Analysis III Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 21/22

Übungsblatt 5

Aufgabe 17. Berechnen Sie (mit Begründung)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left(1-e^{-\frac{x^2}{n}}\right)x^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Aufgabe 18 (2+2+1)**.** Wir betrachten die Gammafunktion

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \quad \text{für } x>0.$$

Zeigen Sie

(i) $\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$

(ii) $\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$

(iii) $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ und $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

Hinweis: Benutzen Sie (i) für (ii) und (ii) sowie das Wallis'sche Produkt aus Analysis 1 für (iii).

Aufgabe 19. Sei f_k eine Folge in $L^1(K)$, so dass $\sum_{k=0}^\infty \|f_k\|_1<\infty$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^\infty f_k(x)$ f.ü. absolut konvergiert und $\sum_{k=0}^\infty f_k\in L^1(K)$ mit $I(\sum_{k=0}^\infty f_k)=\sum_{k=0}^\infty I(f_k)$ ist.

Aufgabe 20. Rechnen Sie nach, dass das Volumen von $B_r(0)\subset\mathbb{R}^n$ ist gleich $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}r^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ ist.

Hinweis: Induktion (von $n-2$ auf n ist einfacher als von $n-1$ auf n, geht aber beides) und Analysis 2.

Abgabe am Mittwoch 24.11.21 bis 14 Uhr in die Briefkästen im Untergeschoss des Matheinstituts.