
Übungsblatt 11

Aufgabe 41 (3+2).

$$y' = \cos y, \quad y(0) = 0$$

- (i) Überprüfen Sie, dass die Voraussetzungen für Picard-Lindelöf erfüllt sind. Welches Existenzintervall für die Lösung erhalten Sie aus Picard-Lindelöf. Stellen Sie die Approximationen der Picard-Iterationen y_0, \dots, y_3 auf und rechnen Sie, dort wo möglich, die Integrale aus.
- (ii) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung direkt.
Hinweis: Substitution $u = \tan \frac{y}{2}$. Außerdem ist $\cos(\arctan u) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$ (Warum?)

Aufgabe 42.

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (i) Lösen Sie diese Differentialgleichung mit Hilfe der Theorie zu lineare Systemen mit konstanten Koeffizienten.
- (ii) Benutzen Sie Picard-Iteration um die Approximationen y_0, \dots, y_3 explizit zu bestimmen.

Aufgabe 43. Lösen Sie mit der Theorie zu linearen Systemen

$$y' + \sin(x)y = \sin^3(x).$$

Aufgabe 44. Sei $\omega_0 > 0, \rho \geq 0$, Lösen Sie

$$y''(t) + 2\rho y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

und skizzieren Sie die Lösung jeweils (es treten qualitativ verschiedene Lösungen auf).¹

Abgabe am Mittwoch 13.07.21 bis 14 Uhr

¹Für $\rho = 0$ ist das die (ungedämpfte) Schwingungsgleichung. $\rho > 0$ entspricht einer gedämpften Schwingung. Hier betrachten wir nur die homogene Gleichung. Eine Inhomogenität (also ein $F(t)$ auf der rechten Seite, würde einer externen zeitabhängigen Kraft entsprechen (*erzwungene Schwingung*)).