Übungsblatt 4

Aufgabe 13. Sei $f \in L^1(K)$ mit Realisierung $f\colon K \to \mathbb{R}$, so dass $f(x) \geq a$.

(i) Sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass dann $\sqrt{f} \in L^1(K)$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass (i) i.A. nicht stimmt, wenn $a = 0$ ist.

Aufgabe 14. Zeigen Sie: $\|.\|_\infty$ (aus Lemma 1.3.25) ist eine Norm auf der Menge der beschränkten Elemente in $L^1(K)$ und stimmt für beschränkte Elemente in $L^1(K)$, welche eine Realisierung $c \in C^0(K)$ besitzen, mit der Supremumsnorm $\sup_{x\in K} |c(x)|$ überein.

Aufgabe 15. Zeigen Sie: Die Menge der Treppenfunktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ liegt dicht in $L^1([a,b])$.

Hinweis: Um ein Element in $L^1([a,b])$ durch Treppenfunktionen anzunähern, denken Sie an die Definition des Riemann-Integrals von einer Funktion.

Aufgabe 16 (Lemma von Fatou)**.** Sei $f_k \in L^1(K)$, $f_k \geq 0$. Dann ist $\liminf_{k\to\infty} I(f_k) = \infty$ oder $\liminf_{k\to\infty} f_k \in L^1(K)$ mit

$$I(\liminf_{k\to\infty} f_k) \leq \liminf_{k\to\infty} I(f_k).$$

Hinweis: Betrachten Sie $g_n := \inf_{k\geq n} f_k$.

Abgabe am Mittwoch 17.11.21 bis 14 Uhr in die Briefkästen im Untergeschoss des Matheinstituts.