Analysis II — Ksenia Fedosova, Nadine Große — SS 21

Übungsblatt 0

Dieses Blatt wird nicht abgegeben, sondern nur in der Übung der zweiten Vorlesungswoche besprochen.

Aufgabe. Konvergieren die Folgen? Wenn ja wohin? Existieren die Grenzwerte, wenn ja wie lauten sie?

(i) $(\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})^T \in \mathbb{R}^2$

(ii) $(\frac{1}{n}, (-1)^n, 0)^T \in \mathbb{R}^3$

(iii) $\lim_{x=(x_1,x_2)\to(0,0)} (|x_1|^2 + x_2, 5x_1 + 2, 3)^T$

(iv) $\lim_{x=(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2}$

(v) $\lim_{x=(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2+x_2^2}$

Aufgabe. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass dann

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n)^T \mapsto f(x_1)$$

automatisch stetig ist. Nutzen Sie dies, um mit ihrem sonstigen Wissen über stetige Funktionen zu folgern, dass $g(x_1, x_2) = |x_1| - |x_2|$ und Polynome in mehreren Variablen stetig sind.

Aufgabe. Wir wollen den Satz vom Maximum für stetige Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beweisen. Dieser lautet:

Sei $f\colon K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann nimmt f ihr Supremum an.

Dazu nehmen wir uns den Beweis für $K = [a, b]$ und $n = 1$ aus Analysis 1:

Beweis der Ana1-Version. Sei $s := \sup\{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [a, b]\}$, falls das Supremum existiert, sonst $s := \infty$. Dann gilt in jedem Fall $f(x) \leq s$ für alle $x \in [a, b]$. Es bleibt zu zeigen, dass s wirklich das Supremum ist und angenommen wird.

Sei $x_n \in [a, b]$ eine Folge mit $f(x_n) \to s$ für $n \to \infty$. Eine solche Folge muss es geben, da s sonst nicht das Supremum von $\{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [a, b]\}$ wäre. Da x_n eine beschränkte Folge ist, gibt es nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_j$. Der Grenzwert sei M. Dann ist $M \in [a, b]$. Aus der Stetigkeit von f folgt dann $f(x_{n_j}) \to f(M)$. Also ist $s = f(M)$ (und s ist damit insbesondere endlich). □

Passen Sie den Beweis an, so dass er für allgemeines $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt funktioniert. Für die Anpassung des unterstrichenen Satzes müssen Sie noch ein Zusatzargument geben. Achten Sie darauf, wo Sie eigentlich verwenden, dass K kompakt ist.

Gibt es auch einen Satz vom Maximum für Funktionen $f\colon K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?

Aufgabe. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 2(x^2 + y^2) & \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \text{ oder } \frac{y}{x} \in \mathbb{Q} \\ x^2 + y^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

In welchen Punkten ist f stetig (Wenn nichts dazu gesagt wird, ist $\mathbb{R}^n$ immer mit dem euklidischen Abstand gemeint)? In welchen Punkten ist f stetig, wenn wir auf $\mathbb{R}^2$ die Eisenbahnmetrik verwenden?

Eisenbahnmetrik:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{falls } x,\ y \text{ auf einer Ursprungsgeraden liegen} \\ |x| + |y| & \text{sonst} \end{cases}$$