# **Übungsblatt** 10

In der Vorlesung haben wir erwähnt, dass es in der Wahrscheinlichkeitstheorie den zentralen Grenzwertsatz gibt, der besagt:
*Seien $X_i$ unabhängige[1] und identisch verteilte[2] Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2 \neq 0$, dann ist*

$$\mathit{Wahrscheinlichkeit}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq t\right) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Wir können diesen Satz im Moment noch nicht beweisen. Doch in den nächsten zwei Aufgaben, wollen wir uns für Zufallsvariablen, die von einer Wahrscheinlichkeitsdichte kommen, mal mit Hilfe einiger Rechnung zu der Fouriertransformierten der auftauchenden Dichten plausibel machen, dass diese Aussage stimmt:

**Aufgabe 37** (1+1+1+2)**.** Sei $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h. $\rho \geq 0$ mit $L^1$-Norm 1. Seien $\mu = \int_{\mathbb{R}} x\rho(x)dx$ der Erwartungswert und $\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}}(x-\mu)^2\rho(x)dx$ die Varianz zu $\rho$. Sei die Fouriertransformierte $\hat{\rho}$ von $\rho$ mindestens dreimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

(i) $\hat{\rho}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

(ii) $\hat{\rho}'(0) = -\frac{\mathrm{i}\mu}{\sqrt{2\pi}}$

(iii) $\hat{\rho}''(0) = -\frac{\sigma^2+\mu^2}{\sqrt{2\pi}}$.

(iv) Sei $\mu = 0$. Zeigen Sie: $\left(\sqrt{2\pi}\hat{\rho}(\frac{\xi}{\sqrt{n\sigma^2}})\right)^n \to e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ für $n \to \infty$ punktweise und auf kompakten Intervallen gleichmäßig konvergiert.

Hinweis zu (iv): Taylor für $\hat{\rho}$

**Aufgabe 38** (2+1+2)**.** Sei $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h. $\rho \geq 0$ mit $L^1$-Norm 1. $\rho$ sei die Dichte zu einer Zufallsvariablen $X$, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass $X$ einen Wert in $[a,b]$ annimmt ist $\int_a^b \rho(x)dx$.

(i) Sei $cX$ die Zufallsvariable, deren Wert in $[a,b]$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit liegt, wie der Wert von $X$ in $[a/c, b/c]$ liegt ($c > 0$). Sei $X + c$ die Zufallsvariable, deren Wert in $[a,b]$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit liegt, wie der Wert von $X$ in $[a-c, b-c]$ liegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten von $cX$ und $X + c$ in Abhängigkeit von $\rho$.

(ii) Seien $X_i$, $i \in \mathbb{N}$, unabhängige Zufallsvariablen mit der gleichen Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte von $\frac{(\sum_{i=1}^n X_i)-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ gleich $\rho_n(x) = \sqrt{n\sigma^2}\rho^{*n}\left(\sqrt{n\sigma^2}(x+n\mu)\right)$ ist.

(iii) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte von $\rho_n$ aus (ii) in Abhängig von $\hat{\rho}$ und folgern Sie mit 37.iv, dass, falls $\mu = 0$ und $\hat{\rho}$ oft genug differenzierbar ist, $\widehat{\rho_n}$ auf kompakten Intervallen gegen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-\xi^2}{2}}$ konvergiert.

Modulo der Differenzierbarkeitsforderungen an $\hat{\rho}$ und dass man schauen muss, ob die Konvergenz geeignet eine inverse Fouriertransformation überlebt, hätte man so den zentralen Grenzwertsatz für Zufallsvariablen, die von Wahrscheinlichkeitsdichten kommen.

[1] Impliziert auf dem Level von Wahrscheinlichkeitsdichten, dass die Dichte zu $X_1 + X_2$ gleich der Faltung der Dichten zu $X_1$ und $X_2$ ist.

[2] Falls die Zufallsvariablen von einer Wahrscheinlichkeitsdichte kommen, bedeutet 'identisch verteilt', dass diese Dichte für alle diese Zufallsvariablen gleich ist.

**Aufgabe 39.** Berechnen Sie die inverse Fouriertransformation von $\frac{\sin x}{x}$ als uneigentliches Riemannintegral.
Hinweis: Eulerformel, Additionstheoreme und Fallunterscheidung

**Aufgabe 40.** Benutzen Sie Fouriertransformationen in $x$-Richtung um die Lösung von

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = u(x,t) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

mit $u(x,0) = xe^{-x^2/2}$ zu berechnen.

---

**Abgabe am Mittwoch 19.01.21 bis 14 Uhr**