Übungsblatt 9

Seien $0 < r < R$. Sei $\mathbb{T}^2_{r,R} := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$.

Aufgabe 33. Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R}$ (Definition oben) eine Untermannigfaltigkeit ist, skizzieren Sie diese und bestimmen Sie das Volumen von $A := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 34. Sei

$$F \colon U := (0,2\pi) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$$
$$(\phi,\theta) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ (R + r\cos\phi)\sin\theta \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, dass F eine lokale Parametrisierung von $\mathbb{T}^2_{r,R}$ (Definition oben) ist. Bestimmen Sie $\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U)$ und das Volumen der Untermannigfaltigkeit $F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$. Argumentieren Sie, dass $\mathbb{T}^2_{r,R} \setminus F(U) \subset \mathbb{T}^2_{r,R}$ als Teilmenge der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{T}^2_{r,R}$ Volumen Null hat.[1]

Aufgabe 35. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit. Sei $F \colon U \to V$ eine lokale Parametrisierung von M um ein $p \in M$. Sei $n(q = F(x,y)) := \frac{\partial_x F(x,y) \times \partial_y F(x,y)}{|\partial_x F(x,y) \times \partial_y F(x,y)|}$.

Warum gilt $n(q) \perp T_qM$ für alle $q \in F(U)$? Rechnen Sie $\det\,(D_{(x,y)^T}F)^T(D_{(x,y)^T}F) = |\partial_x F(x,y) \times \partial_y F(x,y)|^2$ nach.

Folgern Sie, dass somit für ein Vektorfeld $V \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt

$$\int_{F(U)\subset M} \langle V, n\rangle \mathrm{dvol} = \int_{U\subset\mathbb{R}^2} \langle V(F(x,y)), \partial_x F(x,y) \times \partial_y F(x,y)\rangle \mathrm{dvol}.$$

Aufgabe 36. Sei $R, h > 0$. Wir betrachten $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2, z \in [0,h]\}$, siehe Rückseite. Der Rand von Ω ist keine C^1-Untermannigfaltigkeit ('Problemmenge' – die beiden Kreise, wo die Mantelfläche des Zylinders an Boden und Deckel stösst.). D.h. die Voraussetzungen unseres Divergenzsatzes sind dafür nicht erfüllt. Jedoch gilt der Divergenzsatz auch allgemeiner und für dieses Ω rechnen wir das für das Vektorfeld $V(x,y,z) = (x,y,0)^T$ mal direkt nach:

Berechnen Sie jeweils $\int_\Omega \operatorname{div} V \mathrm{dvol}$ und $\int_{\partial\Omega\setminus S} \langle V, n\rangle \mathrm{dvol}$, wobei S die 'Problemmenge' von oben ist ($\partial\Omega \setminus S$ ist nun eine C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$). Außerdem ist n wieder der äußere Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega \setminus S$.

Bonusaufgabe. [2] Sei $0 < r < R$. Wir ändern $\partial\Omega$ aus Aufgabe 35, indem wir unten am den Boden den Teil von $\mathbb{T}^2_{r,R-r}$ mit $z \leq 0$ und $x^2 + y^2 \geq (R-r)^2$ ankleben und das dann so auffüllen, dass der neue flache Teil des Boden ein Kreis mit Radius $R - r$ bei $z = -r$ ist. Analog beim Deckel, vgl. Bild. Dadurch entsteht eine neue kompakte Teilmenge $K_r \subset \mathbb{R}^3$ mit $\Omega \subset K_r$ und ∂K_r ist nun eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ (müssen Sie nicht beweisen). Sei $V \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Wenden Sie auf K_r den Divergenzsatz an und zeigen Sie, dass für $r \to 0$ im Limes der Divergenzsatz für Ω, also

$$\int_\Omega \operatorname{div} V \mathrm{dvol} = \int_{\partial\Omega\setminus S} \langle V, n\rangle \mathrm{dvol}$$

mit S wie in Aufgabe 36 entsteht.

[1] Es geht also um das Integral $\int_{\mathbb{T}^2_{r,R}} 1_{\mathbb{T}^2_{r,R}\setminus F(U)} \mathrm{dvol}$ für die charakteristische Funktion $1_{\mathbb{T}^2_{r,R}\setminus F(U)} \colon \mathbb{T}^2_{r,R} \to \mathbb{R}$.

[2] Nicht so schwer - Aber am besten einige der Rechnungen von oben benutzen.

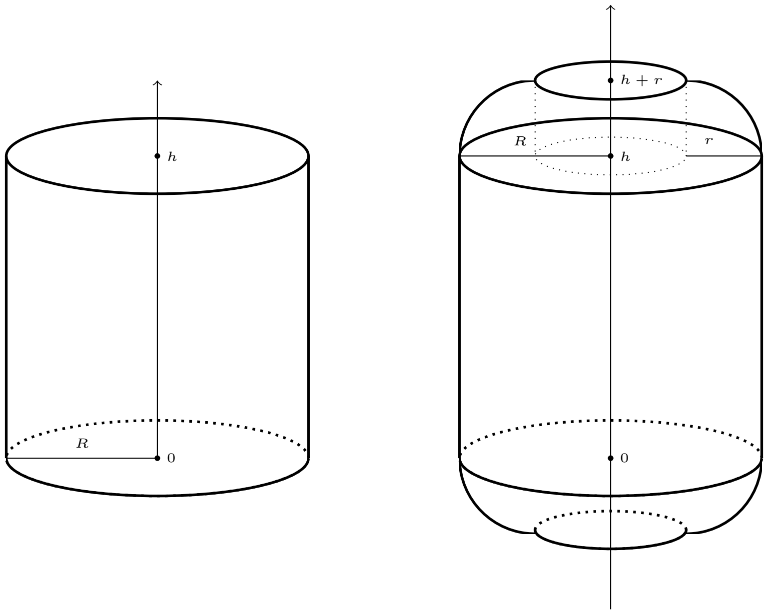

Abbildung 1: Links: Ω aus Aufgabe 36
Rechts: K_r aus der Bonusaufgabe

Abgabe am Mittwoch 30.06.21 bis 14 Uhr