

Übungsblatt 0

Dieses Blatt wird nicht abgegeben, sondern nur in der Übung der zweiten Vorlesungswoche besprochen.

Aufgabe. Konvergieren die Folgen? Wenn ja wohin? Existieren die Grenzwerte, wenn ja wie lauten sie?

- (i) $(\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})^T \in \mathbb{R}^2$
- (ii) $(\frac{1}{n}, (-1)^n, 0)^T \in \mathbb{R}^3$
- (iii) $\lim_{x=(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} (|x_1|^2 + x_2, 5x_1 + 2, 3)^T$
- (iv) $\lim_{x=(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}$
- (v) $\lim_{x=(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$

Aufgabe. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass dann

$$\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto f(x_1)$$

automatisch stetig ist. Nutzen Sie dies, um mit ihrem sonstigen Wissen über stetige Funktionen zu folgern, dass $g(x_1, x_2) = |x_1| - |x_2|$ und Polynome in mehreren Variablen stetig sind.

Aufgabe. Wir wollen den Satz vom Maximum für stetige Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beweisen. Dieser lautet:

Sei $f: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann nimmt f ihr Supremum an.

Dazu nehmen wir uns den Beweis für $K = [a, b]$ und $n = 1$ aus Analysis 1:

Beweis der Ana1-Version. Sei $s := \sup\{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [a, b]\}$, falls das Supremum existiert, sonst $s := \infty$. Dann gilt in jedem Fall $f(x) \leq s$ für alle $x \in [a, b]$. Es bleibt zu zeigen, dass s wirklich das Supremum ist und angenommen wird.

Sei $x_n \in [a, b]$ eine Folge mit $f(x_n) \rightarrow s$ für $n \rightarrow \infty$. Eine solche Folge muss es geben, da s sonst nicht das Supremum von $\{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [a, b]\}$ wäre. Da x_n eine beschränkte Folge ist, gibt es nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_j$. Der Grenzwert sei M . Dann ist $M \in [a, b]$. Aus der Stetigkeit von f folgt dann $f(x_{n_j}) \rightarrow f(M)$. Also ist $s = f(M)$ (und s ist damit insbesondere endlich). $\square$

Passen Sie den Beweis an, so dass er für allgemeines $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt funktioniert. Für die Anpassung des unterstrichenen Satzes müssen Sie noch ein Zusatzargument geben. Achten Sie darauf, wo Sie eigentlich verwenden, dass K kompakt ist.

Gibt es auch einen Satz vom Maximum für Funktionen $f: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$?

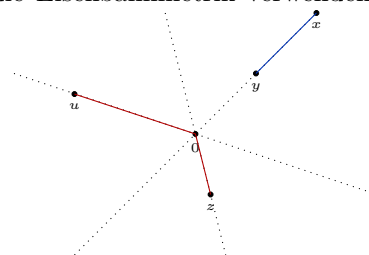
Aufgabe. Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 2(x^2 + y^2) & \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \text{ oder } \frac{y}{x} \in \mathbb{Q} \\ x^2 + y^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

In welchen Punkten ist f stetig (Wenn nichts dazu gesagt wird, ist $\mathbb{R}^n$ immer mit dem euklidischen Abstand gemeint)? In welchen Punkten ist f stetig, wenn wir auf $\mathbb{R}^2$ die Eisenbahnmetrik verwenden?

Eisenbahnmetrik:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{falls } x, y \text{ auf einer Ursprungsgeraden liegen} \\ |x| + |y| & \text{sonst} \end{cases}$$



Übungsblatt 1

Aufgabe 1. (2.5+2.5) Sei $A = (a_{ij})_{ij}$ eine reelle $\ell \times k$ -Matrix.

- (i) Wir setzen $\|A\| := \sqrt{\sum_{j=1}^k |Ae_j|^2}$, wobei e_j der j -te Standardbasisvektor im $\mathbb{R}^k$ ist. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^k$

$$|Ax| \leq \|A\| |x|$$

gilt. Ist die Ungleichung scharf, d.h. gibt es immer ein $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ mit $|Ax| = \|A\| |x|$?

- (ii) Sei nun $\|A\|_1 := \max_{ij} |a_{ij}|$. Finden Sie ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^k$ die Ungleichung

$$|Ax| \leq c \|A\|_1 |x|$$

gilt. Können Sie ein c finden, so dass diese Ungleichung scharf wird?

Aufgabe 2 (2.5+2.5+2*). (i) Zeigen Sie, dass

$$C^1([a, b], \mathbb{R}) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig differenzierbar}\}$$

zusammen mit $d_1(f, g) = \sup_{[a, b]} |f' - g'| + \sup_{[a, b]} |f - g|$ ein metrischer Raum ist.

- (ii) Zeigen Sie, dass in $(C^1([a, b], \mathbb{R}), d_1)$ jede Cauchyfolge konvergiert. Man sagt $(C^1([a, b], \mathbb{R}), d_1)$ ist *vollständig*.

Hinweis: Sei f_n eine Cauchyfolge in $(C^1([a, b], \mathbb{R}), d_1)$. Zeigen Sie zunächst, dass f_n und f'_n jeweils punktweise gegen eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie dann, dass $f_n \rightarrow f$ bzgl. d_2 aus (iii) und damit gleichmäßig konvergiert. Gleiches für $f'_n \rightarrow g$. Folgern Sie, dass dann $f' = g$ und f stetig differenzierbar ist und $f_n \rightarrow f$ in d_1 gilt.

- (iii)* $C^1([a, b], \mathbb{R})$ ist auch zusammen mit $d_2(f, g) = \sup_{[a, b]} |f - g|$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass $(C^1([a, b], \mathbb{R}), d_2)$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 3. Sei X eine Menge. Seien $d_i: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, so dass (X, d_i) jeweils ein metrischer Raum ist. Wir nennen die beiden Abstandsfunktionen *äquivalent*, wenn es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y)$$

gilt.¹

Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. Seien d_i^X bzw. d_i^Y Abstandsfunktionen auf X bzw. Y , die X bzw. Y jeweils zu einem metrischen Raum machen. Seien d_1^X und d_2^X äquivalent und auch d_1^Y und d_2^Y äquivalent. Zeigen Sie: $f: (X, d_1^X) \rightarrow (Y, d_1^Y)$ ist genau dann stetig, wenn auch $f: (X, d_2^X) \rightarrow (Y, d_2^Y)$ stetig ist.

Diese Aufgabe zusammen mit der letzten von Blatt 0 sagt uns, dass im $\mathbb{R}^2$ die euklidische Abstandsfunktion und die Eisenbahnmetrik nicht äquivalent sein können.² Das Beispiel 1.1.3 aus der Vorlesung zeigt, dass d_1 und d_2 aus Aufgabe 2 auf $C^1([a, b], \mathbb{R})$ keine äquivalenten Abstandsfunktionen sein können.³

¹Man kann zeigen, dass dies auf den Abstandsfunktionen von X eine Äquivalenzrelation ergibt.

²Auf der anderen Seite kann man zeigen, dass auf einem endlich dimensionalen Vektorraum (also z.B. $\mathbb{R}^n$) alle Abstandsfunktionen, die von einer Norm $\|\cdot\|$ kommt, d.h. $d(f, g) = \|f - g\|$, zueinander äquivalent sind. Die Eisenbahnmetrik kommt allerdings nicht von einer Norm.

³Diese beiden Abstandsfunktionen kommen zwar von einer Norm auf dem Vektorraum $C^1([a, b], \mathbb{R})$, aber dieser ist unendlich dimensional.

Warum ist es gut, sich mal mit äquivalenten Abstandsfunktionen auseinanderzusetzen? Betrachten wir folgendes Problem: Sei f Funktion in zwei Variablen, die erst einmal nichts miteinander zu tun haben. Zum Beispiel seien die zwei Variablen die Seitenlängen eines Rechtecks, und f bestimmt den Flächeninhalt. Dann würde man kleine Änderungen in den Seitenlängen vielleicht naheliegender mit der Summe des Betrages der Änderungen in den einzelnen Seitenlängen kodieren, also mit der Summe der euklidischen Abstände für die einzelnen Variablen, statt die beiden Seitenlängen zusammen als Punkt im $\mathbb{R}^2$ aufzufassen und darauf den euklidischen Abstand zu verwenden. In den Definitionen der folgenden Aufgabe wäre der erste Fall das Verwenden der Abstandsfunktion d_2 (für $n_1 = n_2 = 1$) und im zweiten Fall d_1 . Wenn wir uns jetzt fragen, ob der Flächeninhalt des Rechtecks stetig von den Seitenlängen abhängt, müssen wir natürlich dazu sagen, bzgl. welcher Abstandsfunktion wir das untersuchen wollen. Dies sollte dem Problem angepasst sein, damit am Ende auch das gemessen wird, was wir wollen. Nach der Diskussion von eben klingt eigentlich d_2 nach der besseren Wahl. Aber ohne die Diskussion würden wir wahrscheinlich alle einfach den euklidischen Abstand nehmen. Macht das einen Unterschied? Hier nicht, da beide Abstandsfunktionen äquivalent sind (Aufgabe 4) und dann nach Aufgabe 3 die Abbildung bzgl. beider Abstandsfunktionen stetig ist. Glück gehabt⁴.

Aufgabe 4. Seien $d_i: \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$d_1(x, y) = |x - y|$$

$$d_2(x = (a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m), y = (c \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}^m)) = |a - c| + |b - d|.$$

- (i) Überprüfen Sie, dass d_2 eine Abstandsfunktion auf $\mathbb{R}^{n+m}$ ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass d_1 und d_2 äquivalent sind.

Abgabe am Mittwoch 28.04.21 bis 14 Uhr

⁴In Aufgabe 4 kommen die Abstandsfunktionen beide von einer Norm. Damit wären Sie, wenn man die Fußnote der letzten Seite schon gezeigt hätte, automatisch äquivalent. Wir zeigen es hier direkt - geht auch sehr schnell.

Übungsblatt 2

Aufgabe 5 (2+ 1.5 +1.5). (i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen (in allen Punkten, in denen sie partiell differenzierbar sind):

$$f(x, y, z) = e^{xy} + \sin^2 z, \quad g(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} - z \\ xy + \ln(1 + z^2) \end{pmatrix}$$

(ii) Sei $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{|f(x)|^2}$, stetig differenzierbar ist und bestimmen Sie $D_x g$.

(iii) Sei $M_{\mathbb{R}}(n, n)$ die Menge der reellen $n \times n$ -Matrizen. Dann ist $M_{\mathbb{R}}(n, n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ (isomorph als Vektorräume). Wir betrachten $f: M_{\mathbb{R}}(n, n) \rightarrow M_{\mathbb{R}}(n, n)$, $A \mapsto AA^T$. Seien $A, H \in M_{\mathbb{R}}(n, n)$. Berechnen Sie die Richtungsableitungen $D_A f(H)$.

Aufgabe 6. (Bsp: Alle Richtungsableitungen existieren, aber die Funktion ist nicht stetig) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $f(0, 0) = 0$. Zeigen Sie, dass in $p = (0, 0)$ alle Richtungsableitungen existieren, also für alle $v \in \mathbb{R}^2$ der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + hv) - f(p)}{h}$$

existiert. Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ nicht stetig (und damit nicht differenzierbar) ist. Kann man auch schon direkt an den berechneten Richtungsableitungen sehen, dass diese nicht von einer totalen Ableitung kommen können? Wenn ja, wie?

Aufgabe 7. Seien $f, g: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ in $p \in U$ differenzierbar Funktionen mit $g(q) \neq 0$ für alle $q \in U$. Zeigen Sie, dass dann $\frac{f}{g}: U \rightarrow \mathbb{R}$ in p differenzierbar ist mit

$$D_p \frac{f}{g} = \frac{1}{g(p)^2} (g(p)D_p f - f(p)D_p g).$$

Aufgabe 8. Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:

Sei $f: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ eine Funktion und $p \in U$. Dann ist f genau dann in p differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $A_p: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ und eine Funktion $r: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, welche in p stetig ist, gibt mit $r(p) = 0$ und

$$f(x) = f(p) + A_p(x - p) + |x - p|r(x)$$

Insbesondere ist dann $A_p = D_p f$.

Bonusaufgabe (3*). Stetig differenzierbar haben wir definiert als differenzierbar und mit stetigen partiellen Ableitungen. In Analysis 1 hieß stetig differenzierbar, dass $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und die Ableitung wieder stetig ist. Da in diesem Fall f' einfach die einzige partielle Ableitung ist, ist der 'stetig differenzierbar'-Begriff in mehreren Variablen auch wirklich eine Verallgemeinerung.

Ist nun $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ differenzierbar, dann kann man aber auch die Ableitungen in jedem Punkt zu einer Abbildung $Dg: \mathbb{R}^k \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$, $p \mapsto D_p g$, zusammenfassen. Hier soll $\text{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$ die Menge der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^\ell$ sein. Das heißt statt der Definition von stetig differenzierbar von oben, kann man auch alternativ fordern, dass Dg stetig ist (in geeignetem Sinne – d.h. für eine geeignete Abstandsfunktion auf $\text{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$).

Wählen Sie eine geeignete Abstandsfunktion auf $\text{Lin}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^\ell)$ und zeigen Sie damit: g ist genau dann stetig differenzierbar (Definition wie in der Vorlesung), wenn g differenzierbar ist und Dg stetig ist.

Abgabe am Mittwoch 05.05.21 bis 14 Uhr

Übungsblatt 3

Aufgabe 9 (1.5+1.5+2). (i) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y)^T \mapsto |xy|$. Berechnen Sie $\text{grad } f$ (dort wo der Gradient existiert). Skizzieren Sie den Höhenlinienplot von f zusammen mit dem Vektorfeld $\text{grad } f$.

(ii) Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jeweils zweimal stetig differenzierbar. Rechnen Sie nach, dass $\text{div rot } V = 0$ und $\text{rot grad } f = 0$ gilt.

(iii) (Gravitationsfeld) Sei $g: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto -\frac{x}{|x|^3}$. Zeigen Sie, dass $\text{div } g = 0$ und $\text{rot } g = 0$ gilt (Das Gravitationsfeld ist weg vom Ursprung quellen- und wirbelfrei.).

Aufgabe 10. Sei $f: \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{1+z}$. Schreiben Sie f als Funktion von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0)^T\}$ nach $\mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie die totale Ableitung. Sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt? Wenn ja, welcher komplexen Multiplikation entspricht die totale Ableitung. Überprüfen Sie ihr Ergebnis, indem Sie direkt die komplexe Ableitung von f berechnen.

Aufgabe 11. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ partiell differenzierbar. Seien die partiellen Ableitungen von f beschränkt, d.h. für alle $i = 1, \dots, k$ ist $\sup_{x \in U} |\partial_i f(x)| < \infty$. Zeigen Sie, dass dann f stetig ist.

Aufgabe 12 (2.5+2.5). (i) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima/Minima und Sattelpunkte von

$$f: (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{x^4}{2} + 2y^2 - 2xy - 2yz + z^2.$$

(ii) (Lineare Regression) Gegeben seien N Punkte $(x_i, y_i)^T \in \mathbb{R}^2$. Wir suchen die Gerade $g: x \mapsto mx + n$ ($m, n \in \mathbb{R}$), so dass die Summe der Abstandsquadrate $y_i - g(x_i)$ minimal ist. D.h. wir wollen $F(m, n) := \sum_{i=1}^N |y_i - g(x_i)|^2$ minimieren. Bestimmen Sie g derart, dass diese Summe minimal wird. Begründen Sie, dass es sich dabei wirklich um ein Minimum handelt.

Zur linearen Regression¹ - das ist wichtig und wird sehr oft verwendet! Das ist die Grundidee für das Standardverfahren zur Schätzung des (linearen) funktionalen Zusammenhangs $y = f(x)$ bei gegebener Menge von Meßwerten.

Abgabe am Mittwoch 12.05.21 bis 14 Uhr

¹Wir rechnen hier nur die lineare Einfachregression – https://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Einfachregression

Übungsblatt 4

Aufgabe 13. Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$, $D_0 f = 0$ und $\text{Hess}_0(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Außerdem sei $\left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}(p) \right| < \frac{3}{8\sqrt{2}}$ für alle $p \in \overline{B_2(0)} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 2\}$ und $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$. Zeigen Sie, dass es ein $q \in \overline{B_2(0)}$ mit $f(q) < -1$ gibt.

Aufgabe 14 (2+2+1). (i) Sei A eine reelle $n \times n$ -Matrix. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn es ein $c > 0$ mit $|Ax| \geq c|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gibt.

Hinweis: Es gibt verschiedene Möglichkeiten das zu beweisen (eher lin. Alg. oder eher Analysis) - ein analytischer Beweis funktioniert ähnlich, wie der Beweis von Lemma 1.6.4.

(ii) Sei $f: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so dass $D_p f$ für alle $p \in K$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass es dann ein $c > 0$ gibt, so dass $|D_p f(v)| \geq c|v|$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und alle $p \in K$ gilt.

(iii) Gilt (ii) auch, wenn K nicht unbedingt kompakt sein muss? Begründen Sie.

Aufgabe 15. Sei¹

$$f: U := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y)^T \mapsto (\cosh x \cos y, \sinh x \sin y)^T.$$

Zeigen Sie, dass $f|_{U_1}: U_1 \rightarrow f(U_1)$ mit $U_1 := \{(x, y)^T \mid x > 0, 0 < y < 2\pi\}$ ein C^∞ -Diffeomorphismus ist und bestimmen Sie $f(U_1)$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass es für alle $p \in U$ eine offene Umgebung $\hat{U}$ gibt, so dass $f: \hat{U} \rightarrow f(\hat{U})$ ein C^∞ -Diffeomorphismus ist. Allerdings kann $f: U \rightarrow f(U)$ selbst kein Diffeomorphismus sein (Warum nicht?). Um zu sehen, dass $f: U_1 \rightarrow f(U_1)$ ein Diffeomorphismus ist, überlegen Sie sich zunächst die Injektivität. Dazu hilft es die Bilder von $t \mapsto f(x, t)$ und $t \mapsto f(t, y)$ für verschiedene x und y Werte zu skizzieren (Diese Kurven sollten ineinandergeschachtelte Ellipsen und Hyperbeln sein – s. nächste Seite zum Kurzüberblick zu Ellipsen und Hyperbeln.).

Aufgabe 16 (Laplace-Operator in Polarkoordinaten). Sei

$$g: (r, \phi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \mapsto (x, y)^T = (r \cos \phi, r \sin \phi)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)^T \mid x \geq 0\}.$$

Das ist ein Diffeomorphismus, vgl. Bsp. 1.7.15. Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Berechnen Sie $D_p(f \circ g)$ und die zweiten partiellen Ableitungen von $f \circ g$. Folgern Sie, dass Δ auf Funktionen h , die in Polarkoordinaten gegeben sind, wirkt als²

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2}.$$

Abgabe am Mittwoch 19.05.21 bis 14 Uhr

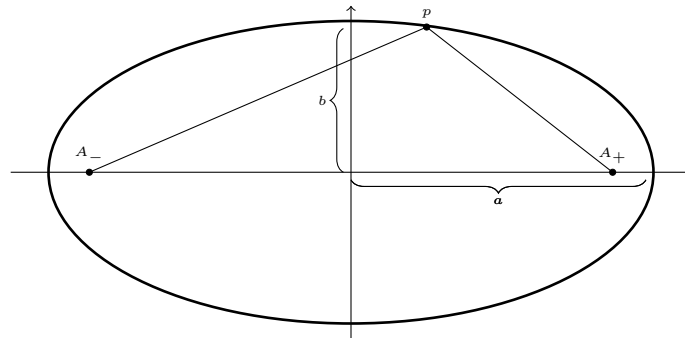
¹Es gilt $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ und $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Definition von $\sinh$ und $\cosh$ in ÜA 22 in Ana 1. Man rechnet direkt nach, dass $(\cosh x)' = \sinh x$ und $(\sinh x)' = \cosh x$ gilt.

² $\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial r}$

Kurzüberblick zu Ellipsen und Hyperbeln

Ellipsengleichung in 'Normalform':

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$$



Hier sind $A_{\pm} = (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ die *Brennpunkte* der Ellipse.

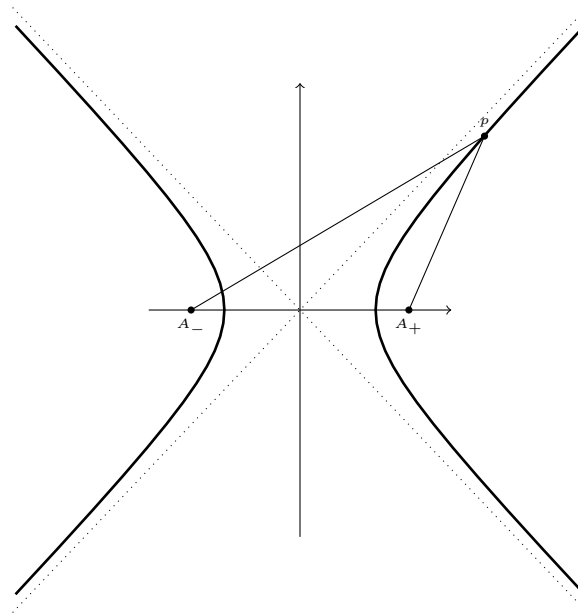
Anschaulich ist die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gleich

{alle Punkte p , deren Summe der Abstände zu den Brennpunkten $A_{\pm}$, gleich $2a$ ist}.

Das ist die sogenannte Gärtnerkonstruktion der Ellipse, <https://de.wikipedia.org/wiki/Ellipse#G%C3%A4rtnerkonstruktion>.

Hyperbelgleichung in 'Normalform':

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$



Hier sind $A_{\pm} = (\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ die *Brennpunkte* der Hyperbel.

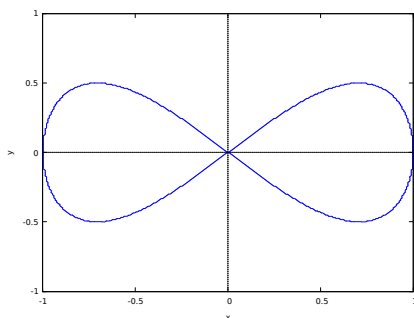
Die Asymptoten der Hyperbel (gepunktete Geraden im Bild) sind $x \mapsto \pm \frac{b}{a}x$.

Anschaulich ist die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gleich

$$\left\{ \text{alle Punkte } p, \text{ mit } \left| |pA_+| - |pA_-| \right| = 2a \right\}.$$

Übungsblatt 5

Aufgabe 17. Wir betrachten $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$. Die Lösungsmenge von $f(x, y) = 0$ ist eine *Lemniskate/ figure-eight Kurve*.



Bestimmen Sie alle $(x, y) \in f^{-1}(0)$, so dass Sie den Satz über implizite Funktionen anwenden können, um zu sehen, dass $f(x, y) = 0$ a) nach $y = y(x)$ und b) nach $x = x(y)$ auflösbar ist. Bestimmen Sie in diesen Punkten a) $y'(x)$ und b) $x'(y)$.

Argumentieren Sie mit Hilfe des Bildes, dass für alle verbleibenden Punkte mit $f(x, y) = 0$ wirklich nicht nach der betreffenden Variable auflösbar sein kann.

Aufgabe 18 (2.5+2.5). Wir betrachten das folgende Gleichungssystem im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} -e^x + y + x + z - 1 &= 0 \\ ye^{-z} - e^{-1} &= 0. \end{aligned}$$

- (i) Sei $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung des Gleichungssystems. Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung U von x_0 in $\mathbb{R}$ und stetig differenzierbare Funktionen $g, h: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x_0) = y_0$, $h(x_0) = z_0$ und $(x, g(x), h(x))$ löst für alle $x \in U$ das Gleichungssystem.
- (ii) Sei $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1)$ und g, h wie in (i). Berechnen Sie $g'(0)$ und $h'(0)$.

Aufgabe 19 (2.5+2.5). (i) Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und sei $f: u = (u_1, \dots, u_m)^T \in U \mapsto f(u) = f(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^k$ k -mal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass der Funktionsgraph $M = \{(u, f(u)) \in \mathbb{R}^{n=m+k} \mid u \in U\}$ eine C^k -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist.

- (ii) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 - 3ax - y^2$. Finden Sie alle Werte b , so dass $f^{-1}(b)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Skizzieren Sie $f^{-1}(b)$ für einige Werte a und b , so dass qualitativ alle 'Typen' von Mengen $f^{-1}(b)$ abgebildet werden.

Aufgabe 20 (3+2). Sei $S^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = r\}$. Zeigen Sie, dass $S^n(r)$ für $r > 0$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, indem Sie

- (i) genügend lokale Parametrisierungen explizit angeben und die Definition überprüfen.
- (ii) das Kriterium vom regulären Wert verwenden.

Abgabe am Mittwoch 02.06.21 bis 14 Uhr

Übungsblatt 6

Aufgabe 21. Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z)^T \mapsto x^2 + y^2 + z$. Sei $M = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 = 5, y = z\}$. Zeigen Sie, dass M eine C^∞ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, skizzieren Sie M und bestimmen Sie alle lokalen Maxima/Minima und Sattelpunkte von $f|_M$.

Aufgabe 22 (1.5+2+1.5). Sei A eine symmetrische reelle $n \times n$ -Matrix. Wir betrachten $q: v \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle v, Av \rangle$.

- (i) Bestimmen Sie alle lokalen Minima/Maxima/Sattelpunkte von q (in Abhängigkeit der 'Definitheit' von A).
- (ii) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von q unter der Nebenbedingung $|v|^2 = 1$.
- (iii) Welche der stationären Punkte sind lokale Minima/Maxima/Sattelpunkte?

Hinweis: Für die Sattelpunkte betrachten Sie geeignete v nahe dem Sattelpunktskandidaten in Richtung eines Vektors zu einem kleineren/größeren Eigenwert. Setzen Sie als bekannt voraus, dass eine symmetrische reelle Matrix eine Basis aus Eigenvektoren besitzt, alle Eigenwerte reell sind und dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenvektoren orthogonal sind.

Aufgabe 23 (2.5+2.5). (i) Bestimmen Sie $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$, indem Sie das Parameterintegral

$$F(\lambda) = \int_0^1 \frac{\ln(1 + \lambda^2 x)}{1 + x^2} dx$$

untersuchen.

- (ii) Sei $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass $\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx = \ln(1 + \alpha)$ gilt.

Hinweis: Überprüfen Sie zuerst, dass $(\alpha, x) \in (0, \infty) \times (0, 1) \mapsto \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} \in \mathbb{R}$ auf $(0, \infty) \times [0, 1]$ stetig fortsetzbar ist und damit insbesondere das Integral sogar eigentlich existiert.

Aufgabe 24 (1+1.5+1.5+1). Berechnen Sie

- (i) $\int_\gamma f ds$ für $f(x, y) = xy^2$ für eine Kurve γ die einmal den Kreis um den Ursprung vom Radius 2 umrundet.
- (ii) $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x, y) = \begin{pmatrix} 2y \\ 1-x \end{pmatrix}$ entlang $\gamma: t \in [-1, 2] \mapsto (t, 1-t^3)^T \in \mathbb{R}^2$
- (iii) $\int_\gamma V \cdot ds$ für $V(x, y, z) = (0, x^2, -yz)^T$ entlang einer Kurve γ , die geradlinig von $(4, -1, 2)^T$ nach $(1, 7, -1)^T$ verläuft.
- (iv) die Länge des Funktionsgraphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Bonusaufgabe. Wir wollen $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ berechnen. In Analysis 1 haben wir uns in Bsp. 4.5.33 überlegt, dass $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ existiert und endlich ist. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ existiert auch, da $\frac{\sin x}{x}$ in $x = 0$ stetig fortsetzbar ist (l'Hopital). Also ist $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ wirklich endlich. Aber wir konnten den Wert noch nicht berechnen. Das können wir nun ändern, indem wir

$$F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \mapsto \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x} dx$$

betrachten. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- (i) Zeigen Sie, dass $e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x}$ und $\partial_\lambda \left(e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x} \right)$ auf allen kompakten Intervallen $[a, b] \subset (0, \infty)$ gleichmäßig konvergiert.
- (ii) Berechnen Sie $F'(\lambda)$ und integrieren Sie den entstandenen Ausdruck explizit. Finden Sie durch Integration dann $F(\lambda)$.
- (iii) Bestimmen Sie $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(\lambda)$ und damit die Integrationskonstante aus (ii)
- (iv) Es bleibt zu zeigen, dass $\lim_{\lambda \rightarrow 0} F(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, also dass $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^\infty (e^{-\lambda x} - 1) \frac{\sin x}{x} dx = 0$ ist.¹
Hinweis Beschränken Sie dazu zunächst $\int_m^\infty (e^{-\lambda x} - 1) \frac{\sin x}{x} dx$, indem Sie $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (e^{-\lambda x} - 1) \frac{\sin x}{x} dx$ für $k \in \mathbb{N}$ einzeln und unabhängig von $\lambda \in [0, 1]$ abschätzen.

Abgabe am Mittwoch 09.06.21 bis 14 Uhr

¹Das ist der schwierige Teil, da das Integral nicht absolut konvergiert, also $\int_0^\infty \left| e^{-\lambda x} - 1 \right| \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ nicht endlich ist. (Deshalb haben wir die gleichmäßige Konvergenz vom Integranden von F auch nur auf kompakten Intervallen von $(0, \infty)$ und nicht auf ganz $(0, \infty)$.)

Übungsblatt 7

Aufgabe 25. Welches der folgenden Vektorfelder ist ein Gradientenvektorfeld?

$$(a) \quad V(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 + 1 \\ 2x^2y + 1 \end{pmatrix} \quad (b) \quad V(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 + x \\ 2x^2y + x \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie für die Vektorfelder die Gradientenvektorfelder sind das Potential und berechnen Sie $\int_{\gamma} V \cdot ds$ für $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2 + \cos t, t^4 + (1 - t) \sin t)^T$.

Aufgabe 26. Sei $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Parametrisieren Sie den Rand des Quadrates $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ explizit mittels einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve γ , die den Rand entgegen den Uhrzeigersinn durchläuft, und zeigen Sie, dass dann

$$\int_Q \operatorname{rot} V \, d\operatorname{vol} = \int_{\gamma} V \cdot ds$$

gilt.

Hinweis: Eine 'einfache Wahl' von γ verringert den Rechenaufwand. Dazu hilft es erst einmal die linke Seite teilweise auszurechnen.

Aufgabe 27 (1+2+2). (i) Berechnen Sie $\int_{[0, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \pi]} \sin(x + y) \, d\operatorname{vol}$.

(ii) Bestimmen und skizzieren Sie $\Omega \subset [0, a] \times [0, a] \subset \mathbb{R}^2$, $a > 1$, so dass 1_{Ω} integrierbar ist (begründen Sie dann auch, warum es integrierbar ist) und das Anwenden von Fubini

$$\int_{\Omega} d\operatorname{vol} = \int_0^a \left(\int_0^x dy \right) dx$$

ergibt. Wenden Sie auf dieses Ω Fubini mit vertauschter Integrationsreihenfolge an und bestimmen Sie damit die Integrationsgrenzen in

$$\int_{\Omega} d\operatorname{vol} = \int_{?}^{?} \left(\int_{?}^{?} dx \right) dy.$$

(iii) Lösen Sie (ii) noch einmal für

$$\int_{\Omega} d\operatorname{vol} = \int_0^a \left(\int_{a-x}^{a^2-x^2} dy \right) dx$$

mit $\Omega \subset [0, a] \times [0, a^2]$ für $a > 1$.

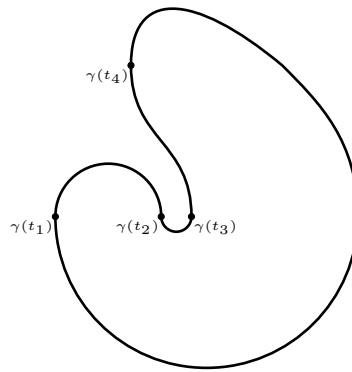


Abbildung 1: Beispiel einer Kurve γ . Wenn man annimmt, dass $|\gamma'(t)| = 1$ für alle t ist, sind hier die ersten vier der t_i aus (ii) eingezeichnet.

Aufgabe 28. Sei $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y)^T \mapsto (-y, x)^T$. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine geschlossene C^1 -Kurve mit $|\gamma'(t)| \neq 0$ für alle t .¹

Zeigen Sie, dass $\int_{\gamma} V \cdot ds$ gleich dem Doppelten des Flächeninhalts in der Kurve ist.

Sie können dabei wie folgt vorgehen:

- (i) Überlegen Sie sich zunächst folgendes: Für eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$ sei $\gamma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung, d.h. $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, wobei $y(t) = f(x(t))$ ist. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b f(x) dx = \pm \int_c^d x'(t) y(t) dt$$

gilt. Wann steht da ein $+$ und wann ein $-$?

- (ii) Der Einfachheit halber nehmen wir erst einmal an, dass $x'(t)$ nur für endlich viele t verschwindet: $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Zeigen Sie, dass dann ist $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ für alle $i = 1, \dots, n-1$ ein Funktionsgraph über der x -Achse ist.
- (iii) O.B.d.A. sei $y(t) \geq 0$. Warum kann man das annehmen? Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt unter den Kurvenstücken aus (ii) über und unter der x -Achse und setzen Sie daraus den gesamten Flächeninhalt zusammen. (Zeichnen Sie ins Bild am besten mal alle $\gamma(t_i)$ ein, um zu sehen, was die Bedingung $x'(t_i) = 0$ anschaulich bedeutet).
- (iv) Vergleichen Sie das Ergebnis mit $\int_{\gamma} V \cdot ds$.
- (v*) Was ändert sich in der Argumentation, wenn Sie in (ii) nicht annehmen, dass $x'(t)$ nur für endlich viele t verschwindet?

Abgabe am Mittwoch 16.06.21 bis 14 Uhr

¹Nehmen Sie an, dass klar ist, dass γ ein Inneres und ein Äußeres hat (Das ist eigentlich das Jordan Kurventheorem).

Übungsblatt 8

Aufgabe 29 (2+2+1). (i) Sei $\Omega = [a, b] \times \{0\} \subset Q = [a, b] \times [-1, 1]$. Zeigen Sie, dass $1_\Omega: Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist und berechnen Sie das Integral.

(ii) Sei $\Omega = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset Q = [0, 1]$. Zeigen Sie, dass $1_\Omega: Q \rightarrow \mathbb{R}$ nicht integrierbar ist.

(iii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, so dass 1_Ω integrierbar ist und $\text{vol } \Omega = 0$. Sei $A \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass dann auch 1_A integrierbar ist und $\text{vol } A = 0$ gilt.

Aufgabe 30. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und $g: Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $fg: Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist.

Hinweis: Schätzen Sie $S^k(fg) - S_k(fg)$ ab unter Verwendung, dass g automatisch gleichmäßig stetig sein muss.

Aufgabe 31 (1.5+1.5+2). Berechnen Sie

(i) $\int_{\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, \text{dvol}$

(ii) das Volumen des Inneren des Rotationsellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

(iii) $\int_\Omega z \, \text{dvol}$ mit $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

Aufgabe 32 (1.5+1.5+2). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie:

(i) Ist A abgeschlossen, dann ist $\bar{A} = A$.

(ii) Ist A kompakt, dann ist auch ∂A kompakt.

(iii) ∂A und $\bar{A}$ sind abgeschlossen.

Übungsblatt 9

Seien $0 < r < R$. Sei $\mathbb{T}_{r,R}^2 := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$.

Aufgabe 33. Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}_{r,R}^2$ (Definition oben) eine Untermannigfaltigkeit ist, skizzieren Sie diese und bestimmen Sie das Volumen von $A := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 34. Sei

$$F: U := (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\phi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r \cos \phi) \cos \theta \\ (R + r \cos \phi) \sin \theta \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, dass F eine lokale Parametrisierung von $\mathbb{T}_{r,R}^2$ (Definition oben) ist. Bestimmen Sie $\mathbb{T}_{r,R}^2 \setminus F(U)$ und das Volumen der Untermannigfaltigkeit $F(U) \subset \mathbb{T}_{r,R}^2$. Argumentieren Sie, dass $\mathbb{T}_{r,R}^2 \setminus F(U) \subset \mathbb{T}_{r,R}^2$ als Teilmenge der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{T}_{r,R}^2$ Volumen Null hat.¹

Aufgabe 35. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale C^1 -Untermannigfaltigkeit. Sei $F: U \rightarrow V$ eine lokale Parametrisierung von M um ein $p \in M$. Sei $n(q = F(x, y)) := \frac{\partial_x F(x, y) \times \partial_y F(x, y)}{|\partial_x F(x, y) \times \partial_y F(x, y)|}$.

Warum gilt $n(q) \perp T_q M$ für alle $q \in F(U)$? Rechnen Sie $\det(D_{(x,y)} F)^T (D_{(x,y)} F) = |\partial_x F(x, y) \times \partial_y F(x, y)|^2$ nach.

Folgern Sie, dass somit für ein Vektorfeld $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt

$$\int_{F(U) \subset M} \langle V, n \rangle d\text{vol} = \int_{U \subset \mathbb{R}^2} \langle V(F(x, y)), \partial_x F(x, y) \times \partial_y F(x, y) \rangle d\text{vol}.$$

Aufgabe 36. Sei $R, h > 0$. Wir betrachten $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2, z \in [0, h]\}$, siehe Rückseite. Der Rand von Ω ist keine C^1 -Untermannigfaltigkeit ('Problemmenge' – die beiden Kreise, wo die Mantelfläche des Zylinders an Boden und Deckel stösst.). D.h. die Voraussetzungen unseres Divergenzsatzes sind dafür nicht erfüllt. Jedoch gilt der Divergenzsatz auch allgemeiner und für dieses Ω rechnen wir das für das Vektorfeld $V(x, y, z) = (x, y, 0)^T$ mal direkt nach:

Berechnen Sie jeweils $\int_{\Omega} \text{div } V d\text{vol}$ und $\int_{\partial\Omega \setminus S} \langle V, n \rangle d\text{vol}$, wobei S die 'Problemmenge' von oben ist ($\partial\Omega \setminus S$ ist nun eine C^∞ -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$). Außerdem ist n wieder der äußere Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega \setminus S$.

Bonusaufgabe.² Sei $0 < r < R$. Wir ändern $\partial\Omega$ aus Aufgabe 35, indem wir unten am den Boden den Teil von $\mathbb{T}_{r,R-r}^2$ mit $z \leq 0$ und $x^2 + y^2 \geq (R-r)^2$ ankleben und das dann so auffüllen, dass der neue flache Teil des Boden ein Kreis mit Radius $R-r$ bei $z = -r$ ist. Analog beim Deckel, vgl. Bild. Dadurch entsteht eine neue kompakte Teilmenge $K_r \subset \mathbb{R}^3$ mit $\Omega \subset K_r$ und ∂K_r ist nun eine C^1 -Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ (müssen Sie nicht beweisen). Sei $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Wenden Sie auf K_r den Divergenzsatz an und zeigen Sie, dass für $r \rightarrow 0$ im Limes der Divergenzsatz für Ω , also

$$\int_{\Omega} \text{div } V d\text{vol} = \int_{\partial\Omega \setminus S} \langle V, n \rangle d\text{vol}$$

mit S wie in Aufgabe 36 entsteht.

¹Es geht also um das Integral $\int_{\mathbb{T}_{r,R}^2} 1_{\mathbb{T}_{r,R}^2 \setminus F(U)} d\text{vol}$ für die charakteristische Funktion $1_{\mathbb{T}_{r,R}^2 \setminus F(U)}: \mathbb{T}_{r,R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

²Nicht so schwer – Aber am besten einige der Rechnungen von oben benutzen.

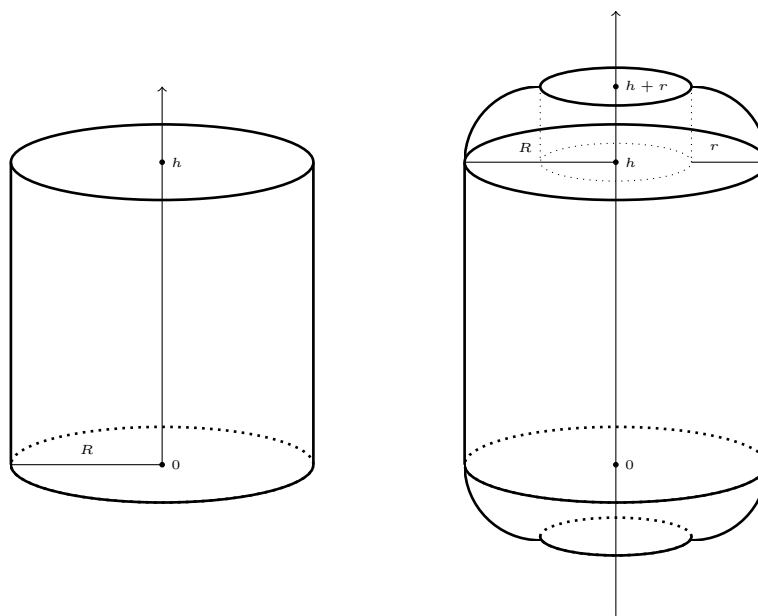


Abbildung 1: Links: Ω aus Aufgabe 36
 Rechts: K_r aus der Bonusaufgabe

Abgabe am Mittwoch 30.06.21 bis 14 Uhr

Übungsblatt 10

Aufgabe 37 (2+3). Finden Sie alle Lösungen (mit Rechenweg und Begründungen) der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen ($x \in I$ mit I ein Intervall, was den Anfangswert enthält):

(i) $y'(x) = 3x^2 e^{-y(x)}$ mit $y(0) = 1$

(ii) $y'(x) = y^2(x) \sin x$ mit $y(x_0) = y_0$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $y_0 \neq 0$.

Aufgabe 38 (2+1.5+1.5). (i) Lösen Sie $y'(x) + \frac{3y}{x} = \frac{e^x}{x^3}$ durch Finden eines geeigneten integrierenden Faktors.

(ii) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien $p: D \subset I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $q: D \subset I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten $p(x, y(x)) + q(x, y(x))y'(x) = 0$. Bestimmen Sie, wann $\mu(x+y)$ für ein $\mu: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein integrierender Faktor für diese Differentialgleichung ist?

(iii) Lösen Sie $y'(x) = (x+y)^2$ mit einem integrierenden Faktor der Form $\mu(x+y)$.

Aufgabe 39. Finden Sie die Lösungen von $xy'(x) - y(x) = x^2 e^x$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

Aufgabe 40. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0.$$

Sei eine Lösung davon $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ und habe y_0 keine Nullstellen. Finden Sie eine weitere Lösung der Differentialgleichung, indem Sie den Ansatz $y(x) = v(x)y_0(x)$ für $v: I \rightarrow \mathbb{R}$ nutzen.

Hinweis: In der dann entstehenden Differentialgleichung setzen Sie $z(x) = v'(x)$ und lösen zunächst für $z(x)$.

Übungsblatt 11

Aufgabe 41 (3+2).

$$y' = \cos y, \quad y(0) = 0$$

- (i) Überprüfen Sie, dass die Voraussetzungen für Picard-Lindelöf erfüllt sind. Welches Existenzintervall für die Lösung erhalten Sie aus Picard-Lindelöf. Stellen Sie die Approximationen der Picard-Iterationen $y_0, \dots, y_3$ auf und rechnen Sie, dort wo möglich, die Integrale aus.
- (ii) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung direkt.
Hinweis: Substitution $u = \tan \frac{y}{2}$. Außerdem ist $\cos(\arctan u) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$ (Warum?)

Aufgabe 42.

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (i) Lösen Sie diese Differentialgleichung mit Hilfe der Theorie zu lineare Systemen mit konstanten Koeffizienten.
- (ii) Benutzen Sie Picard-Iteration um die Approximationen $y_0, \dots, y_3$ explizit zu bestimmen.

Aufgabe 43. Lösen Sie mit der Theorie zu linearen Systemen

$$y' + \sin(x) y = \sin^3(x).$$

Aufgabe 44. Sei $\omega_0 > 0, \rho \geq 0$, Lösen Sie

$$y''(t) + 2\rho y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

und skizzieren Sie die Lösung jeweils (es treten qualitativ verschiedene Lösungen auf).¹

Abgabe am Mittwoch 13.07.21 bis 14 Uhr

¹Für $\rho = 0$ ist das die (ungedämpfte) Schwingungsgleichung. $\rho > 0$ entspricht einer gedämpften Schwingung. Hier betrachten wir nur die homogene Gleichung. Eine Inhomogenität (also ein $F(t)$ auf der rechten Seite, würde einer externen zeitabhängigen Kraft entsprechen (*erzwungene Schwingung*)).

Übungsblatt 12

Mit dem Blatt können Sie Integrationsmethoden üben. Es ist **nicht zur regulären Abgabe** gedacht. Falls Sie noch **nicht** 50% der möglichen Punkte erreicht haben (= 110), haben Sie hiermit noch eine Möglichkeit das eventuell zu ändern. Dann können Sie die Lösungen zu den folgenden GDGLs (mit Lösungsweg) abgeben (pro DGL 2 Punkte). Fragen Sie im Zweifel Ihren Tutor, ob das für Sie in Frage kommt.

Lösen Sie (hier ist y immer reell-wertig und u hat Werte in $\mathbb{R}^2$):

1. $y' = y(1 - y)$

2. $y' + \frac{y}{x^2} = 0$ mit $y(1) = 1$

3. $y' - 7y = 4x$ mit $y(1) = 0$

4. $y' + \sin(x)y = \sin(x) \cos(x)$

5. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

6. $y'' + 3y' + 4y = 0$ mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$

7. $x^2 + y^2 + (2 + 2xy)y' = 0$

8. $u' = Au$ mit $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ und $u(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

9. $u' = Au$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $u(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

10. $u' = Au$ mit $A = \begin{pmatrix} 2x & 7x^2 \\ 0 & x \end{pmatrix}$