Analysis III Ksenia Fedosova, Nadine Große

WS 21/22

Übungsblatt 2

Aufgabe 5. Zeigen Sie, es ist $\frac{1}{\sqrt{x}}$ in $L^1([0,1])$ (Das war kurz für: $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist eine Realisierung eines Elementes in $L^1([0,1])$.) und die zugehörige L^1-Norm ist gleich dem uneigentlichen Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

Aufgabe 6. Zeigen Sie: Treppenfunktionen f auf $[a,b]$, vgl. Def. 4.5.1 in Analysis 1, sind Realisierungen von Elementen in $L^1([a,b])$ und es ist $\|f\|_{L^1}$ gleich dem Riemann-Integral $\int_a^b |f(x)|dx$.

Aufgabe 7. Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$. Sei $\bar{A}$ der Abschluss von A in X und $(\bar{A}^d, \bar{d})$ die Vervollständigung des metrischen Raumes (A,d). Zeigen Sie, dass $(\bar{A}, d)$ und $(\bar{A}^d, \bar{d})$ als metrische Räume isomorph sind, d.h. es gibt eine Bijektion $\phi\colon \bar{A} \to \bar{A}^d$ und Konstanten $c_1, c_2 > 0$ mit

$$c_1 d(x,y) \leq \bar{d}(\phi(x), \phi(y)) \leq c_2 d(x,y)$$

für alle $x, y \in \bar{A}$.

Aufgabe 8. Sei X die Menge aller beschränkten reellen Folgen $(a_n)_n$. Mit $\lambda(a_n)_n + (b_n)_n := (\lambda a_n + b_n)_n$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_n, (b_n)_n \in X$ wird X zu einem reellen Vektorraum. Wir setzen

$$\|(a_n)_n\|_X := \sup_n |a_n|.$$

Damit wird $(X, \|.\|_X)$ zu einem normierten Raum.
Welche der folgenden Teilmengen von X sind zusammen mit $\|.\|_X$ Banachräume?

(i) X

(ii) c_0 die Menge aller Nullfolgen

(iii) c_1 die Menge der Folgen, die gegen 1 konvergieren.

(iv) c_{00} die Menge aller Folgen, für welche nur endlich viele Folgenglieder ungleich Null sind.

Was sind jeweils die Vervollständigungen dieser metrischen Räume?

Abgabe am Mittwoch 03.11.21 bis 14 Uhr in die Briefkästen im Untergeschoss des Matheinstituts.