QQ 1 – Stetigkeit

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Was ist in der folgenden Aufzählung <u>die erste richtige Aussage</u>?

Um zu überprüfen, dass f in $(0,0)$ stetig ist, reicht es, zu zeigen, dass

A $f(\frac{1}{n}, 0) \to f(0,0)$ und $f(0, \frac{1}{n}) \to f(0,0)$ für $n \to \infty$.

B $f(x_n, 0) \to f(0,0)$ und $f(0, x_n) \to f(0,0)$ für $n \to \infty$ und alle reellen Folgen $x_n \to 0$.

C $f(x_n, y_n) \to f(0,0)$ für $n \to \infty$ und alle reellen Folgen $x_n \to 0$ und $y_n \to 0$.

D $f(z_n) \to f(0,0)$ für $n \to \infty$ und alle Folgen $z_n \in \mathbb{R}^2$ mit $z_n \to (0,0)$.

QQ 1 – Stetigkeit

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Was ist in der folgenden Aufzählung <u>die erste richtige Aussage</u>?

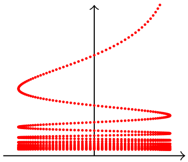
Um zu überprüfen, dass f in $(0,0)$ stetig ist, reicht es, zu zeigen, dass

- A $f(\frac{1}{n},0) \to f(0,0)$ und $f(0,\frac{1}{n}) \to f(0,0)$ für $n \to \infty$.
- B $f(x_n,0) \to f(0,0)$ und $f(0,x_n) \to f(0,0)$ für $n \to \infty$ und alle reellen Folgen $x_n \to 0$.
- C $f(x_n,y_n) \to f(0,0)$ für $n \to \infty$ und alle reellen Folgen $x_n \to 0$ und $y_n \to 0$.
- D $f(z_n) \to f(0,0)$ für $n \to \infty$ und alle Folgen $z_n \in \mathbb{R}^2$ mit $z_n \to (0,0)$.

Lösung C: C=D, Gegenbeispiel für A und B: $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$ (hier ist $f(x,0) = f(0,y) = 0$ aber $f(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$).

QQ 2

Die Folge $a_n = \left(\sin(3n), \frac{1}{n}\right)$ (im Bild für $40 \leq n \leq 1000$)



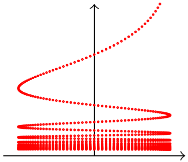
A konvergiert, da sie beschränkt und monoton fallend ist.

B konvergiert, da die Folgenglieder beliebig nahe an die x-Achse kommen.

C divergiert, da $(\sin(3n))_n$ divergiert.

QQ 2

Die Folge $a_n = \left(\sin(3n), \frac{1}{n}\right)$ (im Bild für $40 \leq n \leq 1000$)



A konvergiert, da sie beschränkt und monoton fallend ist.

B konvergiert, da die Folgenglieder beliebig nahe an die x-Achse kommen.

C divergiert, da $(\sin(3n))_n$ divergiert.

Lösung C – zu A: monoton fallend macht nur Sinn für Folgen in $\mathbb{R}$ nicht in $\mathbb{R}^2$.
zu B: die Folge muss beliebig nah an einen Punkt kommen, nicht nur an eine Achse.

QQ 3

Welche der folgenden Funktionen ist eine Abstandsfunktion auf den stetigen Funktionen von $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$? (Eine ist es).

A $d(f, g) = \inf_{[a,b]} |f - g|$

B $d(f, g) = \sup_{[a,b]} |2f - g|$

C $d(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}$

D $d(f, g) = \sup_{[a,b]}(|f - g| + 1)$

QQ 3

Welche der folgenden Funktionen ist eine Abstandsfunktion auf den stetigen Funktionen von $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$? (Eine ist es).

- A $d(f, g) = \inf_{[a,b]} |f - g|$
- B $d(f, g) = \sup_{[a,b]} |2f - g|$
- C $d(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}$
- D $d(f, g) = \sup_{[a,b]}(|f - g| + 1)$

Lösung C. Die anderen nicht, da:

A: keine Dreiecksungleichung

B: nicht symmetrisch

$D : d(f, f) \neq 0$.

QQ 4

Sei $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ und es gelte die untenstehende Gleichung. Wo 'leben' die einzelnen Terme?

$$f(x) = f(p) + A\,(x-p) + |x-p|\; r(x)$$

	$f(x)$	$f(p)$	A	$(x-p)$	$\lvert x-p\rvert$	$r(x)$
(A)	$\mathbb{R}^\ell$	$\mathbb{R}^\ell$	$k \times \ell$ Matrix	$\mathbb{R}^k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^\ell$
(B)	$\mathbb{R}^\ell$	$\mathbb{R}^\ell$	$\ell \times k$ Matrix	$\mathbb{R}^k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^\ell$
(C)	$\mathbb{R}^\ell$	$\mathbb{R}^\ell$	$\ell \times k$ Matrix	$\mathbb{R}^\ell$	$\mathbb{R}^\ell$	$\mathbb{R}$
(D)	$\mathbb{R}^\ell$	$\mathbb{R}^\ell$	$\ell \times k$ Matrix	$\mathbb{R}^\ell$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

QQ 4

Sei $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ und es gelte die untenstehende Gleichung. Wo 'leben' die einzelnen Terme?

$$f(x) = f(p) + A\,(x-p) + |x-p|\,r(x)$$

	$f(x)$	$f(p)$	A	$(x-p)$	$\lvert x-p \rvert$	$r(x)$
(A)	$\mathbb{R}^\ell$	$\mathbb{R}^\ell$	$k \times \ell$ Matrix	$\mathbb{R}^k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^\ell$
(B)	$\mathbb{R}^\ell$	$\mathbb{R}^\ell$	$\ell \times k$ Matrix	$\mathbb{R}^k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^\ell$
(C)	$\mathbb{R}^\ell$	$\mathbb{R}^\ell$	$\ell \times k$ Matrix	$\mathbb{R}^\ell$	$\mathbb{R}^\ell$	$\mathbb{R}$
(D)	$\mathbb{R}^\ell$	$\mathbb{R}^\ell$	$\ell \times k$ Matrix	$\mathbb{R}^\ell$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Lösung B

QQ 5

Sei $n > 1$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x$. Dann enthält die Jacobi-Matrix zu $D_x f$

A lauter Einsen.

B lauter Nullen.

C sowohl Einsen als auch Nullen.

D weder Einsen noch Nullen.

QQ 5

Sei $n > 1$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x$. Dann enthält die Jacobi-Matrix zu $D_x f$

A lauter Einsen.

B lauter Nullen.

C sowohl Einsen als auch Nullen.

D weder Einsen noch Nullen.

Lösung C: $D_x f = \mathrm{Id}$

QQ 6

Man kann sich überlegen, dass die Determinantenfunktion

$$\det\colon \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \to \mathbb{R}$$

eine stetige[1] Abbildung ist. Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich Null ist. Daraus folgt:

- A Die Menge aller invertierbaren reellen $n \times n$-Matrizen ist eine in $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ offene Teilmenge.
- B Die Menge aller invertierbaren reellen $n \times n$-Matrizen ist eine in $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ abgeschlossene Teilmenge.
- C Weder A noch B.
- D Sowohl A als auch B.

---

[1] $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ mit der euklidischen Abstandsfunktion

QQ 6

Man kann sich überlegen, dass die Determinantenfunktion

$$\det\colon \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \to \mathbb{R}$$

eine stetige Abbildung ist. Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich Null ist. Daraus folgt:

- A Die Menge aller invertierbaren reellen $n \times n$-Matrizen ist eine in $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ offene Teilmenge.
- B Die Menge aller invertierbaren reellen $n \times n$-Matrizen ist eine in $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ abgeschlossene Teilmenge.
- C Weder A noch B.
- D Sowohl A als auch B.

Lösung A: Menge der inv.Matrizen$= \det^{-1}(\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\text{offen in } \mathbb{R}})$ also offen.

Nicht abgeschlossen, da $\epsilon \mathrm{Id} \to 0$ für $\epsilon \to 0$.

QQ 7

Wir betrachten den metrischen Raum
$(X = (0, \infty), d =$ eukl. Abstandsfunktion).

(A) (X, d) ist vollständig[2], da $\mathbb{R}$ vollständig ist.

(B) (X, d) ist vollständig, da jede Cauchyfolge in $(0, \infty)$ eine konvergente Folge ist.

(C) (X, d) ist nicht vollständig, da $(0, \infty)$ nicht in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist.

(D) (X, d) ist nicht vollständig, da $(0, \infty)$ nicht beschränkt ist.

[2] alle Cauchyfolgen in X konvergieren in X (bzgl. d)

QQ 7

Wir betrachten den metrischen Raum
$(X = (0, \infty), d =$ eukl. Abstandsfunktion).

(A) (X, d) ist vollständig[3], da $\mathbb{R}$ vollständig ist.

(B) (X, d) ist vollständig, da jede Cauchyfolge in $(0, \infty)$ eine konvergente Folge ist.

(C) (X, d) ist nicht vollständig, da $(0, \infty)$ nicht in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist.

(D) (X, d) ist nicht vollständig, da $(0, \infty)$ nicht beschränkt ist.

Lösung C: $\frac{1}{n}$ ist eine Cauchyfolge aus $X \subset \mathbb{R}$. Aber sie konvergiert gegen 0, also nicht gegen ein Element aus X. D hat die falsche Begründung: $(X = \mathbb{R}, d)$ ist vollständig, aber $\mathbb{R}$ ist unbeschränkt.

[3]vollständig=alle Cauchyfolgen in X konvergieren in X (bzgl. d)

QQ 8

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Aussage 1: f ist (total) differenzierbar
Aussage 2: Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $t \mapsto f(a,t)$ und $t \mapsto f(t,a)$ differenzierbar.

Was gilt?

(A) Die Aussagen sind äquivalent.

(B) Aus 1 folgt 2, aber nicht umgekehrt.

(C) Aus 2 folgt 1, aber nicht umgekehrt.

(D) Keine der Aussagen impliziert die andere.

QQ 8

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Aussage 1: f ist (total) differenzierbar
Aussage 2: Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $t \mapsto f(a,t)$ und $t \mapsto f(t,a)$ differenzierbar.

Was gilt?

(A) Die Aussagen sind äquivalent.

(B) Aus 1 folgt 2, aber nicht umgekehrt.

(C) Aus 2 folgt 1, aber nicht umgekehrt.

(D) Keine der Aussagen impliziert die andere.

Lösung B: Aussage 2 ist die Existenz der partiellen Ableitungen. Aus total diff'bar folgt partiell diff'bar aber nicht umgekehrt.

QQ 9

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $(x_0, y_0)^T \in \mathbb{R}^2$ und sei $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$. Welche der folgenden Aussagen stimmt <u>nicht</u>?

Die Richtungsableitung von f im Punkt (x_0, y_0) in Richtung von v ist gleich

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\partial_x f(x_0, y_0) + \partial_y f(x_0, y_0)\right)$

(B) $\lim_{s\to 0} \frac{f(x_0+\frac{s}{\sqrt{2}}, y_0+\frac{s}{\sqrt{2}}) - f(x_0, y_0)}{s}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0+t) - f(x_0, y_0)}{t}$

(D) der Richtungsableitung von f im Punkt (x_0, y_0) in Richtung von $(1,1)^T$.

QQ 9

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $(x_0, y_0)^T \in \mathbb{R}^2$ und sei $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$. Welche der folgenden Aussagen stimmt <u>nicht</u>?
Die Richtungsableitung von f im Punkt (x_0, y_0) in Richtung von v ist gleich

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_x f(x_0, y_0) + \partial_y f(x_0, y_0)\right)$

(B) $\lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + \frac{s}{\sqrt{2}}, y_0 + \frac{s}{\sqrt{2}})}{s}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0+t)}{t}$

(D) der Richtungsableitung von f im Punkt (x_0, y_0) in Richtung von $(1,1)^T$.

Lösung D: B ist Def. und C kommt aus B mit $t = s/\sqrt{2}$. Da f diff'bar, ist für $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$ die Richtungsabl. in p gleich $D_p f(v) = v_1 D_p f(e_1) + v_2 D_p f(e_2) = v_1 \partial_x f(p) + v_2 \partial_y f(p)$. Also stimmt A und D ist falsch, da $D_p f(\sqrt{2}v) = \sqrt{2} D_p f(v)$.

QQ 10

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Was stimmt nicht?

A $D_p f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(p)x$.

B Die Jacobimatrix von f in p ist $(f'(p))$.

C Die partielle Ableitung von f in e_1-Richtung in p ist $f'(p)$.

D Die Richtungsableitung von f in p in Richtung v ist $f'(p)$.

E Die Hessische von f in p ist $(f''(p))$.

QQ 10

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Was stimmt nicht?

A $D_p f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(p)x$.

B Die Jacobimatrix von f in p ist $(f'(p))$.

C Die partielle Ableitung von f in e_1-Richtung in p ist $f'(p)$.

D Die Richtungsableitung von f in p in Richtung v ist $f'(p)$.

E Die Hessische von f in p ist $(f''(p))$.

Lösung D: Die Richtungsableitung von f in p in Richtung v ist $D_p f(v \in \mathbb{R}) = f'(p)v$.

QQ 11

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto x^3 + 2x^2 + 5xy + y^2 + x + 3.$$

Dann ist das Taylorpolynom zweiten Grades von f in $(0, 0)$ gleich

A 3

B $x + 3$

C $2x^2 + 5xy + y^2$

D $2x^2 + 5xy + y^2 + x + 3$

QQ 11

Sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^3 + 2x^2 + 5xy + y^2 + x + 3. \end{aligned}$$

Dann ist das Taylorpolynom zweiten Grades von f in $(0, 0)$ gleich

A 3

B $x + 3$

C $2x^2 + 5xy + y^2$

D $2x^2 + 5xy + y^2 + x + 3$

Lösung D da $f(x, y) - D = x^3 = o(|(x, y)|^2)$

QQ 12

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit

$$D_{(0,0)}f = (0,0) \text{ und } \mathrm{Hess}_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen stimmt?

A Da $\mathrm{Hess}_{(0,0)}f$ positiv definit ist, hat f in $(0,0)$ ein lokales Minimum.

B Da $\mathrm{Hess}_{(0,0)}f$ nicht positiv definit ist, kann f in $(0,0)$ kein lokales Minimum haben.

C Zwar ist $\mathrm{Hess}_{(0,0)}f$ nicht positiv definit. Aber f könnte in $(0,0)$ trotzdem ein lokales Minimum haben.

D Da $\mathrm{Hess}_{(0,0)}f$ positiv semi-definit ist, kann f in $(0,0)$ kein lokales Minimum haben.

QQ 12

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit

$$D_{(0,0)}f = (0,0) \text{ und } \mathrm{Hess}_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen stimmt?

A Da $\mathrm{Hess}_{(0,0)}f$ positiv definit ist, hat f in $(0,0)$ ein lokales Minimum.

B Da $\mathrm{Hess}_{(0,0)}f$ nicht positiv definit ist, kann f in $(0,0)$ kein lokales Minimum haben.

C Zwar ist $\mathrm{Hess}_{(0,0)}f$ nicht positiv definit. Aber f könnte in $(0,0)$ trotzdem ein lokales Minimum haben.

D Da $\mathrm{Hess}_{(0,0)}f$ positiv semi-definit ist, kann f in $(0,0)$ kein lokales Minimum haben.

Lösung C: $\mathrm{Hess}_{(0,0)}f$ ist positiv semi-definit, aber nicht positiv definit. Trotzdem könnte f in $(0,0)$ ein lokales Minimum haben, z.B.: $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2$.

QQ 13

Sei A eine $n \times m$-Matrix mit Rang ℓ. Was gilt nicht?

A A besitzt ℓ lineare unabhängige Spalten.

B $\operatorname{Bild}(A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n)$ ist ein ℓ-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

C Ist $\ell = n$, dann ist $n \leq m$ und es gibt n Spalten von A, die eine Matrix mit Determinante ungleich Null bilden.

D Ist $\ell = m$, dann ist A surjektiv.

QQ 13

Sei A eine $n \times m$-Matrix mit Rang ℓ. Was gilt nicht?

A A besitzt ℓ lineare unabhängige Spalten.

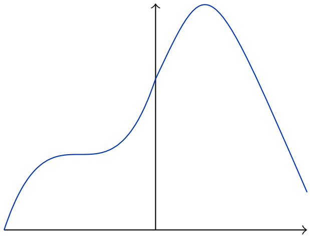
B Bild$(A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n)$ ist ein ℓ-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

C Ist $\ell = n$, dann ist $n \leq m$ und es gibt n Spalten von A, die eine Matrix mit Determinante ungleich Null bilden.

D Ist $\ell = m$, dann ist A surjektiv.

Lösung D Aus $\ell = m$ folgt A injektiv (und $m \leq n$). Aus $\ell = n$ folgt die Surjektivität.

QQ 14



In einer Umgebung welcher Punkte der glatten Funktion links kann man den Satz über inverse Funktionen anwenden? (Die 'Randpunkte' ignorieren.)

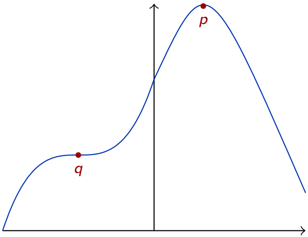
A auf alle

B auf alle bis auf einen

C auf alle bis auf zwei

D nirgends

QQ 14



In einer Umgebung welcher Punkte der glatten Funktion links kann man den Satz über inverse Funktionen anwenden? (Die 'Randpunkte' ignorieren.)

A auf alle

B auf alle bis auf einen

C auf alle bis auf zwei

D nirgends

Lösung C Wegen $f'(p) = f'(q) = 0$ – In einer Umgebung von p ist die Funktion gar nicht umkehrbar. In einer Umgebung von q zwar schon, aber die Umkehrfunktion ist dort nicht differenzierbar.

QQ 15

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit $\det D_x f \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Dann

- A ist f bijektiv.
- B ist in einer offenen Umgebung eines jeden Punktes invertierbar.
- C gilt A und B.
- D muss weder A noch B gelten.

QQ 15

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit $\det D_x f \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Dann

A ist f bijektiv.

B ist in einer offenen Umgebung eines jeden Punktes invertierbar.

C gilt A und B.

D muss weder A noch B gelten.

Lösung B B folgt aus dem Satz über inverse Funktionen. A gilt nicht – Bsp: Es ist $\det D_x f = e^{2x_1}$ für

$$x = (x_1, x_2)^T \mapsto (e^{x_1} \cos x_2, e^{x_1} \sin x_2)^T$$

!! Wäre $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ mit obigen Eigenschaften, dann wäre auch A richtig, da f dann streng monoton wäre.

QQ 16 – Wahr oder falsch?

Jede stetige Funktion $f\colon K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für K kompakt und K enthält min. zwei Punkte hat mindestens zwei Extremstellen.

QQ 16 – Wahr oder falsch?

Jede stetige Funktion $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für K kompakt und K enthält min. zwei Punkte hat mindestens zwei Extremstellen.

Lösung - Wahr Nach dem Satz von Max/Min. nimmt f sein Maximum und sein Minimum an. Damit hat man ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wenn die verschieden sind, fertig. Wenn nicht, ist die Funktion konstant und wir haben so viele Extremstellen wie Punkte in K.

QQ 17

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir betrachten $f(x, y, z) = 0$.

- A Ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ für eine Lösung (x_0, y_0, z_0), dann ist $f(x, y, z) = 0$ nahe (x_0, y_0, z_0) nach $x = x(y, z)$ auflösbar.
- B Ist $\partial_{y,z} f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ für eine Lösung (x_0, y_0, z_0), dann ist $f(x, y, z) = 0$ nahe (x_0, y_0, z_0) nach $(y, z) = (y(x), z(x))$ auflösbar.
- C A und B sind wahr.
- D Weder A noch B ist wahr.

QQ 17

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

A Ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ für (x_0, y_0, z_0) mit $f(x, y, z) = 0$, dann ist f nahe (x_0, y_0, z_0) nach $x = x(y, z)$ auflösbar.

B Ist $\partial_{y,z} f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ für (x_0, y_0, z_0) mit $f(x, y, z) = 0$, dann ist f nahe (x_0, y_0, z_0) nach $(y, z) = (y(x), z(x))$ auflösbar.

C A und B sind wahr.

D Weder A noch B ist wahr.

Lösung A Satz über implizite Funktionen. In B ist $\partial_{y,z} f(x_0, y_0, z_0)$ eine 1×2-Matrix und damit stellt sich da die Invertierbarkeitsfrage nicht. Auch ist bei einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ nur zu erwarten, dass man höchstens nach einer Variablen auflösen kann und nicht nach zwei gleichzeitig.

QQ 18

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}.$$

Wann ist M eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$?

A immer.

B nur falls $\mathrm{grad} f(x) \neq 0$ für alle $x \in M$ gilt.

C nur falls $\mathrm{grad} f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

D nie.

QQ 18

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}.$$

Wann ist M eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$?

A immer.

B nur falls $\mathrm{grad} f(x) \neq 0$ für alle $x \in M$ gilt.

C nur falls $\mathrm{grad} f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

D nie.

Lösung - B. Das ist das Kriterium vom regulären Wert: $D_x f$ ist eine $1 \times n$ Matrix, hat also maximalen Rang gdw. sie nicht Null ist, also wenn der Gradient nicht verschwindet. Dies muss man für alle $x \in M$ überprüfen.

QQ 19

Wie viele der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ können C^1-Untermannigfaltigkeiten sein?

- Die Vereinigung von $x - y$ und $y - z$ Ebene.
- Die Oberfläche eines Donuts/Schwimmrings.
- Die Oberfläche eines Quaders.

A 0 B 1 C 2 D 3

QQ 19

Wie viele der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ können C^1-Untermannigfaltigkeiten sein?

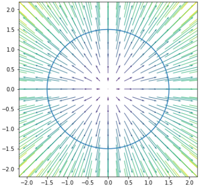
- Die Vereinigung von $x-y$ und $y-z$ Ebene.
- Die Oberfläche eines Donuts/Schwimmrings.
- Die Oberfläche eines Quaders.

A 0 B 1 C 2 D 3

Lösung B Nur der Schwimmring (=Rotationstorus) sieht in der Umgebung jedes Punktes, wie der Funktionsgraph einer stetig differenzierbaren Funktion aus. ('Problempunkte' bei den Ebenen sind die Punkte die im Schnitt liegen und beim Quader alle Kanten und Ecken.)

QQ 20

Sei $V(x, y) = (x, y)$ das radiale Vektorfeld im Bild. Sei γ eine glatte Kurve, deren Bild der blaue Kreis ist. Dann ist $\int_\gamma V \cdot ds$



A 0, da V bei Rotation um den Ursprung gleich bleibt.

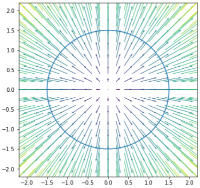
B 0, da V senkrecht auf dem Kreis steht.

C 2π, da V bei Rotation um den Ursprung gleich bleibt.

D 2π, da V senkrecht auf dem Kreis steht.

QQ 20

Sei $V(x, y) = (x, y)$ das radiale Vektorfeld im Bild. Sei γ eine glatte Kurve, deren Bild der blaue Kreis ist. Dann ist $\int_\gamma V \cdot ds$



- A 0, da V bei Rotation um den Ursprung gleich bleibt.
- B 0, da V senkrecht auf dem Kreis steht.
- C 2π, da V bei Rotation um den Ursprung gleich bleibt.
- D 2π, da V senkrecht auf dem Kreis steht.

Lösung B $\int_\gamma V \cdot ds$ integriert über $\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$ und das ist Null, wenn $V \perp \gamma'$ ist – wie hier. A kann nicht die richtige Begründung sein, da $V(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ rotationssymm. ist, aber $\int_\gamma V \cdot ds$ dann $\int |\gamma'(t)|^2 dt$ also positiv wäre.

QQ 21

Welche der folgenden Aussagen stimmt nicht? (X jeweils als metrischer Raum mit dem euklidischen Abstand gemeint.)
$A = [a, b) \times [c, d]$ ist als Teilmenge von

A $X = [a, b] \times [c, d]$ offen.

B $X = [a, b] \times [c, d]$ abgeschlossen.

C $X = [a, b) \times [c, d]$ abgeschlossen.

D $X = [a, b) \times [c, d]$ offen.

QQ 21

Welche der folgenden Aussagen stimmt nicht? (X jeweils als metrischer Raum mit dem euklidischen Abstand gemeint.)
$A = [a, b) \times [c, d]$ ist als Teilmenge von

A $X = [a, b] \times [c, d]$ offen.

B $X = [a, b] \times [c, d]$ abgeschlossen.

C $X = [a, b) \times [c, d]$ abgeschlossen.

D $X = [a, b) \times [c, d]$ offen.

Lösung B Die Folge $(b - \frac{1}{n}, c)$ liegt A, aber konvergiert gegen $(b, c) \in X \setminus A$,

QQ 22

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Was ist die stärkste Aussage, die man daraus folgern kann? (Die Aussagen sind nicht nach 'Starkheit' geordnet.)

A Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $D_x f \neq 0$.

B Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\det D_x f \neq 0$.

C Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ hat $D_x f$ keinen Nulleintrag.

D Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ hat $D_x f$ eine Spalte, die nicht der Nullvektor ist.

QQ 22

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Was ist die stärkste Aussage, die man daraus folgern kann? (Die Aussagen sind nicht nach 'Starkheit' geordnet.)

A Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $D_x f \neq 0$.

B Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\det D_x f \neq 0$.

C Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ hat $D_x f$ keinen Nulleintrag.

D Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ hat $D_x f$ eine Spalte, die nicht der Nullvektor ist.

Lösung B A, B, D sind alle richtig, da $D_x f$ invertierbar sein muss und damit die Determinante nicht Null sein darf (Es gilt $B \implies D$ und $B \implies A$, also ist davon B die stärkste Aussage.) C ist falsch – z.B. $f = \mathrm{Id}_n$ hat $D_x f = \mathrm{Id}_n$.

QQ 23

Sei $f : \mathbb{R}^n \to f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n$ glatt. Was reicht <u>nicht</u> um zu folgern, dass f ein Diffeomorphismus ist?

A Bijektiv und Umkehrabbildung differenzierbar.

B Bijektiv und $D_x f$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$ invertierbar.

C $D_x f$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$ invertierbar.

D Bijektiv und $\det D_x f \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

QQ 23

Sei $f: \mathbb{R}^n \to f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n$ glatt. Was reicht nicht um zu folgern, dass f ein Diffeomorphismus ist?

A Bijektiv und Umkehrabbildung differenzierbar.

B Bijektiv und $D_x f$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$ invertierbar.

C $D_x f$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$ invertierbar.

D Bijektiv und $\det D_x f \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Lösung C da f dann nicht injektiv sein muss. Der Rest reicht, da der Satz über inverse Funktionen gibt, dass f dann ein lokaler Diffeomorphismus ist. Mit der Bijektivität folgt global Diffeomorphismus.

QQ 24

Sei $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Wie viele der folgenden Integrale kann man ausrechnen um den Flächeninhalt von A zu erhalten?

(i) $\int_A \mathrm{dvol}$

(ii) $\int_{[-1,1]^2} 1_A \mathrm{dvol}$

(iii) $\int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx$

(iv) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$

A 1 B 2 C 3 D 4

QQ 24

Sei $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Wie viele der folgenden Integrale kann man ausrechnen um den Flächeninhalt von A zu erhalten?

(i) $\int_A \mathrm{dvol}$

(ii) $\int_{[-1,1]^2} 1_A \mathrm{dvol}$

(iii) $\int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx$

(iv) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx$

A 1 B 2 C 3 D 4

Lösung D: (ii) Definition, (i) ist als (ii) definiert, (iii) Fubini, (iv) Flächeninhalt unterm Funktionsgraph

QQ 25

In der Definition einer Untermannigfaltigkeit M wird für die lokale Parametrisierung F um $p = F(u) \in M$ verlangt, dass $D_u F$ maximalen Rang hat. Was bedeutet diese Bedingung anschaulich im Fall einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ <u>nicht</u>?

A In jedem Punkt von M gibt es eine Tangentialebene.

B Jeder Tangentialraum T_pM hat die gleiche Dimension.

C Alle Tangentialräume T_pM sind gleich.

QQ 25

In der Definition einer Untermannigfaltigkeit M wird für die lokale Parametrisierung F um $p = F(u) \in M$ verlangt, dass D_uF maximalen Rang hat. Was bedeutet diese Bedingung anschaulich im Fall einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ <u>nicht</u>?

- A In jedem Punkt von M gibt es eine Tangentialebene.
- B Jeder Tangentialraum T_pM hat die gleiche Dimension.
- C Alle Tangentialräume T_pM sind gleich.

Lösung C: z.B. bei der Sphäre falsch.

QQ 26

Sei $A = [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$. Welche Ausssage stimmt nicht?

A $\operatorname{Inn} A = \varnothing$

B $\overline{A} = [0,1]^2$

C $\partial A = [0,1]^2$

D A ist kompakt

QQ 26

Sei $A = [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$. Welche Ausssage stimmt <u>nicht</u>?

- A $\operatorname{Inn} A = \varnothing$
- B $\overline{A} = [0,1]^2$
- C $\partial A = [0,1]^2$
- D A ist kompakt

Lösung D: Es gibt Folgen $(a_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1], 0) \to (a \notin \mathbb{Q}, 0)$.

QQ 27

Seien $A \subsetneq B \subset Q \subset \mathbb{R}^n$, Q ein Quader. Seien $1_A, 1_B \colon Q \to \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $f \colon Q \to \mathbb{R}$ stetig mit $f > 0$. Was ist die stärkste Folgerung?

A $\int_A f \,\mathrm{dvol} \leq \int_B f \,\mathrm{dvol}$

B $\int_A f \,\mathrm{dvol} < \int_B f \,\mathrm{dvol}$

C nichts davon, da $f|_A$ und $f|_B$ nicht integrierbar sein müssen.

QQ 27

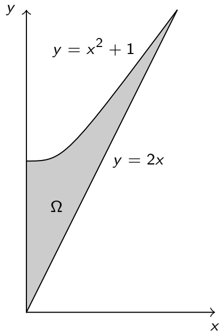
Seien $A \subsetneq B \subset Q \subset \mathbb{R}^n$, Q ein Quader. Seien $1_A, 1_B \colon Q \to \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $f\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig mit $f > 0$. Was ist die stärkste Folgerung?

- A $\int_A f \,\mathrm{dvol} \leq \int_B f \,\mathrm{dvol}$
- B $\int_A f \,\mathrm{dvol} < \int_B f \,\mathrm{dvol}$
- C nichts davon, da $f|_A$ und $f|_B$ nicht integrierbar sein müssen.

Lösung A: $f \cdot 1_A$ ist integrierbar ('stetig· integrierbar') – genau so $f \cdot 1_B$. B stimmt nicht, z.B. $f = 1$, $A = (0, 1]$ und $B = [0, 1]$ gibt Gleichheit. (Allgemein: Wenn $B \setminus A$ Volumen Null hat, trägt es f auf dieser Teilmenge nicht zum Integral bei.)

QQ 28

Welche Integrale berechnen den Flächeninhalt von Ω?



A $\int_0^1 \left(\int_{2x}^{x^2+1} dy \right) dx$ und

$\int_0^2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}y} dx + \int_{\sqrt{y-1}}^{\frac{1}{2}x} dx \right) dy$

B $\int_0^1 \left(\int_{2x}^{x^2+1} dy \right) dx$ und

$\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{2}y} dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{y-1}}^{\frac{1}{2}y} dx \right) dy$

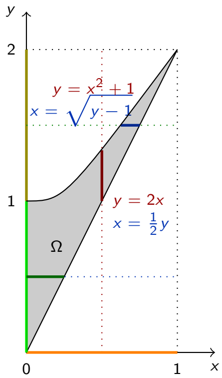
C $\int_0^1 \left(\int_{2x}^{x^2+1} dy \right) dx$ und $\int_0^1 \left(\int_{2x}^{x^2+1} dx \right) dy$

D $\int_0^2 \left(\int_{2x}^{x^2+1} dy \right) dx$ und

$\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{2}y} dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{y-1}}^{\frac{1}{2}y} dx \right) dy$

QQ 28

Welche Integrale berechnen den Flächeninhalt von Ω?



A $\int_0^1 \left(\int_{2x}^{x^2+1} dy\right) dx$ und

$\int_0^2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}y} dx + \int_{\sqrt{y-1}}^{\frac{1}{2}x} dx\right) dy$

B $\int_0^1 \left(\int_{2x}^{x^2+1} dy\right) dx$ und

$\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{2}y} dx\right) dy + \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{y-1}}^{\frac{1}{2}y} dx\right) dy$

C $\int_0^1 \left(\int_{2x}^{x^2+1} dy\right) dx$ und $\int_0^1 \left(\int_{2x}^{x^2+1} dx\right) dy$

D $\int_0^2 \left(\int_{2x}^{x^2+1} dy\right) dx$ und

$\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{2}y} dx\right) dy + \int_1^2 \left(\int_{\sqrt{y-1}}^{\frac{1}{2}y} dx\right) dy$

QQ 29

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f\colon I \to I$ differenzierbar.
Woraus kann man nicht folgern, dass f genau einen Fixpunkt hat?

A f ist eine Kontraktion.

B $\sup_{x \in I} |f'(x)| < 1$.

C f ist Lipschitz.

QQ 29

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f\colon I \to I$ differenzierbar.
Woraus kann man nicht folgern, dass f genau einen Fixpunkt hat?

- A f ist eine Kontraktion.
- B $\sup_{x \in I} |f'(x)| < 1$.
- C f ist Lipschitz.

Lösung C: Aus B folgt A (Mittelwertsatz aus Ana1), A ist Banachscher Fixpunktsatz, Gegenbeispiel zu C:
$f\colon I = [0, 1] \to I$, $x \mapsto x^2$ ist Lipschitz mit zwei Fixpunkten.

QQ 30

Sei $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))^T$. Das Bild von γ ist der Einheitskreis. Die Länge von γ ist $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = 4\pi$, also nicht der Umfang des Kreises. Falsch oder gar kein Problem?

- A Das Integral wurde falsch berechnet.
- B Da γ nicht injektiv ist, ist die Formel für die Länge der Kurve dann nicht gültig.
- C Die Rechnung stimmt. Die Länge von γ muss doppelt so lang sein wie der Umfang des Kreises.
- D Die Länge der Kurve γ hat mit dem Umfang des Kreises sowieso nichts zu tun.

QQ 30

Sei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))^T$. Das Bild von γ ist der Einheitskreis. Die Länge von γ ist $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = 4\pi$, also nicht der Umfang des Kreises. Falsch oder gar kein Problem?

- A Das Integral wurde falsch berechnet.
- B Da γ nicht injektiv ist, ist die Formel für die Länge der Kurve dann nicht gültig.
- C Die Rechnung stimmt. Die Länge von γ muss doppelt so lang sein wie der Umfang des Kreises.
- D Die Länge der Kurve γ hat mit dem Umfang des Kreises sowieso nichts zu tun.

Lösung C: γ läuft den Kreis zweimal durch, deshalb ist $L(\gamma)$ das Doppelte vom Kreisumfang.

QQ 31

Seien $y_i \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ für $1 \leq i \leq n$. Was stimmt?

A Sind für alle $x \in I$ die Vektoren $y_i(x)$ linear unabhängig, dann sind die y_i auch als Funktionen von I nach $\mathbb{R}^k$ linear unabhängig.

B Sind die y_i als Funktionen von I nach $\mathbb{R}^k$ linear unabhängig, dann sind auch für alle $x \in I$ die Vektoren $y_i(x)$ linear unabhängig.

C Sind für alle $x \in I$ die Vektoren $y_i(x)$ linear abhängig, dann sind die y_i auch als Funktionen von I nach $\mathbb{R}^k$ linear abhängig.

D Sind die y_i als Funktionen von I nach $\mathbb{R}^k$ linear unabhängig, muss $n \leq k$ sein.

QQ 31

Seien $y_i : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ für $1 \leq i \leq n$. Was stimmt?

A Sind für alle $x \in I$ die Vektoren $y_i(x)$ linear unabhängig, dann sind die y_i auch als Funktionen von I nach $\mathbb{R}^k$ linear unabhängig.

B Sind die y_i als Funktionen von I nach $\mathbb{R}^k$ linear unabhängig, dann sind auch für alle $x \in I$ die Vektoren $y_i(x)$ linear unabhängig.

C Sind für alle $x \in I$ die Vektoren $y_i(x)$ linear abhängig, dann sind die y_i auch als Funktionen von I nach $\mathbb{R}^k$ linear abhängig.

D Sind die y_i als Funktionen von I nach $\mathbb{R}^k$ linear unabhängig, muss $n \leq k$ sein.

Lösung A: Gegenbeispiel zu B, C und D: x und x^2 lin. unabh., aber in allen x_0 linear abhängig (da jeweils zwei reelle Zahlen).

QQ 32

Es sei $x \in \mathbb{R}$, $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Die Koordinaten auf $\mathbb{R}^2$ seien (x_1, x_2). Die partielle Ableitung von $F(g(x, y(x)), x) = 5$ nach x ist gleich:

A $(\partial_{x_1} F)(x, y) \cdot \Big((\partial_{x_1} g)(x, y) + (\partial_{x_2} g)(x, y) y'(x)\Big) + (\partial_{x_2} F)(x, y) = 0$

B $(\partial_{x_1} F)(g(x, y(x)), x) \cdot (\partial_{x_1} g)(x, y(x)) \cdot (\partial_{x_2} g)(x, y(x)) y'(x) + (\partial_{x_2} F)(g(x, y(x)), x) = 0$

C $(\partial_{x_1} F)(g(x, y(x)), x) \cdot \Big((\partial_{x_1} g)(x, y(x)) + (\partial_{x_2} g)(x, y(x)) y'(x)\Big) + (\partial_{x_2} F)(g(x, y(x)), x) = 0$

D $(\partial_{x_1} F)(g(x, y(x)), x) \cdot \Big((\partial_{x_1} g)(x, y(x)) y'(x) + (\partial_{x_2} g)(x, y(x)) y'(x)\Big) + (\partial_{x_2} F)(g(x, y(x)), x) = 0$

QQ 32

Es sei $x \in \mathbb{R}$, $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Die Koordinaten auf $\mathbb{R}^2$ seien (x_1, x_2). Die partielle Ableitung von $F(g(x, y(x)), x) = 5$ nach x ist gleich:

A $(\partial_{x_1} F)(x, y) \cdot \Big((\partial_{x_1} g)(x, y) + (\partial_{x_2} g)(x, y)y'(x)\Big) + (\partial_{x_2} F)(x, y) = 0$

B $(\partial_{x_1} F)(g(x, y(x)), x) \cdot (\partial_{x_1} g)(x, y(x)) \cdot (\partial_{x_2} g)(x, y(x))y'(x) + (\partial_{x_2} F)(g(x, y(x)), x) = 0$

C $(\partial_{x_1} F)(g(x, y(x)), x) \cdot \Big((\partial_{x_1} g)(x, y(x)) + (\partial_{x_2} g)(x, y(x))y'(x)\Big) + (\partial_{x_2} F)(g(x, y(x)), x) = 0$

D $(\partial_{x_1} F)(g(x, y(x)), x) \cdot \Big((\partial_{x_1} g)(x, y(x))y'(x) + (\partial_{x_2} g)(x, y(x))y'(x)\Big) + (\partial_{x_2} F)(g(x, y(x)), x) = 0$

Lösung C

QQ 33

$$
\begin{aligned}
y_1' &= \sin(x) y_1 + y_2 \\
y_2' &= y_1 + 2y_2
\end{aligned}
$$

Welche Aussage stimmt <u>nicht</u>?

A Die Lösung ist nahe $x = 0$ eindeutig .

B Die Menge der Lösungen ist ein zweidimensionaler Vektorraum.

C Jede Lösung (mit maximal möglichen Definitionsbereich) ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

D Das ist ein lineares System erster Ordnung.

QQ 33

$$
\begin{aligned}
y_1' &= \sin(x) y_1 + y_2 \\
y_2' &= y_1 + 2y_2
\end{aligned}
$$

Welche Aussage stimmt <u>nicht</u>?

- A Die Lösung ist nahe $x = 0$ eindeutig .
- B Die Menge der Lösungen ist ein zweidimensionaler Vektorraum.
- C Jede Lösung (mit maximal möglichen Definitionsbereich) ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
- D Das ist ein lineares System erster Ordnung.

Lösung A Lösung wird erst nach Angabe eines Anfangswertes eindeutig.

QQ 34

Was stimmt für die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x^2}$$

<u>nicht</u>?

A erster Ordnung

B linear und homogen

C Sie ist mit Trennung der Variablen lösbar.

D Sie ist exakt.

QQ 34

Was stimmt für die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x^2}$$

<u>nicht</u>?

A erster Ordnung

B linear und homogen

C Sie ist mit Trennung der Variablen lösbar.

D Sie ist exakt.

Lösung D: Für exakt müsste $\partial_x(-\frac{y}{x^2})$ gleich $\partial_y 1$ sein - stimmt aber nicht.

QQ 35

Sei $x^2 + y^3 + y = 1$. Um wieviele Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kann man sie lokal nach y auflösen?

A um alle, die die Gleichung erfüllen.

B um alle, die die Gleichung erfüllen, bis auf einen Punkt.

C um alle, die die Gleichung erfüllen, bis auf zwei Punkte.

D um keinen

QQ 35

Sei $x^2 + y^3 + y = 1$. Um wieviele Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kann man sie lokal nach y auflösen?

A um alle, die die Gleichung erfüllen.

B um alle, die die Gleichung erfüllen, bis auf einen Punkt.

C um alle, die die Gleichung erfüllen, bis auf zwei Punkte.

D um keinen

Lösung A: Satz über inverse Funktionen kann auf $f(x, y) = x^2 + y^3 + y$ angewendet werden, da $\partial_y f = 3y^2 + 1 \neq 0$ für alle Lösungen ist.

QQ 36

Was stimmt?

Die Funktion $f\colon (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mapsto x \in \mathbb{R}$ hat

A mehrere lokale Extrema.

B genau ein globales Extremum unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

C ein isoliertes lokales Extremum.

D mindestens zwei globale Extrema unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

QQ 36

Was stimmt?

Die Funktion $f\colon (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mapsto x \in \mathbb{R}$ hat

- A mehrere lokale Extrema.
- B genau ein globales Extremum unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.
- C ein isoliertes lokales Extremum.
- D mindestens zwei globale Extrema unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Lösung D: f selbst hat keine Extrema. Die Nebenbedingung ist eine kompakte Menge, darauf hat jede stetige Funktion ein Maximum und Minimum und somit mindestens ein globales Extremum. Ist f auf der Menge nicht schon konstant, gibt es min. zwei globale Extrema.