# Übungsblatt 6

**Aufgabe 21.** Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z)^T \mapsto x^2+y^2+z$. Sei $M = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2+y^2=5, y=z\}$. Zeigen Sie, dass $M$ eine $C^\infty$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, skizzieren Sie $M$ und bestimmen Sie alle lokalen Maxima/Minima und Sattelpunkte von $f|_M$.

**Aufgabe 22** (1.5+2+1.5)**.** Sei $A$ eine symmetrische reelle $n \times n$-Matrix. Wir betrachten $q\colon v \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle v, Av\rangle$.

(i) Bestimmen Sie alle lokalen Minima/Maxima/Sattelpunkte von $q$ (in Abhängigkeit der 'Definitheit' von $A$).

(ii) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von $q$ unter der Nebenbedingung $|v|^2 = 1$.

(iii) Welche der stationären Punkte sind lokale Minima/Maxima/Sattelpunkte?

Hinweis: Für die Sattelpunkte betrachten Sie geeignete $v$ nahe dem Sattelpunktskandidaten in Richtung eines Vektors zu einem kleineren/größeren Eigenwert. Setzen Sie als bekannt voraus, dass eine symmetrische reelle Matrix eine Basis aus Eigenvektoren besitzt, alle Eigenwerte reell sind und dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenvektoren orthogonal sind.

**Aufgabe 23** (2.5+2.5)**.** (i) Bestimmen Sie $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$, indem Sie das Parameterintegral

$$F(\lambda) = \int_0^1 \frac{\ln(1+\lambda^2 x)}{1+x^2}dx$$

untersuchen.

(ii) Sei $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass $\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}dx = \ln(1+\alpha)$ gilt.

Hinweis: Überprüfen Sie zuerst, dass $(\alpha, x) \in (0,\infty) \times (0,1) \mapsto \frac{x^\alpha-1}{\ln x} \in \mathbb{R}$ auf $(0,\infty)\times[0,1]$ stetig fortsetzbar ist und damit insbesondere das Integral sogar eigentlich existiert.

**Aufgabe 24** (1+1.5+1.5+1)**.** Berechnen Sie

(i) $\int_\gamma f ds$ für $f(x,y) = xy^2$ für eine Kurve $\gamma$ die einmal den Kreis um den Ursprung vom Radius 2 umrundet.

(ii) $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x,y) = \binom{2y}{1-x}$ entlang $\gamma\colon t \in [-1,2] \mapsto (t, 1-t^3)^T \in \mathbb{R}^2$

(iii) $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x,y,z) = (0, x^2, -yz)^T$ entlang einer Kurve $\gamma$, die geradlinig von $(4,-1,2)^T$ nach $(1,7,-1)^T$ verläuft.

(iv) die Länge des Funktionsgraphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

**Bonusaufgabe.** Wir wollen $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ berechnen. In Analysis 1 haben wir uns in Bsp. 4.5.33 überlegt, dass $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ existiert und endlich ist. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ existiert auch, da $\frac{\sin x}{x}$ in $x = 0$ stetig fortsetzbar ist (l'Hopital). Also ist $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ wirklich endlich. Aber wir konnten den Wert noch nicht berechnen. Das können wir nun ändern, indem wir

$$F\colon (0, \infty) \to \mathbb{R},\ \lambda \mapsto \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x} dx$$

betrachten. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie, dass $e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x}$ und $\partial_\lambda \left(e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x}\right)$ auf allen kompakten Intervallen $[a, b] \subset (0, \infty)$ gleichmäßig konvergiert.

(ii) Berechnen Sie $F'(\lambda)$ und integrieren Sie den entstandenen Ausdruck explizit. Finden Sie durch Integration dann $F(\lambda)$.

(iii) Bestimmen Sie $\lim_{\lambda \to \infty} F(\lambda)$ und damit die Integrationskonstante aus (ii)

(iv) Es bleibt zu zeigen, dass $\lim_{\lambda \to 0} F(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, also dass $\lim_{\lambda \to 0} \int_0^\infty \left(e^{-\lambda x} - 1\right) \frac{\sin x}{x} dx = 0$ ist.[1]

Hinweis Beschränken Sie dazu zunächst $\int_m^\infty \left(e^{-\lambda x} - 1\right) \frac{\sin x}{x} dx$, indem Sie $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left(e^{-\lambda x} - 1\right) \frac{\sin x}{x} dx$ für $k \in \mathbb{N}$ einzeln und unabhängig von $\lambda \in [0, 1]$ abschätzen.

---

**Abgabe am Mittwoch 09.06.21 bis 14 Uhr**

[1] Das ist der schwierige Teil, da das Integral nicht absolut konvergiert, also $\int_0^\infty \left|e^{-\lambda x} - 1\right| \frac{|\sin x|}{x} dx$ nicht endlich ist. (Deshalb haben wir die gleichmäßige Konvergenz vom Integranden von $F$ auch nur auf kompakten Intervallen von $(0, \infty)$ und nicht auf ganz $(0, \infty)$.)