**Analysis III** Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 21/22

# Übungsblatt 0

Dieses Blatt wird nicht abgegeben, sondern nur in der Übung der zweiten Vorlesungswoche besprochen.

**Aufgabe.** Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen stimmt. Beweisen Sie diese dann ggf. oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.[1]

(i) Die Vereinigung beliebiger vieler offener Mengen von $X$ ist wieder offen?

(ii) Die Vereinigung beliebiger vieler abgeschlossener Mengen von $X$ ist wieder abgeschlossen?

(iii) Der Schnitt beliebiger vieler abgeschlossener Mengen von $X$ ist wieder abgeschlossen?

(iv) Die Schnitt beliebiger vieler offener Mengen von $X$ ist wieder offen?

Wie sieht das jeweils mit endlich vielen Menge aus?

**Aufgabe.** Sei $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit kompakten Träger. Für $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ sei

$$\|f\|_{L^1} := \int_{\mathbb{R}^n} |f| \mathrm{dvol}.$$

Zeigen Sie, dass $\|.\|_{L^1}$ auf $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ eine Norm ist.

**Aufgabe.** Definieren Sie geeignet punktweiser/gleichmäßiger Konvergenz von Folgen $f_n \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ bzw. direkt für $f_n \colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ für metrische Räume $(X, d_X)$ und $(Y, d_Y)$ und zeigen Sie die Entsprechung von Satz 4.1.48 aus Analysis 1.

[1] Für die Suche nach Gegenbeispielen denken Sie an $X = \mathbb{R}$ mit dem euklidischen Abstand.