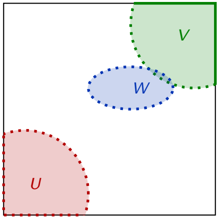
QQ 1 – Offene Mengen von Teilmengen

Wir betrachten $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ als metrischen Raum zusammen mit der euklidischen Metrik. Welche der folgenden Mengen sind offen als Teilmenge von $[0,1]^2$, welche als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$? ('Teile des Randes', die farblich hervorgehoben sind, ist Teil der Menge, ansonsten ist es gepunktet.)



QQ 2 – Konvergenzbegriffe aus Analysis 1

$f, f_k \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Was kann man bei den '?' sagen?

	$f_k \to f$ punktweise	$f_k \to f$ gleichmäßig
$I = (a, b)$ f_k stetig diff'bar $f_k' \to g$ glm	?	?
$I = [a, b]$ f_k int'bar	?	?
$I = (a, b)$ f_k uneigentl. int'bar	?	(*nur als Bonusfrage*)

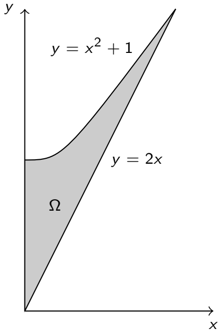
QQ 3 – Bewegungsinvarianz von $\int$ aus Analysis 2

Isometrien des euklidischen Räumen:
$\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax + b$, für $A \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$

Sei $f\colon Q(=\text{Quader im } \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ integrierbar.

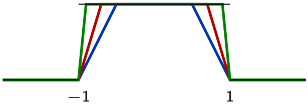
Was ist dann $\int_{\phi^{-1}(Q)} (f \circ \phi) \mathrm{dvol}$? (einmal mit Anschauung und einmal mit Transformationssatz).

QQ 4 – Integral



$$\operatorname{vol}\Omega = \int_?^? \left(\int_?^? dy \right) dx$$

QQ 5 – Gleichmäßige Konvergenz



Diese Folge konvergiert punktweise gegen $\chi_{(-1,1)}$. Für welche Teilmenge(n) $A \subset \mathbb{R}$ konvergiert sie auch gleichmäßig?

A $A = \mathbb{R}$

B $A = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

C $A = \mathbb{R} \setminus \big((-1-\epsilon, -1+\epsilon) \cup (1-\epsilon, 1+\epsilon)\big)$ für $\epsilon > 0$

D keines davon

QQ 6 – Lipschitz

Eine Funktion $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist Lipschitz, falls es ein $C > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

für alle $x, y \in U$ gibt.

Was folgt, was nicht?

A stetig

B differenzierbar

QQ7 – Lipschitz - 2

Jede <u>??</u> Abbildung $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz.

Für welche ?? ist diese Aussage wahr?

A stetige

B differenzierbare

C differenzierbare mit beschränkter Ableitung

D stetig differenzierbare

QQ8 – $\mathbb{R}$ mit diskreter Metrik

Wir betrachen auf $\mathbb{R}$ die diskrete Abstandsfunktion

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Welche Aussagen stimmen für diesen metrischen Raum, welche nicht?

A Alle Folgen konvergieren.

B Nur konstante Folgen konvergieren.

C Falls eine Folge konvergiert, so muss sie ab einem Folgenglied konstant sein.

QQ9 – $\mathbb{R}$ mit diskreter Metrik - 2

Wir betrachen auf $\mathbb{R}$ die diskrete Abstandsfunktion

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Welche Aussagen stimmen für diesen metrischen Raum, welche nicht?

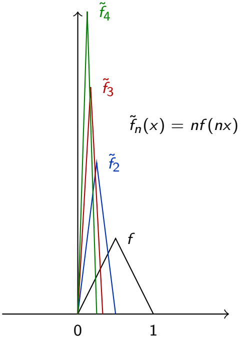
A Für alle $A \subset \mathbb{R}$ ist (A, d) vollständig.

B $(\mathbb{R}, d)$ ist nicht vollständig.

QQ10 - Wahr oder falsch?

- Jede stetige Funktion $f\colon \text{Quader} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar.
- Jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar.

QQ11– Integral und Limes



Was stimmt, was nicht?

A $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_n(x)dx$ ist konstant in n

B $(\tilde{f}_n)_n$ konvergiert punktweise (Limes sei g).

C $(\tilde{f}_n)_n$ konvergiert gleichmäßig

D Der Satz über majorisierte Konvergenz liefert $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_n(x)dx$.

QQ12 - Was kann hier prinzipiell Sinn haben, was nicht?

A $f(x) = 5$ f.ü.

B $f = [c_k] \in L^1(K)$ f.ü.

C $f \in C_c^0([a, b])$ f.ü.

D f ist f.ü. stetig.

QQ13 - R-/L-int'bar?

Sei

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \frac{1}{2n+2} \leq x \leq \frac{1}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist f Riemann- und/oder Lebesgue-integrierbar?

QQ14 - Wahr oder falsch?

Sei $f \in L^1(K)$ und

$$(\text{sign } f)(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|} & f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

A $x \in \mathbb{R} \mapsto \text{sign } x$ ist Lipschitz.

B $\text{sign } f \in L^1(K)$ für K ein Quader

C $\text{sign } f \in L^1(K)$ immer

QQ15 - $\|.\|_1$ auch Norm auf der Menge der Realisierungen?

Sei $\mathcal{L}_1(K)$ die Menge aller Funktionen $f\colon K \to \mathbb{R}$, die Realisierungen von Elementen in $L^1(K)$ sind. Wir definieren $\|f\|_1$ für eine Realisierung f eines $g \in L^1(K)$ als $\|g\|_1$.

Ist $\|.\|_1$ eine Norm auf $\mathcal{L}_1(K)$?

QQ16 - Was gilt, was nicht?

Sei $c_k \in C_c^0(K)$ für $k \in \mathbb{N}$. Sei $f\colon K \to \mathbb{R}$.

A Aus $c_k(x) \to f(x)$ für alle $x \in K$ folgt $f = [c_k] \in L^1(K)$.

B Aus $f = [c_k] \in L^1(K)$ folgt $c_k(x) \to f(x)$ für fast alle $x \in K$.

C Aus $[c_k] \in L^1(K)$ und $c_k(x) \to f(x)$ für fast alle $x \in K$, folgt $f = [c_k]$.

QQ17 - Beschränkt

Was bedeutet *beschränkt* im jeweiligen Kontext?

A $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.

B $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist beschränkt.

C $(I(f_n))_n$ ist beschränkt.

QQ18 - Wahr oder falsch?

	$\frac{1}{x^\alpha} \in L^1([0,1])$	$\frac{1}{x^\alpha} \in L^1([1,\infty))$	$\frac{1}{x^\alpha} \in L^1([0,\infty))$
$\alpha \leq 0$			
$\alpha \in (0,1)$			
$\alpha = 1$			
$\alpha > 1$			

QQ19 - Wahr oder falsch?

Sei $\phi\colon U \subset \mathbb{R} \to V \subset \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus und $f \in L^1(V)$.

Dann folgt:

A $f \circ \phi \in L^1(U)$

B $|\phi'| \cdot (f \circ \phi) \in L^1(U)$

QQ20 - Wahr oder falsch?

Sei $f \in L^1 \cap L^3$ und $g \in L^2$. Dann gilt

- A $fg \in L^1$
- B $f^2 \in L^1$
- C $f^3 g \in L^1$

QQ21 - Verhalten der Fourierreihe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch und $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^2([-\pi,\pi])$. Sei $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{\mathrm{i}kx}$.

Für welche Funktion sind dann folgendes die Fourierkoeffizienten?

A $(a\hat{f}(k))_k$

B $(\ldots, \hat{f}(-2), \hat{f}(-1), b + \hat{f}(0), \hat{f}(1), \hat{f}(2), \ldots)$

C $(e^{\mathrm{i}kx_0}\hat{f}(k))_k$

QQ22 - Fourierreihe - Was gilt?

Sei $f \in L^2([-\pi,\pi])$ mit Fourierreihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\phi_k(x)$.

Wahr oder falsch?

A Die Fourierreihe konvergiert in L^2.

B Die Fourierreihe konvergiert punktweise für alle x.

C Die Fourierreihe konvergiert absolut in allen x, in denen (zumindest eine Teilfolge) punktweise konvergiert.

QQ23 – Wahr oder falsch?

Die charakteristische Funktion eine offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}$ ist

A über jedem Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

B über jedem Intervall $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar.

C über ganz $\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

D über ganz $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar.

QQ24 – Wahr oder falsch?

Sei $f_n \in L^1(K)$ und $f_n \leq f_{n+1}$. Dann gilt

- A Geeignete Realisierungen von f_n konvergieren punktweise (ggf. uneigentlich) gegen ein $f\colon K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
- B Entweder f_n konvergiert in L^1 oder $I(f_n) \to \infty$.
- C Konvergiert f_n in L^1, dann konvergieren geeignete Realisierungen von f_n punktweise gegen ein $f\colon K \to \mathbb{R}$.

QQ25 – Wie skalieren die Größen?

Was ist die Abhängigkeit folgender Größen von $a > 0$?

A $\mathrm{vol}(B_a(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < a\})$

B $\mathrm{vol}(S_a(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = a\})$

C $\|x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(a \cdot x)\|_p$ für $p \in [1, \infty]$

QQ26 – Fourierreihen - Wahr/falsch?

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch mit $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Sei $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{\mathrm{i}kx}$ die Fourierreihe. Was gilt?

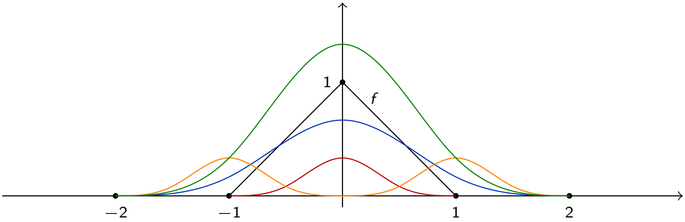
A Ist f gerade, dann geht die Summe nur über $k \in \mathbb{N}$.

B Ist f ungerade, dann ist $\hat{f}(k) = -\hat{f}(-k)$ für alle k.

C $\lim_{k \to \pm\infty} \hat{f}(k) = 0$.

QQ27 – Faltung

Sei f die schwarze Funktion im Bild. Welche Funktion kann $f * f$ darstellen?



QQ28 – Fouriertransformation

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\mathrm{i}x\xi} dx$$

Richtig oder falsch?

A Für $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ existiert $\hat{f} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

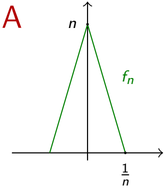
B $\hat{f}$ existiert auch für $f = 1$.

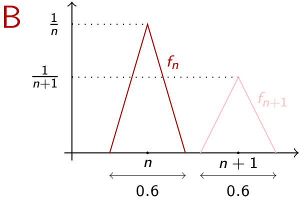
C Ist $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, dann hat $\hat{f}$ auch nur Werte in $\mathbb{R}$.

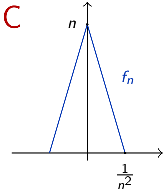
D Ist $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit $f(x) = f(-x)$, dann hat $\hat{f}$ auch nur Werte in $\mathbb{R}$.

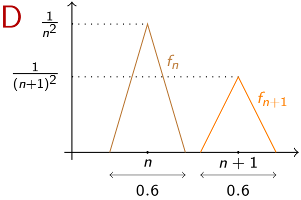
QQ29 – Satz der majorisierten Konvergenz

Für welche Folgen kann der Satz der majorisierten Konvergenz angewendet werden? Falls nicht, welche Voraussetzung(en) sind jeweils <u>nicht</u> erfüllt? Welche Folgen konvergieren in L^1?









QQ30 – Richtig oder falsch

Faltet man eine Funktion f mit $\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ (Annahme: das geht), dann gilt für $g = f * \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$:

- A $g(x)$ ist das Mittel von f über $(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$
- B $g(x)$ ist das Mittel von f über $[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]$
- C War f kompakt getragen, ist es auch g.
- D Ist f stetig, dann ist g differenzierbar.

QQ31 – Richtig oder falsch?

Eine Funktion $f \in C^\infty$ ist genau dann schnell abfallend, falls

A für alle $k, m \in \mathbb{N}$ Konstanten $c_{k,m}$ gibt, so dass

$$(1+|x|^2)^k \left|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x)\right| \leq c_{k,m} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : \ |\alpha| \leq m, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

B für alle $k, m \in \mathbb{N}$ Konstanten $c_{k,m}$ gibt, so dass

$$|x|^k \left|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x)\right| \leq c_{k,m} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : \ |\alpha| \leq m, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

C für alle $k \in \mathbb{N}$ Konstanten c_k gibt, so dass

$$(1+|x|^2)^k \left|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x)\right| \leq c_k \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

D für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ Konstanten $c_{k,\alpha}$ gibt, so dass

$$(1+|x|^2)^k \left|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x)\right| \leq c_{k,\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

QQ32– Richtig oder falsch?

Aus

- $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d_{\mathcal{S}})$.

und

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $(C_0(\mathbb{R}^n), \|.\|_\infty)$.

folgt direkt

- $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $(C_0(\mathbb{R}^n), \|.\|_\infty)$.

Falls nicht: Ist die letzte Aussage trotzdem richtig?

QQ33

Sei f auf $[-\pi, \pi]$ durch $x(x+1)$ gegeben und wird dann periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

In der zugehörigen Fourierreihe kommen neben dem konstanten Term

A nur Sinusterme vor.

B nur Kosinusterme vor.

C sowohl Sinus- als auch Kosinusterme vor.

QQ34 – DFT

Seien y_ℓ und z_ℓ zwei komplexe Folgen der Länge N. Was gilt, was nicht?

A $\widehat{(y_\ell + z_\ell)} = \hat{y}_\ell + \hat{z}_\ell$

B Sei $h_\ell = \overline{y_{N-1-\ell}}$. Dann ist $\hat{h}_\ell = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi(N-1)\ell}{N}}\overline{\hat{y}_{N-1-\ell}}$.

C Sind all y_ℓ reell, dann auch $\hat{y}_\ell$.

QQ35 – Einheitswurzeln

Sei $z = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$ Welche der folgenden Aussagen stimmen?

A $\sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell = 0$

B $\sum_{\ell=0}^{n-1} \cos\frac{2\pi\ell}{n} = 0$

C $z^{\frac{n}{2}} = 1$

D $\sum_{k=1}^{n} z^{jk}\overline{z}^{mk} = n\delta_{jm}$ für $m, k = 1, \ldots, n$.

QQ36 – vernachlässigbar

Welche Aussagen sind äquivalent zu 'Die Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist vernachlässigbar.'?

A $\|\chi_A\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0$.

B $\chi_A = 0$ in L^1

C $A \cap (\{x\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \subset \mathbb{R}^n$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ vernachlässigbar.

D Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $a > 0$ mit $\|\chi_{A \cap [-a,a]^n}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \epsilon$

E Der Schnitt von A mit $B_1(p)$ ist für alle $p \in \mathbb{R}^n$ vernachlässigbar.

QQ37 – Wahr oder falsch?

Sei $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ und $\eta\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ glatt mit $\eta(x) = 0$ für $|x| > 2$ und $\eta(x) = 1$ für $|x| < 1$. Sei

$$f_j(x) = f_+(x)\eta(j^{-1}x).$$

Auf die Folge f_j lässt sich

- A der Satz zur montonen Konvergenz anwenden, wenn $f_+ \in L^1(\mathbb{R}^n)$ anwenden.
- B der Satz zur montonen Konvergenz nur dann anwenden, wenn $f_+ \in L^1(\mathbb{R}^n)$ anwenden.
- C der Satz zur majorisierten Konvergenz anwenden, wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ anwenden.
- D der Satz zur majorisierten Konvergenz nur dann anwenden, wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ anwenden.

QQ38 – Wahr oder falsch?

Sei $f \in L^2 \cap L^3$ und $g \in C_c^0$.

Dann gilt

A $fg \in L^1$

B $f^{2,3} g \in L^1$

C $f^4 g \in L^1$

QQ39 – Wahr oder falsch?

Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{B} = \{(0,2),(1,3)\}$.

A $\sigma(\mathcal{B})$ ist die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}$.

B $\sigma(\mathcal{B}) \subset \Lambda^n$.

C $\sigma(\mathcal{B})$ ist eine endliche Menge.

QQ40

Sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{2\}, \{2, 3\}\}$,
$\lambda\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$ mit

$$\lambda(\emptyset) = 0, \;\; \lambda(\{2\}) = 2 \text{ und } \;\; \lambda(\{2, 3\}) = 1.$$

Sei $\mu\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ das daraus konstruierte äußere Maß (Konstruktion wie in der Vorlesung). Was gilt - was nicht?

A $\mu(\{1\}) = 0$

B $\mu(\Omega) = \infty$

C $\mu(\{2\}) = 2$

D $\mu(\{3\}) = 1$

QQ41 – Wahr oder falsch?

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$.

- A Falls $f \geq 0$ und $a \in (0, \infty)$ ist, ist $\ln(1 + af) \in L^1(\mathbb{R}^m)$.
- B Falls $a \in (0, \infty)$, ist $\ln(1 + af) \in L^1(\mathbb{R}^m)$.
- C Falls $f > -1$ ist, ist $\ln(1 + f) \in L^1(\mathbb{R}^m)$.

QQ42

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ mit $f \geq 0$.

Was ist $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} n \ln\left(1 + \frac{1}{n} f\right) \mathrm{dvol}$?