - x + \frac{4}{5} & \text{für } x \in (1, 5) \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion. Was ist das Supremum und Infimum der Funktion? Wird das Supremum bzw. Infimum angenommen?

Aufgabe 34 (2.5+2.5). (i) Zeigen Sie, dass $e^{|x|} - 2$ auf $\mathbb{R}$ genau zwei Nullstellen besitzt.

(ii) Sei $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'' > 0$ und f' beschränkt. Zeigen Sie, dass $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$ existiert.

Aufgabe 35 (2+2+1). (i) (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

gibt.

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis des Mittelwertsatzes als Verallgemeinerung vom Satz von Rolle.

(ii) (Regel von l'Hopital) Sei I ein Intervall $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion. Sei x_0 ein Häufungspunkt von I . Es existiere $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Sei $f(x_0) = g(x_0) = 0$ oder $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x_0) = \infty$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gilt.

(iii) Benutzen Sie die l'Hopitalsche Regel, um folgende Grenzwerte zu bestimmen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$$

Aufgabe 36. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{n+1} \\ \sin^2 \frac{\pi}{x} & \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f_n punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiert. Zeigen Sie, dass f_n nicht gleichmäßig gegen f konvergiert. Betrachten Sie die Reihe $\sum_n f_n(x)$. Zeigen Sie, dass diese für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert, aber die Funktionenfolge der zugehörigen Partialsummen nicht gleichmäßig konvergiert.

Übungsblatt 10

Aufgabe 37 (2.5+2.5). Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sin x + \cos(2x)$.

- (i) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ zweiten Grades von f um $x_0 = \pi$.
- (ii) Finden Sie ein $A \in \mathbb{R}$, so dass für alle x mit $|x - \pi| \leq 1$

$$|f(x) - T_2(x)| \leq A$$

gilt.

Aufgabe 38. Zeigen Sie, dass für alle $s \in \mathbb{R}$ und alle $x \in (-1, 1)$

$$(1+x)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k$$

gilt. Hierbei ist $\binom{s}{k} := \frac{s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot \dots \cdot (s-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 1}$ für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\binom{s}{0} := 1$.¹

Hinweis: Es reicht nicht, nur die Taylorreihe auszurechnen, sondern man muss die Konvergenz zur entwickelten Funktion zeigen.

Aufgabe 39 (1+2.5+1.5). Es seien $a, b, \omega \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal differenzierbar und es gelte

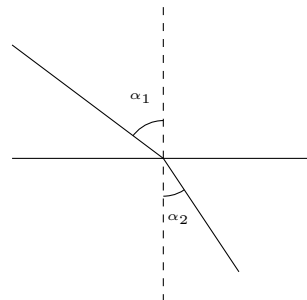
$$f(x) + \omega^2 f''(x) = 0, \quad f(0) = a, f'(0) = \omega b. \quad (1)$$

- (i) Zeigen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist.
- (ii) Sei nun $a = b = 0$. Sei $T > 0$. Zeigen Sie, dass es ein $M > 0$ und ein $A > 0$ mit $|f(x)| \leq M$, $|f'(x)| \leq M$ und $|f^{(n)}(x)| \leq (2A)^n M$ für $n \geq 2$ und für alle $x \in [-T, T]$ gibt. Folgern Sie daraus, dass f gleich seiner Taylorentwicklung um $x = 0$ ist und somit $f(x) = 0$ gilt.
- (iii) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ es genau ein so ein f gibt, welches (1) erfüllt.

Hinweis: Um zu zeigen, dass es nicht mehr als eine Lösung gibt, benutzen Sie (ii). Um eine Lösung zu finden, machen Sie den Ansatz: $f(x) = c_1 \sin(c_2 x) + c_3 \cos(c_4 x)$.

Aufgabe 40.

Wir betrachten den $\mathbb{R}^2$. Für alle Punkte über der x -Achse sei die Lichtgeschwindigkeit c_1 und für alle Punkte unter der x -Achse sei die Lichtgeschwindigkeit c_2 (Bei konstanter Geschwindigkeit ist die benötigte Zeit gleich Weglänge durch Geschwindigkeit). Bestimmen Sie den Weg von $P_1 = (-1, 1)$ zum Punkt $(1, -1)$, für den das Licht die kürzeste Zeit braucht. Benutzen Sie dafür, dass so lange der Weg in einem Abschnitt mit konstanter Lichtgeschwindigkeit zurückgelegt wird, der Weg mit kürzester Zeit immer ein Geradenabschnitt ist. Was gilt dann für $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$?



¹Für $s \in \mathbb{N}$ stimmt diese Definition mit unserer Standarddefinition von Binomialkoeffizienten überein.

Aufgabe* (1+1+1+1+1). Wie können Taschenrechner eigentlich Sinuswerte ausrechnen? Sie haben in der Vorlesung bereits gelernt, dass

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

- (i) Es scheint naheliegend zu sein, $\sin(x)$ und $\cos(x)$ durch ihre abgeschnittenen Taylorreihen zu ersetzen, also durch

$$\sin_n(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$\cos_n(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie in beiden Fällen, dass für alle n , die obigen für Annäherungen für große x sehr ungenau werden. Definieren Sie zunächst mathematisch präzise den Fehler der durch das „Abschneiden“ der höheren Terme entsteht.

- (ii) Zeigen Sie, dass für $n = 10$ der Fehler im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ beider Funktionen gering ist.
- (iii) Der Trick ist nun, dass es ausreicht $\sin(x)$ und $\cos(x)$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ zu kennen, um beliebige Sinus- und Kosinus-Werte zu berechnen. Wir definieren gleich die Funktion $\sin_T(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cos_T(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als die Funktionen, die der Taschenrechner verwendet, um Sinus und Kosinus auszurechnen und für alle reellen Zahlen so genau sind wie $\sin_n(x)$ bzw. $\cos_n(x)$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$. Zunächst definieren $\sin_T(x) = \sin_n(x)$ und $\cos_T(x)$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Berechnen Sie $\sin(x + \frac{\pi}{2})$ und $\cos(x + \frac{\pi}{2})$ und setzen Sie $\sin_T(x)$ sowie $\cos_T(x)$ auf das Intervall $[0, \pi]$ fort, ohne an Genauigkeit einzubüßen.
- (iv) Setzen Sie $\sin_T(x)$ sowie $\cos_T(x)$ auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ fort, ohne an Genauigkeit einzubüßen.
- (v) Setzen Sie im letzten Schritt $\sin_T(x)$ sowie $\cos_T(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ fort, ohne an Genauigkeit einzubüßen.

Übungsblatt 11

Aufgabe 41 (0.5+2+2+0.5). Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -mal stetig differenzierbare Funktion, $n > 1$, derart, dass für ein $c \in (a, b)$ gilt:

$$f'(c) = f''(c) = f^{(3)}(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0, \quad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

- (i) Bestimmen Sie das n .te Taylorpolynom von f um den Entwicklungspunkt c .
- (ii) Sei n ungerade. Zeigen Sie, dass dann c ein Sattelpunkt von f ist.
- (iii) Sei n gerade. Zeigen Sie, dass dann c ein lokales Maximum (für $f^{(n)}(a) < 0$) oder ein lokales Minimum (für $f^{(n)}(a) > 0$) ist.
- (iv) Sei $k \in \mathbb{N}_{>1}$. Wenden Sie (ii) bzw. (iii) für $f(x) = x^k$ an, um zu sehen, welche Art von Extremstelle $x = 0$ ist.

Aufgabe 42. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(a) = 0$. Es gebe ein $A \in \mathbb{R}$ mit $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass dann f konstant Null ist.

Aufgabe 43 (1.5+2.5+1). (Asymptotik von Potenzen nahe Extremstellen) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar mit $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$.

- (i) Zeigen Sie

$$\ln f(x) = \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2) \quad \text{für } x \rightarrow 0.$$

- (ii) Zeigen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = e^{\frac{1}{2} f''(0) x^2}.$$

- (iii) Folgern Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) = e^{-\frac{1}{2} x^2}.$$

Aufgabe 44 (1+3+1). (i) Berechnen Sie $\sum_{k=0}^n kx^k$ für $x \neq 1$. Hinweis: Betrachten Sie $f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} x^k$.

- (ii) Wir betrachten den Logarithmus $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $a > 1$. Sei $\mathcal{Z}_n$ die Zerlegung von $[1, a]$ mit $x_k = a^{\frac{k}{n}}$, $k = 0, \dots, n$. Berechnen Sie die Untersumme U_n von $\ln x$ auf dem Intervall $[1, a]$ zur Zerlegung $\mathcal{Z}_n$. Vereinfachen Sie derart, dass am Ende kein Summenzeichen mehr dasteht.

- (iii) Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$.

Übungsblatt +

Mit dem Blatt können Sie Integrationsmethoden üben. Es ist **nicht zur regulären Abgabe** gedacht. Falls Sie noch **nicht** 50% der möglichen Punkte erreicht haben (= 110), haben Sie hiermit noch eine Möglichkeit das eventuell zu ändern. Dann können Sie die Lösungen zu den folgenden Integralen (mit Integrationsweg) abgeben (pro Integral 2 Punkte). Fragen Sie im Zweifel Ihren Tutor, ob das für Sie in Frage kommt.

1. $\int \sin x \cos x dx$

2. $\int x \cos(4x) dx$

3. $\int \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} dx$

4. $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx$

6. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$

7. $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$

8. $\int \cos(\ln x) dx$

9. $\int (\ln x)^2 dx$

10. $\int \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$