Übungsblatt 3

Aufgabe 9. Zeigen Sie, $\frac{1}{x}$ ist <u>nicht</u> in $L^1([0,1])$.
Hinweis: Für welche Art von Konvergenz von Funktionfolgen können wir Grenzwert und Integration vertauschen (AnaI)? Auf welchen Menge haben wir diese Konvergenz hier? Können wir damit abschätzen, welche L^1-Norm $\frac{1}{x}$ haben müsste, wenn es L^1 wäre?

Aufgabe 10 (3.5+1.5)**.** Zeigen Sie:

(i) Sei $g_k \in L^1(K)$ eine schnell konvergente Cauchyfolge. Sei g der Limes von g_k in $L^1(K)$. Dann gilt $g_k(x) \to g(x)$ fast überall.

(ii) Sei $f_k \in L^1(K)$. Konvergiere f_k in L^1 gegen ein $f \in L^1(K)$. Seien $f_k(x)$ Realisierungen von f_k, so dass $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ fast überall existiert. Dann ist $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ eine Realisierung von f.

Aufgabe 11 (Lemma 1.3.9 für L^p)**.** Sei $p \in [1,\infty)$. Für $c \in C_c^0(K)$ definieren wir die L^p-Norm als

$$\|c\|_{L^p} := \left(\int_K |c|^p \mathrm{dvol}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(Wir werden später noch beweisen, dass es sich wirklich um eine Norm handelt. Sie können das hier einfach benutzen.)

Sei nun $c_k \in C_c^0(K)$ eine schnell konvergente Cauchyfolge bzgl. L^p. Zeigen Sie, dass c_k punktweise fast überall konvergiert und dass es für jedes $\epsilon > 0$ eine offene Menge B mit $\mathrm{vol}B < \epsilon$ gibt, so dass $c_k|_{K\setminus B}$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 12. Sei $\phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ Lipschitz mit Lipschitzkonstante C, d.h. für alle $s,t \in \mathbb{R}^m$ gelte

$$|\phi(s) - \phi(t)| \le C|s-t|.$$

Zeigen Sie: Für alle $f_1,\ldots,f_m \in L^1(K)$ gibt es genau ein Element $\phi(f_1,\ldots,f_m) \in L^1(K)$, so dass folgende Eigenschaften gelten: Es gibt ein $\tilde{C} > 0$, so dass für alle $f_i, g_i \in L^1(K)$ gilt

(i) $\|\phi(f_1,\ldots,f_m) - \phi(g_1,\ldots,g_m)\|_1 \le \tilde{C}\max_{i=1,\ldots,m}\|f_i - g_i\|_1$

(ii) $\phi(f_1,\ldots,f_m)(x) = \phi(f_1(x),\ldots,f_m(x))$ f.ü.

Abgabe am Mittwoch 10.11.21 bis 14 Uhr in die Briefkästen im Untergeschoss des Matheinstituts.