Übungsblatt 8

Aufgabe 29 (2+2+1)**.** (i) Sei $\Omega = [a, b] \times \{0\} \subset Q = [a, b] \times [-1, 1]$. Zeigen Sie, dass $1_\Omega\colon Q \to \mathbb{R}$ integrierbar ist und berechnen Sie das Integral.

(ii) Sei $\Omega = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset Q = [0, 1]$. Zeigen Sie, dass $1_\Omega\colon Q \to \mathbb{R}$ nicht integrierbar ist.

(iii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, so dass 1_Ω integrierbar ist und $\operatorname{vol}\Omega = 0$. Sei $A \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass dann auch 1_A integrierbar ist und $\operatorname{vol} A = 0$ gilt.

Aufgabe 30. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und $g\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $fg\colon Q \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.
Hinweis: Schätzen Sie $S^k(fg) - S_k(fg)$ ab unter Verwendung, dass g automatisch gleichmäßig stetig sein muss.

Aufgabe 31 (1.5+1.5+2)**.** Berechnen Sie

(i) $\int_{\overline{B_1(0)}\subset\mathbb{R}^2} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,\mathrm{dvol}$

(ii) das Volumen des Inneren des Rotationsellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

(iii) $\int_\Omega z\,\mathrm{dvol}$ mit $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

Aufgabe 32 (1.5+1.5+2)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie:

(i) Ist A abgeschlossen, dann ist $\bar{A} = A$.

(ii) Ist A kompakt, dann ist auch ∂A kompakt.

(iii) ∂A und $\bar{A}$ sind abgeschlossen.

Abgabe am Mittwoch 23.06.21 bis 14 Uhr