Analysis III Ksenia Fedosova, Nadine Große

WS 21/22

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (2.5+2.5)**.** (Uneigentlich integrierbar)

(i) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar. Zeigen Sie, dass dann $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{i\to\infty} \int_{K_i} f \mathrm{dvol}$ für jede kompakte Ausschöpfung $(K_i)_i$ von $\mathbb{R}$ mit K_i zusammenhängend[1] ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{|\sin x|}{x}$ nicht uneigentlich integrierbar ist.
Hinweis: Vergleich gegen eine divergente Minorante.

Aufgabe 2 (2.5+2.5)**.** ($C_c^0(\mathbb{R}^n)$ ist bzgl. der L^1-Norm nicht vollständig.) Zeigen Sie dafür:

(i) Die Folge

$$f_k(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq 1 \\ 1 & \text{für } |x| \leq 1 - \frac{1}{k} \\ \text{dazwischen linear} & \end{cases}$$

ist eine Cauchyfolge bzgl. der L^1-Norm $\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$.

(ii) Sei $f_k \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ eine Folge, die in L^1 gegen ein $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ konvergiert. Dann konvergiert f_k auch punktweise gegen f.

Aufgabe 3 (2.5+2.5)**.** (Schnell konvergente Folgen)

(i) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Sei a_k eine Folge in X, so dass es ein $\ell > 0$ mit $d(a_k, a_{k+1}) \leq \frac{\ell}{k^4}$ für alle k gibt. Zeigen Sie, dass a_k eine Cauchyfolge ist.

(ii) Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum. Seien a_k und b_k zwei schnell konvergente Folgen, d.h. es gibt in $\ell > 0$ mit $d(a_k, a_{k+1}) \leq \frac{\ell}{k^4}$ für alle k und analog ein ℓ' für b_k. Sei λ im zugehörigen Körper. Zeigen Sie, dass dann auch $a_k + \lambda b_k$ schnell konvergent ist.

Aufgabe 4 (2.5+2.5)**.** (Vernachlässigbare Mengen)

(i) Zeigen Sie, dass die Cantormenge $\mathcal{C} \subset [0,1]$ aus Beispiel 1.2.4 vernachlässigbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ vernachlässigbar ist, aber $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nicht vernachlässigbar sein kann.

Abgabe am Mittwoch 27.10.21 bis 14 Uhr in die Briefkästen im Untergeschoss der Ernst-Zermelo-Str. 1.

[1] Das bedeutet hier einfach, dass K_i ein kompaktes Intervall ist.