Analysis III Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 21/22

Übungsblatt 7

Aufgabe 25 (2+2+1)**.** (i) Zeigen Sie: Sei $p, q \in [1, \infty)$. Sei $f \in L^p(K) \cap L^q(K)$[1] und $\theta \in [0, 1]$. Dann ist

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\theta} \|f\|_q^{\theta} \quad \text{für } \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}.$$

Insbesondere ist somit $f \in L^s(K)$ mit $\|f\|_s \leq \max\{\|f\|_p, \|f\|_q\}$ für alle $s \in [p, q]$.

(ii) Zeigen Sie: Sei $p, q \in [1, \infty)$ mit $p \leq q$. Sei $f \in L^p(K)$ beschränkt. Dann folgt $f \in L^q(K)$.

(iii) Stimmt (ii) auch für $q < p$?

Aufgabe 26. Sei $p \in [1, \infty)$. Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $t_a \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x - a$. Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $a_i, a \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i \to 0$ für $i \to \infty$. Zeigen Sie

(i) $f \circ t_a \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $f \circ t_{a_i} \to f$ in L^p für $i \to \infty$.

Hinweis zu (ii): Betrachten Sie zuerst $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ und nutzen Sie gleichmäßige Stetigkeit.

Aufgabe 27. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader. Sei $p \in [1, \infty)$. Sei $f \in L^p(K)$ beschränkt. (Dann ist nach ÜA25.ii $f \in L^s(K)$ für alle $s \geq p$.) Zeigen Sie,

$$\|f\|_s \to \|f\|_\infty \qquad s \to \infty.$$

Stimmt die Aussage auch für $K = \mathbb{R}^n$?

Hinweis: Zeigen Sie erst: Sei $\epsilon > 0$ und $c \in C^0(K)$. Sei $K' := \{x \in K \mid |c(x)| > \|c\|_\infty - \epsilon\}$. Dann ist $K' \subset K$ offen und es gilt

$$(\|c\|_\infty - \epsilon)(\operatorname{vol} K')^{\frac{1}{p}} \leq \|c\|_p \leq (\operatorname{vol} K)^{\frac{1}{p}} \|c\|_\infty$$[2]

Aufgabe 28. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ beschränkt mit Realisierung $f(x)$. Zeigen Sie: $\|f\|_\infty$ ist das kleinste $a \in \mathbb{R}$, für dass es eine vernachlässigbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $|f(x)| \leq a$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ gibt.

Abgabe am Mittwoch 08.12.21 bis 14 Uhr in die Briefkästen im Untergeschoss des Matheinstituts.

[1] Das heißt, es gibt ein $f \colon K \to \mathbb{R}$, was sowohl Realisierung eines Elementes in L^p als auch eines in L^q ist.
[2] Wir gehen hier den Weg über $C^0(K)$, da wir sonst i.A. noch nicht wüssten, was volK' sein soll.