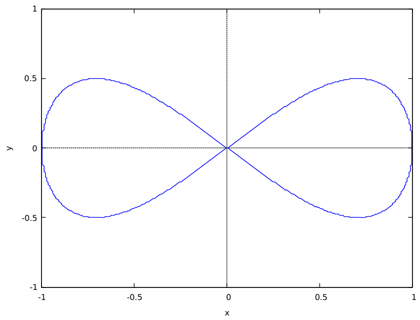
Analysis II Ksenia Fedosova, Nadine Große
SS 21

Übungsblatt 5

Aufgabe 17. Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$. Die Lösungsmenge von $f(x,y) = 0$ ist eine *Lemniskate/ figure-eight Kurve.*



Bestimmen Sie alle $(x,y) \in f^{-1}(0)$, so dass Sie den Satz über implizite Funktionen anwenden können, um zu sehen, dass $f(x,y) = 0$ a) nach $y = y(x)$ und b) nach $x = x(y)$ auflösbar ist. Bestimmen Sie in diesen Punkten a) $y'(x)$ und b) $x'(y)$.

Argumentieren Sie mit Hilfe des Bildes, dass für alle verbleibenden Punkte mit $f(x,y) = 0$ wirklich nicht nach der betreffenden Variable auflösbar sein kann.

Aufgabe 18 (2.5+2.5)**.** Wir betrachten das folgende Gleichungssystem im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} -e^x + y + x + z - 1 &= 0 \\ ye^{-z} - e^{-1} &= 0. \end{aligned}$$

(i) Sei $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung des Gleichungssystems. Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung U von x_0 in $\mathbb{R}$ und stetig differenzierbare Funtkionen $g, h\colon U \to \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = y_0$, $h(x_0) = z_0$ und $(x, g(x), h(x))$ löst für alle $x \in U$ das Gleichungssystem.

(ii) Sei $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1)$ und g, h wie in (i). Berechnen Sie $g'(0)$ und $h'(0)$.

Aufgabe 19 (2.5+2.5)**.** (i) Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und sei $f\colon u = (u_1, \ldots, u_m)^T \in U \mapsto f(u) = f(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^k$ k-mal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass der Funktionsgraph $M = \{(u, f(u)) \in \mathbb{R}^{n=m+k} \mid u \in U\}$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3ax - y^2$. Finden Sie alle Werte b, so dass $f^{-1}(b)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Skizzieren Sie $f^{-1}(b)$ für einige Werte a und b, so dass qualitativ alle 'Typen' von Mengen $f^{-1}(b)$ abgebildet werden.

Aufgabe 20 (3+2)**.** Sei $S^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = r\}$. Zeigen Sie, dass $S^n(r)$ für $r > 0$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, indem Sie

(i) genügend lokale Parametrisierungen explizit angeben und die Definition überprüfen.

(ii) das Kriterium vom regulären Wert verwenden.

Abgabe am Mittwoch 02.06.21 bis 14 Uhr