Übungsblatt 11

Aufgabe 41. Sei $f\colon K \to \mathbb{R}$ für K ein Quader und $f \in L^1(K)$. Sei $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\}$. Zeigen Sie, dass $\chi_A \in L^1(K)$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie das Lipschitzkalkül für eine geeignete Folge von Lipschitz-Funktionen und den Satz zur monotonen Konvergenz.

Aufgabe 42 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)**.** Sei $f \in L^1(K)$ für K einen Quader oder $\mathbb{R}^n$. Es gelte

$$\int_K f\phi \mathrm{dvol} \geq 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(K) \text{ mit } \phi \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass dann $f(x) \geq 0$ f.ü. gilt.

Gilt die Aussage auch für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (d.h. $f\chi_{[-a,a]^n} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle a)?

Hinweis: Am liebsten würde man $\phi = \chi_A$ mit A aus Aufgabe 41 setzen – darf man aber nicht, ist so nicht in C_c^∞...

Aufgabe 43 (C_c^k-Version von Satz 2.2.5)**.** Sei $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$[1], $k \in \mathbb{N}$. Sei $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Für $\varepsilon > 0$ sei $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$. Zeigen Sie, dass $\phi_\varepsilon * f$ in C_b^k gegen $I(\phi)f$ konvergiert.

Hinweis: Fangen Sie mit $k = 0$ an (Das ist auch 95% der Arbeit). Wenn Sie $\phi_\varepsilon * f - I(\phi)f$ als Integral über y schreiben, teilen Sie den Integrationsbereich auf in $|y| < \delta$ und $|y| \geq \delta$ und verwenden für das erste Integral die gleichmäßige Stetigkeit von f.

Aufgabe 44 (2+3)**.** (i) Sei $\langle .,. \rangle$ ein komplexes Skalarprodukt auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V. Zeigen Sie, dass für alle $v \in V$ die Abbildungen

$$w \in V \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}, \quad w \in V \mapsto \langle w, v \rangle \in \mathbb{C}$$

stetig[2] sind.

(ii) Sei $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*\colon L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ die Fouriertransformation bzw. inverse Fouriertransformation wie in Satz 2.3.15. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{F}(f), g)_{L^2} = (f, \mathcal{F}^*(g))_{L^2}$ für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

Abgabe am Mittwoch 26.01.21 bis 14 Uhr

[1] D.h. f ist C^k und kompakt getragen

[2] Hier ist V mit der zum Skalarprodukt gehörigen Norm ein normierter Raum und damit insbesondere ein metrischer Raum.