Übungsblatt 9

Aufgabe 33. Lösen Sie

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 t}u(t,x) - c^2\frac{\partial^2}{\partial^2 x}u(t,x) = 0$$

mit $t \in \mathbb{R}$, $x \in [0,L]$, c Konstante,

$$\textit{Randbedingungen:}\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \text{für alle } t$$

und für $g \in C^2([0,L])$ mit $g(0) = g(L) = 0$ und $h \in C^1([0,L])$

$$\textit{Anfangsbedingungen:}\ u(0,x) = g(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(0,x) = h(x) \quad \text{für alle } x \in [0,L]$$

unter Verwendung der 'Fourierzerlegung' wie in ÜA32.

Aufgabe 34 (2.5+2.5)**.** (i) Seien $\rho_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\rho_i \geq 0$ mit $\|\rho_i\|_1 = 1$ für $i = 1,2$. Zeigen Sie, dass dann $\rho_1 * \rho_2 \geq 0$ mit $\|\rho_1 * \rho_2\|_1 = 1$ ist.

(ii) Rechnen Sie nach:

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

sofern diese Faltungen existieren.

Aufgabe 35 (2.5+2.5)**.** (i) Sei $F\colon U \subset \mathbb{R}^{n-1} \to S^{n-1}$ eine lokale Parametrisierung der S^{n-1}. Zeigen Sie, dass dann $\tilde{F}\colon U \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $(x,r) \mapsto rF(x)$ eine lokale Parametrisierung für $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist und damit

$$\int_{\tilde{F}(U\times(0,\infty))\subset\mathbb{R}^n} f\mathrm{dvol} = \int_{F(U)}\int_0^\infty f\circ(rF)\, r^{n-1}dr\mathrm{dvol}_{S^{n-1}}$$

für integrierbare f gilt. Folgern Sie daraus, dass, falls $f(x) = g(|x|)$ für ein $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(|x|)\mathrm{dvol}_x = \mathrm{vol}\, S^{n-1}\int_0^\infty g(r)r^{n-1}dr$$

(ii) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ punktweiser Limes einer Folge stetiger Funktionen $c_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sei $C, \epsilon, R > 0$. Zeigen Sie:

(a) Ist $|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha}$ f.ü. in $B_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\alpha < n$, dann ist $f \in L^1(B_\epsilon(0))$.

(b) Ist $|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha}$ f.ü. in $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\alpha > n$, dann ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus B_R(0))$.

Aufgabe 36 (1.5+3.5)**.** (i) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar und 2π-periodisch. Zeigen Sie, dass es dann ein $C > 0$ mit

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^n} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

gibt.

(ii) Sei $f \in L^2([-\pi,\pi])$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei $C, \epsilon > 0$ derart, dass

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^{n+1+\epsilon}} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

gilt. Zeigen Sie, dass f dann eine n-mal stetig differenzierbare Realisierung besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $n = 0$ und zeigen Sie, dass f_k absolut und gleichmäßig konvergent ist und der punktweise Limes von f_k damit stetig ist. Für $n \geq 1$ Analysis 1 benutzen (Vertauschen von Grenzwert und Ableitung (Ana1, Satz 4.3.11) und $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{1+\epsilon}} < \infty$ für alle $\epsilon > 0$ (Ana1, Bsp. 4.5.35)).

Abgabe am Mittwoch 22.12.21 bis 14 Uhr – Modus wie Ansage in Ihrer Übung.