Übungsblatt 4

Aufgabe 13. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$, $D_p f = 0$ und $\mathrm{Hess}_0(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Außerdem sei $\left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}(p) \right| < \frac{3}{8\sqrt{2}}$ für alle $p \in \overline{B_2(0)} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 2\}$ und $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$. Zeigen Sie, dass es ein $p \in \overline{B_2(0)}$ mit $f(p) < -1$ gibt.

Aufgabe 14 (2+2+1)**.** (i) Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn es ein $c > 0$ mit $|Ax| \geq c|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gibt.

Hinweis: Es gibt verschiedene Möglichkeiten das zu beweisen (eher lin.Alg. oder eher Analysis) - ein analytischer Beweis funktioniert ähnlich, wie der Beweis von Lemma 1.6.4.

(ii) Sei $f\colon K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so dass $D_p f$ für alle $p \in K$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass es dann ein $c > 0$ gibt, so dass $|D_p f(v)| \geq c|v|$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und alle $p \in K$ gilt.

(iii) Gilt (ii) auch, wenn K nicht unbedingt kompakt sein muss? Begründen Sie.

Aufgabe 15. Sei[1]

$$f\colon U := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 |\ x > 0\} \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y)^T \mapsto (\cosh x\, \cos y, \sinh x\, \sin y)^T.$$

Zeigen Sie, dass $f|_{U_1}\colon U_1 \to f(U_1)$ mit $U_1 := \{(x, y)^T \mid x > 0, 0 < y < 2\pi\}$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist und bestimmen Sie $f(U_1)$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass es für alle $p \in U$ eine offene Umgebung $\hat{U}$ gibt, so dass $f\colon \hat{U} \to f(\hat{U})$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist. Allerdings kann $f\colon U \to f(U)$ selbst kein Diffeomorphismus sein (Warum nicht?). Um zu sehen, dass $f\colon U_1 \to f(U_1)$ ein Diffeomorphismus ist, überlegen Sie sich zunächst die Injektivität. Dazu hilft es die Bilder von $t \mapsto f(x, t)$ und $t \mapsto f(t, y)$ für verschiedene x und y Werte zu skizzieren (Diese Kurven sollten ineinandergeschachtelte Ellipsen und Hyperbeln sein – s.nächste Seite zum Kurzüberblick zu Ellipsen und Hyperbeln.).

Aufgabe 16 (Laplace-Operator in Polarkoordinaten)**.** Sei

$$g\colon (r, \phi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \mapsto (x, y)^T = (r \cos\phi, r \sin\phi)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)^T \mid x \geq 0\}.$$

Das ist ein Diffeomorphismus, vgl. Bsp. 1.7.15. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Berechnen Sie $D_p(f \circ g)$ und die zweiten partiellen Ableitungen von $f \circ g$. Folgern Sie, dass Δ auf Funktionen h, die in Polarkoordinaten gegeben sind, wirkt als[2]

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2}.$$

Abgabe am Mittwoch 19.05.21 bis 14 Uhr

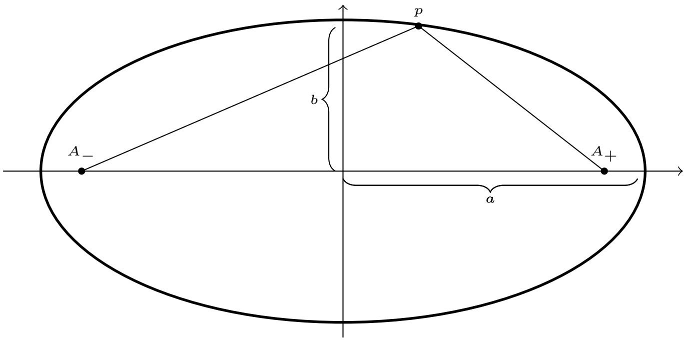
[1] Es gilt $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ und $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Definition von sinh und cosh in ÜA 22 in Ana 1. Man rechnet direkt nach, dass $(\cosh x)' = \sinh x$ und $(\sinh x)' = \cosh x$ gilt.

[2] $\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial r}$

Kurzüberblick zu Ellipsen und Hyperbeln

Ellipsengleichung in 'Normalform':

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$$



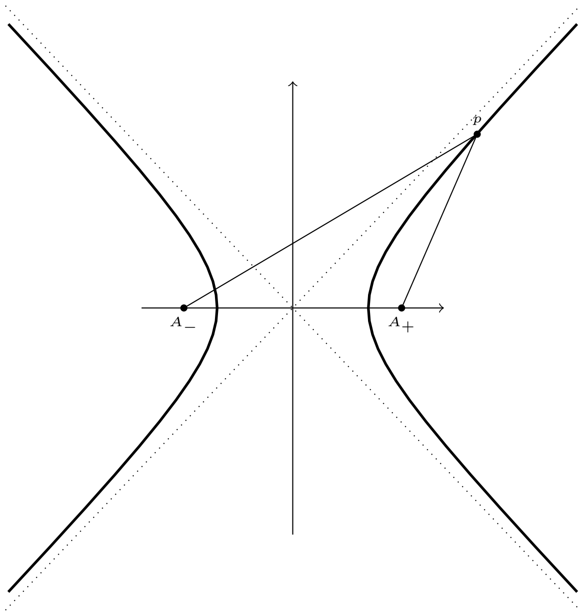
Hier sind $A_\pm = (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ die *Brennpunkte* der Ellipse.
Anschaulich ist die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gleich

$$\{\text{alle Punkte } p\text{, deren Summe der Abstände zu den Brennpunkten } A_\pm\text{, gleich } 2a \text{ ist}\}.$$

Das ist die sogenannte Gärtnerkonstruktion der Ellipse, `https://de.wikipedia.org/wiki/Ellipse#G%C3%A4rtnerkonstruktion`.

Hyperbelgleichung in 'Normalform':

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$



Hier sind $A_\pm = (\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ die *Brennpunkte* der Hyperbel.

Die Asymptoten der Hyperbel (gepunktete Geraden im Bild) sind $x \mapsto \pm\frac{b}{a}x$.
Anschaulich ist die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gleich

$$\left\{\text{alle Punkte } p\text{, mit } \Big| |pA_+| - |pA_-| \Big| = 2a\right\}.$$