Analysis III Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 21/22

Übungsblatt 8

Aufgabe 29. Sei $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ eine Realisierung eines Elementes in $L^2([-\pi,\pi])$. Sei $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx))$ die reelle Fourierreihe zu f und $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ die komplexe Fourierreihe zu f.

(i) Berechenen Sie c_k in Abhängigkeit der a_k und b_k und a_k bzw. b_k in Abhängigkeit von c_k's.

(ii) Zeigen Sie: Ist f gerade bzw. ungerade, dann ist $a_k = 0$ bzw. $b_k = 0$ für alle k.

(iii) Sei f differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{i}k\hat{f}(k) = \hat{f'}(k)$ gilt. Was gilt für $\hat{f}(k)$, wenn f stetig und stückweise differenzierbar ist?

Aufgabe 30. Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, und benutzen Sie diese um zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ gilt.

Aufgabe 31. Zeigen Sie $\ell_2(\mathbb{Z}) := \{(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mid a_k \in \mathbb{C}\}$ mit $\|(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}\|_2 := \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ist ein vollständiger normierter Vektorraum, dessen Norm von einem Skalarprodukt induziert wird, ist (in kurz: ein Hilbertraum).
Hinweis: Für 'vollständig' an Fourierreihen denken.

Aufgabe 32. Wir betrachten den Raum

$$C_0([-\pi,\pi]) = \{f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}, f(-\pi) = f(\pi) = 0\}.$$

Sei $f \in C_0([-\pi,\pi])$. Wir suchen eine Reihe $\sum_{k\in K_1} a_k \cos(kx) + \sum_{k\in K_2} b_k \sin(kx)$, die f approximieren soll. Ähnlich wie die Fourierreihe, nur dieses Mal wollen wir nur $\cos(kx)$ bzw. $\sin(kx)$ zulassen, welche einzeln in $-\pi$ und π Null sind (also die gleichen Randbedingungen wie f erfüllen). Welche k sind dann noch zugelassen (also was sind K_1, K_2)?

Nehmen wir nun an, dass $f = \sum_{k\in K_1} a_k \cos(kx) + \sum_{k\in K_2} b_k \sin(kx)$ für geeignete $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ als Gleichheit in $L^2([-\pi,\pi])$ gilt. Berechnen Sie a_k, b_k in Abhängigkeit von f.

Berechnen Sie diese a_k, b_k für folgendes f:

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & x \in [0,\pi) \\ \pi + x & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

Skizzieren Sie die ersten Partialsummen von $\sum_{k\in K_1} a_k \cos(kx) + \sum_{k\in K_2} b_k \sin(kx)$ und vergleichen Sie dies mit der Fourierreihe von f aus der Vorlesung.

Abgabe am Mittwoch 15.12.21 bis 14 Uhr in die Briefkästen im Untergeschoss des Matheinstituts.