# Übungsblatt 7

**Aufgabe 25.** Welches der folgenden Vektorfelder ist ein Gradientenvektorfeld?

$$(a)\quad V(x,y)=\begin{pmatrix}2xy^2+1\\2x^2y+1\end{pmatrix}\qquad (b)\quad V(x,y)=\begin{pmatrix}2xy^2+x\\2x^2y+x\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie für die Vektorfelder die Gradientenvektorfelder sind, das Potential und berechnen Sie $\int_\gamma V\cdot ds$ für $\gamma\colon [0,\pi]\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto (t^2+\cos t, t^4+(1-t)\sin t)^T$.

**Aufgabe 26.** Sei $V\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Parametrisieren Sie den Rand des Quadrates $Q=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ explizit mittels einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve $\gamma$ und zeigen Sie, dass dann

$$\int_Q \operatorname{rot} V \mathrm{dvol} = \int_\gamma V\cdot ds$$

gilt.
Hinweis: Eine 'einfache Wahl' von $\gamma$ verringert den Rechenaufwand. Dazu hilft es erst einmal die linke Seite teilweise auszurechnen.

**Aufgabe 27** (1+2+2)**.** (i) Berechnen Sie $\int_{[0,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\pi]}\sin(x+y)\mathrm{dvol}$.

(ii) Bestimmen und skizzieren Sie $\Omega\subset[0,a]\times[0,a]\subset\mathbb{R}^2$ , $a>1$, so dass $1_\Omega$ integrierbar ist (begründen Sie dann auch, warum es integrierbar ist) und das Anwenden von Fubini

$$\int_\Omega \mathrm{dvol}=\int_0^a\left(\int_0^x dy\right)dx$$

ergibt. Wenden Sie auf dieses $\Omega$ Fubini mit vertauschter Integrationsreihenfolge an und bestimmen Sie damit die Integrationsgrenzen in

$$\int_\Omega \mathrm{dvol}=\int_?^?\left(\int_?^? dx\right)dy.$$

(iii) Lösen Sie (ii) noch einmal für

$$\int_\Omega \mathrm{dvol}=\int_0^a\left(\int_{a-x}^{a^2-x^2} dy\right)dx$$

mit $\Omega\subset[0,a]\times[0,a^2]$ für $a>1$.

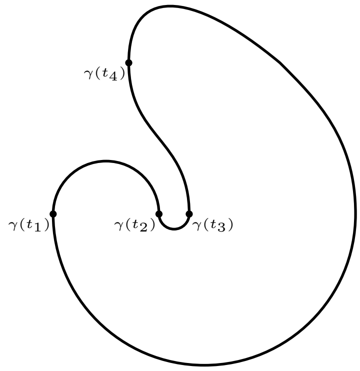


Abbildung 1: Beispiel einer Kurve $\gamma$. Wenn man annimmt, dass $|\gamma'(t)| = 1$ für alle $t$ ist, sind hier die ersten vier der $t_i$ aus (ii) eingezeichnet.

**Aufgabe 28.** Sei $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y)^T \mapsto (-y,x)^T$. Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene $C^1$-Kurve mit $|\gamma'(t)| \neq 0$ für alle $t$.[1]

Zeigen Sie, dass $\int_\gamma V \cdot ds$ gleich dem Doppelten des Flächeninhalts in der Kurve ist.

Sie können dabei wie folgt vorgehen:

(i) Überlegen Sie sich zunächst folgendes: Für eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$ sei $\gamma\colon [c,d] \to \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung, d.h. $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, wobei $y(t) = f(x(t))$ ist. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b f(x)dx = \pm \int_c^d x'(t)y(t)dt$$

gilt. Wann steht da ein + und wann ein -?

(ii) Der Einfachheit halber nehmen wir erst einmal an, dass $x'(t)$ nur für endlich viele $t$ verschwindet: $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Zeigen Sie, dass dann ist $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ ein Funktionsgraph über der $x$-Achse ist.

(iii) O.B.d.A. sei $y(t) \geq 0$. Warum kann man das annehmen? Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt unter den Kurvenstücken aus (ii) über und unter der $x$-Achse und setzen Sie daraus den gesamten Flächeninhalt zusammen. (Zeichnen Sie ins Bild am besten mal alle $\gamma(t_i)$ ein, um zu sehen, was die Bedingung $x'(t_i) = 0$ anschaulich bedeutet).

(iv) Vergleichen Sie das Ergebnis mit $\int_\gamma V \cdot ds$.

(v*) Was ändert sich in der Argumentation, wenn Sie in (ii) nicht annehmen, dass $x'(t)$ nur für endlich viele $t$ verschwindet?

---

**Abgabe am Mittwoch 16.06.21 bis 14 Uhr**

[1]Nehmen Sie an, dass klar ist, das $\gamma$ ein Inneres und ein Äußeres hat (Das ist eigentlich das Jordan Kurventheorem).