Analysis II Ksenia Fedosova, Nadine Große
SS 21

Übungsblatt 3

Aufgabe 9 (1.5+1.5+2)**.**
(i) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y)^T \mapsto |xy|$. Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ (dort wo der Gradient existiert). Skizzieren Sie den Höhenlinienplot von f zusammen mit dem Vektorfeld $\operatorname{grad} f$.

(ii) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jeweils zweimal stetig differenzierbar. Rechnen Sie nach, dass $\operatorname{div}\operatorname{rot} V = 0$ und $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$ gilt.

(iii) (Gravitationsfeld) Sei $g\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto -\frac{x}{|x|^3}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{div} g = 0$ und $\operatorname{rot} g = 0$ gilt (Das Gravitationsfeld ist weg vom Ursprung quellen- und wirbelfrei.).

Aufgabe 10. Sei $f\colon \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{1+z}$. Schreiben Sie f als Funktion von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)^T\}$ nach $\mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie die totale Ableitung. Sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt? Wenn ja, welcher komplexen Multiplikation entspricht die totale Ableitung. Überprüfen Sie ihr Ergebnis, in dem Sie direkt die komplexe Ableitung von f berechnen.

Aufgabe 11. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und sei $f\colon U \to \mathbb{R}^\ell$ partiell differenzierbar. Seien die partiellen Ableitungen von f beschränkt, d.h. für alle $i = 1, \ldots, k$ ist $\sup_{x\in U} |\partial_i f(x)| < \infty$. Zeigen Sie, dass dann f stetig ist.

Aufgabe 12 (2.5+2.5)**.**
(i) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima/Minima und Sattelpunkte von

$$f\colon (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{x^4}{2} + 2y^2 - 2xy - 2yz + z^2.$$

(ii) (Lineare Regression) Gegeben seien N Punkte $(x_i, y_i)^T \in \mathbb{R}^2$. Wir suchen die Gerade $g\colon x \mapsto mx + n$ ($m, n \in \mathbb{R}$), so dass die Summe der Abstandsquadrate $y_i - g(x_i)$ minimal ist. D.h. wir wollen $F(m,n) := \sum_{i=1}^N |y_i - g(x_i)|^2$ minimieren. Bestimmen Sie g derart, dass diese Summe minimal wird. Begründen Sie, dass es sich dabei wirklich um ein Minimum handelt.

Zur linearen Regression[1] - das ist wichtig und wird sehr oft verwendet! Das ist die Grundidee für das Standardverfahren zur Schätzung des (linearen) funktionalen Zusammenhangs $y = f(x)$ bei gegebener Menge von Meßwerten.

Abgabe am Mittwoch 12.05.21 bis 14 Uhr

[1] Wir rechnen hier nur die lineare Einfachregression – https://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Einfachregression