

# Analysis III

Universität Freiburg, WS 2021/22

Nadine Große

Skript - Version vom 19. Dezember 2022

Wenn Sie (Tipp-)Fehler finden, bin ich dankbar, wenn Sie mir diese mitteilen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Worum geht es?</b>	<b>1</b>
<b>1 Integration</b>	<b>5</b>
1.1 Mehrfachintegrale aus Analysis 2	5
1.1.1 Integration über $\mathbb{R}^n$	5
1.2 Mehr Volumina	7
1.3 Lebesgue-Integral über Vervollständigung	11
1.3.1 Vervollständigung metrischer Räume	11
1.3.2 Definition von $L^1$	14
1.3.3 Schnell konvergente Cauchyfolgen	16
1.3.4 Realisierungen von Elementen in $L^1(K)$	18
1.3.5 Lipschitz-Kalkül	20
1.3.6 Komplexwertige Funktionen	26
1.4 Konvergenzsätze	26
1.5 Vergleich mit dem Riemann-Integral aus Analysis 1	29
1.5.1 Konvergenzsätze für Riemann-Integrale?	33
1.6 Parameterintegrale	34
1.7 Satz von Fubini und Transformationssatz	37
1.8 Lebesgue-Räume	39
1.8.1 Dualräume und $L^\infty$	43
<b>2 Fourierreihen und Fouriertransformationen</b>	<b>49</b>
2.1 Fourierreihen	49
2.1.1 Wo kommt das her und vor?	49
2.1.2 Definition, Konvergenz, ...	50
2.2 Faltung	61
2.3 Fouriertransformationen	69
2.3.1 Schwartz-Raum	74
2.3.2 Erweiterung auf $L^2$	78
2.4 Diskrete Versionen	80
2.4.1 Diskrete Fourierreihe und Transformation	80
2.4.2 Diskrete Faltung	86
2.4.3 Anwendungen	87
<b>3 Maßtheorie</b>	<b>93</b>
3.1 Von $L^1(\mathbb{R}^n)$ zum Lebesgue-Maß	93
3.2 Grundbegriffe der Maßtheorie	96
3.3 Konstruktion von Maßen	100

*Inhaltsverzeichnis*

3.4	Messbare Funktionen . . . . .	106
3.5	Integration über Maße . . . . .	110
3.6	Vergleich von $L^1(\widehat{\lambda}^n)$ mit $L^1(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	116
3.7	Gibt es nicht Lebesgue-messbare Mengen? – Das Auswahlaxiom . . . . .	117
	<b>Literatur</b>	<b>119</b>

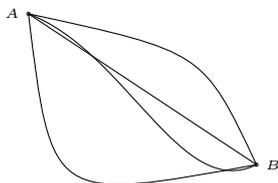
# Worum geht es?

In Analysis 3 werden wir vor allem den Integrationsbegriff aus Analysis 1/2 verallgemeinern, was auf den Begriff des Lebesgue-Integrals führen wird.

Warum? Also warum kann man der Meinung sein, dass der jetzige Integrationsbegriff nicht gut genug sein könnte?

Wir zeigen, dass hier an zwei Beispielen:

- (Brachistochrone-Problem, Johann Bernoulli, 1696)



Gesucht wird eine (differenzierbare) Kurve von  $A = (0, 0)^T$  nach  $B = (a > 0, b < 0)^T$  derart, dass ein Ball der von A nach B nur unter Einfluss der Schwerkraft (ohne Reibung) rollt unter allen solchen Bahnen/Kurven, die geringste Zeit benötigt.

Es gibt verschiedene Arten dieses Problem zu lösen, auf die wir hier nicht eingehen wollen. Wir geben dieses Beispiel hier vor allem, weil man es als eines der ersten *Variationsprobleme* betrachten kann: Sei  $A$  die Menge aller differenzierbaren Kurven  $y: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(0) = 0$  und  $y(a) = b$ . Man kann nachrechnen, dass der Ball für das Abfahren dieser Kurve (unter Schwerkraft) die Zeit (modulo Einheiten und Konstanten (Gravitationskonstanten))

$$T(y) = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{-y(x)}} dx$$

benötigt. Man nennt  $T: A \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein *Funktional* – das soll darauf hindeuten, dass es sich um eine Funktion handelt, deren Definitionsbereich selbst wieder aus Funktionen besteht.

Damit ist die Frage ist: Existiert

$$\min\{T(y) \mid y \in A\}$$

und wenn ja, durch welche(s)  $y \in A$  wird es angenommen? Die Antwort ist ja und die Lösungskurve ist Teil der Kurve  $r(\varphi) = R(1 - \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}))$  (in Polardarstellung). Es gibt direkte Methoden hier die Lösung zu finden. Aber bei komplizierten Minimierungen/Maximierungen von Funktionalen sind direkte Methoden schwer bis gar nicht zu finden. Deshalb versucht man es indirekt: Man nimmt sich abstrakt eine Folge  $y_n \in A$  mit  $T(y_n) \rightarrow \inf\{T(y) \mid y \in A\}$  und versucht zu

## Inhaltsverzeichnis

zeigen, dass  $y_n$  (in welchem Raum auch immer) konvergiert und der Grenzwert  $y$  das gesuchte Minimum/Maximum ist und hofft dann, mehr über  $y$  aussagen zu können. Schwierigkeit: Die Abstandsfunktionen, die wir in Analysis bis jetzt so auf  $A \subset C^1([0, a])$  kennengelernt haben, sind nicht vollständig. D.h. selbst wenn wir es schaffen würden, zu zeigen, dass  $y_n$  bzgl. einer Metrik eine Cauchyfolge ist, wissen wir nicht, ob diese konvergiert. Die Grundidee ist hier  $A$  in einer geeigneten Metrik/Norm zu vervollständigen, wie wir damals auch aus  $\mathbb{Q}$  dann  $\mathbb{R}$  gebaut haben. Das ist natürlich im gewissen Sinne 'Betrug' bzw. einfach eine Verschiebung der Schwierigkeit. Denn selbst, wenn wir in der Vervollständigung einen Limes gefunden haben, liegt der theoretisch vielleicht nicht mehr in  $A$  selbst. Das ist dann hier der eigentliche Teil der Arbeit, aber da gibt es Techniken, die relativ breit einsetzbar sind. (All das gibt mir aber am Ende nur abstrakte Existenz mit bestimmten Eigenschaften – nicht die Lösung selbst. Für kompliziertere Probleme kann man aber oft nicht mehr erwarten.)

Die für solche Arten von Problemen benutzen Normen/Metriken enthalten zu meist Integrale (im Prinzip, weil die zugehörigen Funktionale über Integrale definiert sind). Damit erhalten wir einen verallgemeinerten Integralbegriff auf der Vervollständigung.

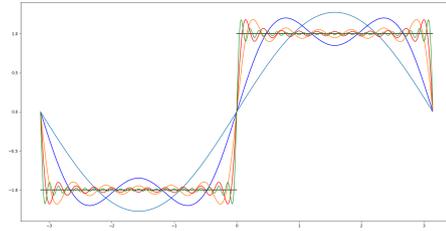
- In [2, Abschnitt 4.7] haben wir ein wenig über Fourier-Reihen gesagt. Das war: Wir nähern eine Funktion durch trigonometrische Polynome – also Funktionen der Form

$$p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Lassen wir dann  $n$  gegen unendlich gehen, erhielten wir so die Fourierreihe und die Frage war, inwieweit ist die Fourierreihe bzw. die trigonometrischen Polynome eine gute Approximation der ursprünglichen Funktion. Am Beispiel der Treppenfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi) \\ 0 & x \in \{0, \pi, -\pi\} \\ -1 & x \in (-\pi, 0) \end{cases},$$

welche als Fourierreihe  $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$  hat, haben wir gesehen, dass wir i.A. nicht erwarten können, dass die Approximationen überall punktweise gegen die ursprüngliche Funktion konvergieren. Sie tun es überall, außer bei der Sprungstelle, dort gibt es das Phänomen der Überschwinger. Das ist das sogenannte *Gibbs'sches Phänomen*. Es bezeichnet man Verhalten, dass bei abgebrochenen Fourierreihen von stückweise stetigen, differenzierbaren Funktionen in der Umgebung von Sprungstellen sogenannte Überschwingungen auftreten. Diese Überschwingungen verschwinden auch dann nicht, wenn die endliche Anzahl von Termen zur Approximation beliebig groß ist, sondern sind in der maximalen Auslenkung relativ konstant.



Bessere Informationen über die Approximation erhielten wir mit dem Begriff des quadratischen Mittel, vgl. [2, Lem. 4.7.3]. Die  $n$ .te Partialsumme  $s_n(x)$  der Fourierreihe von  $f$  konvergiert zu  $f$  in der  $L^2$ -Norm, d.h.

$$\int |f(x) - s_n(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Mehr zu Fourierreihen (und auch Fouriertransformationen) werden wir dieses Semester als Anwendung des neuen Integrationsbegriff sehen.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten das Lebesgue-Integral. Sehr oft wird der folgende Weg gewählt: Erst wird Maßtheorie behandelt und mit deren Hilfe, dass das Lebesgue-Integral eingeführt. Wir machen es, angelehnt an [4] und mit dem ersten Beispiel von oben, andersherum. Wir führen das Lebesgue-Integral über einen Vervollständigungsprozess ein, ähnlich wie wir in Analysis 1  $\mathbb{R}$  aus Vervollständigung von  $\mathbb{Q}$  definiert haben. Vervollständigt wird hier dann im Allgemeinen die Menge der kompakt getragenen stetigen Funktionen in der  $L^1$ -Norm  $\|f\|_{L^1} := \int |f| d\text{vol}$ . Maßtheorie machen wir dann ganz am Ende und werden dann wieder die Brücke zur Integration schlagen.



# 1 Integration

## 1.1 Mehrfachintegrale aus Analysis 2

In Analysis 2 haben wir Integration über Quader eingeführt, in dem wir die Idee des Riemann-Integrals auf mehr Dimensionen verallgemeinert haben. Das Volumen unter dem Funktionsgraph wird durch die Volumina von mehreren Quadern angenähert.

Fassen wir kurz zusammen, was wir dort gesehen haben:

Sei  $K = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$  für  $a_i < b_i$  ein Quader im  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ .

- **Beispiele von integrierbaren Funktionen:**

- $f$  stetig auf  $K$  [3, Satz 2.4.4]
- Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und derart, dass  $\partial\Omega$  eine  $n - 1$  dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  ist. Dann ist  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar (das heißt die charakteristische Funktion  $\chi_\Omega$  ist integrierbar auf einen Quader  $K$  mit  $\Omega \subset K$ ). [3, Satz 2.4.9]

- **Zusammenhang zu iterierten Integralen/Mehrfachintegralen** – Satz von Fubini [3, Satz 2.4.5]

- **Integration in anderen Koordinaten** – Transformationssatz [3, Satz 2.4.13]

- Gaußscher Integralsatz [3, Satz 2.4.22] und Satz von Stokes [3, Satz 2.4.25]

Damit können wir insbesondere auch stetige Funktionen mit kompaktem Träger  $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$  integrierbar. (Der Träger einer Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  war definiert als  $\text{supp } f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$ .)

### 1.1.1 Integration über $\mathbb{R}^n$

In [2, Def. 4.5.30] war  $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  als uneigentliches Integral definiert als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \int_{\beta}^0 f(x)dx + \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} f(x)dx.$$

Wir wollen nun schauen, ob es Sinn macht, auf ähnliche Weise zumindest für stetige Funktionen  $\int_{\mathbb{R}^n} f d\text{vol}$  zu definieren? Da es im  $\mathbb{R}^n$  für  $n > 1$  im Gegensatz zum  $\mathbb{R}$  nicht 'ausgezeichnete Richtungen nach unendlich' gibt, müssen wir uns etwas anderes überlegen. Eine Idee könnte sein, die Integrale über immer größer werdende Quader zu nehmen, also

## 1 Integration

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{p+[-a,a]^n} f \, \text{dvol}.$$

Hier sei  $p \in \mathbb{R}^n$  und  $p + [-a, a]^n$  soll einen Quader mit Mittelpunkt  $p$  und Seitenlängen  $a$  darstellen.

Doch schon am Fall  $n = 1$  kann man sehen, dass diese Definition i.A. keine gute Idee ist, da das Ergebnis bzw. sogar die Existenz des Limes von der Wahl von  $p$  abhängt:

Sei  $f(x) = \sin x$ . Dann ist  $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \sin x \, dx = 0$ , da der Sinus bzgl.  $x = 0$  ungerade ist. Aber  $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}-a}^{\frac{\pi}{2}+a} \sin x \, dx$  existiert nicht. Und  $\sin x$  ist nach der Definition von Analysis 1 auch nicht uneigentlich integrierbar.

Man könnte stattdessen fordern, dass der Grenzwert der Integrale für jede kompakte Ausschöpfung von  $\mathbb{R}^n$  existiert und gleich ist.

**Definition 1.1.1.** Eine *kompakte Ausschöpfung* von  $\mathbb{R}^n$  ist eine Folge  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  kompakter Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  mit  $K_i \subset K_{i+1}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  und  $\cup_i K_i = \mathbb{R}^n$ .

**Beispiel 1.1.2.** Für jedes  $p \in \mathbb{R}^n$  und jede Folge positiver Zahlen  $a_i$  mit  $a_i \rightarrow \infty$  für  $i \rightarrow \infty$  ist sowohl  $(B_{a_i}(p))_i$  als auch  $(p + [-a_i, a_i]^n)_i$  eine kompakte Ausschöpfung von  $\mathbb{R}^n$ .

Diese Definition der Integrierbarkeit auf  $\mathbb{R}^n$  stimmt für  $n = 1$  mit dem Begriff 'uneigentlich integrierbar' überein:

**Lemma 1.1.3.** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uneigentlich integrierbar. Dann ist  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} f \, \text{dvol}$  für jede kompakte Ausschöpfung  $(K_i)_i$  von  $\mathbb{R}$  mit  $K_i$  zusammenhängend\*.

*Beweis.* ÜA1 □

Ein Kriterium für Integrierbarkeit im obigen Sinne wäre:

**Lemma 1.1.4.** Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so dass  $f|_K$  für jede kompakte Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^n$  integrierbar ist. Sei  $(B_i)_i$  eine kompakte Ausschöpfung von  $\mathbb{R}$  und existiere<sup>†</sup>  $A := \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_i} |f| \, \text{dvol}$ . Dann ist  $A = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} |f| \, \text{dvol}$  für jede kompakte Ausschöpfung  $(K_i)_i$  von  $\mathbb{R}^n$ . Weiterhin existiert  $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} f \, \text{dvol}$  und ist unabhängig von der Wahl von  $(K_i)_i$ .

*Beweis.* Sei  $(K_i)_i$  eine kompakte Ausschöpfung. Es ist  $\int_{K_i} |f| \, \text{dvol}$  eine monoton steigende Folge.

Außerdem gibt es für jedes  $i \in \mathbb{N}$  ein  $j(i) \geq i$  und ein  $k(i) \geq i$  mit  $B_i \subset K_{j(i)}$  und  $K_i \subset B_{k(i)}$ . Daraus folgt

$$\int_{B_i} |f| \, \text{dvol} \leq \int_{K_{j(i)}} |f| \, \text{dvol} \quad \text{und} \quad \int_{K_i} |f| \, \text{dvol} \leq \int_{B_{k(i)}} |f| \, \text{dvol}$$

\*Das bedeutet hier einfach, dass  $K_i$  ein kompaktes Intervall ist.

<sup>†</sup>Grenzwert im eigentlichen Sinne, also nicht gleich  $\infty$ .

und somit für  $i \rightarrow \infty$

$$A = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} |f| \, d\text{vol}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass  $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} f \, d\text{vol}$  existiert und unabhängig von der Wahl von  $(K_i)_i$  ist: Dazu zeigen wir, dass  $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} f_{\pm} \, d\text{vol}$  für  $f_{\pm} := \pm \max\{\pm f, 0\}$  existiert. Dann folgt die Behauptung direkt, wegen  $\int_{K_i} f \, d\text{vol} = \int_{K_i} f_+ \, d\text{vol} + \int_{K_i} f_- \, d\text{vol}$  und dem ersten Teil des Beweises, da  $f_{\pm} = \pm |f_{\pm}|$  ist.

Nehmen wir an, dass einer der Limiten  $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} f_{\pm} \, d\text{vol}$  im eigentlichen Sinne nicht existiert. Dann existieren automatisch beide nicht, da der entsprechende Limes für  $|f| = f_+ - f_-$  existiert. Da die Folgen  $\int_{K_i} f_{\pm} \, d\text{vol}$  beide monoton sind, muss somit  $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{K_i} f_{\pm} \, d\text{vol} = \pm \infty$  sein. D.h. für alle  $m \in \mathbb{N}$  gibt es  $i_{\pm}(m) \in \mathbb{N}$  mit  $|\int_{K_{i_{\pm}(m)}} f_{\pm} \, d\text{vol}| \geq m$ . Die Folgen  $(i_{\pm}(m))_m$  können monoton steigend gewählt werden.

Wir setzen nun  $C_m := (K_{i_+(m)} \cap \text{supp } f_+) \cup (K_{i_-(m)} \cap \text{supp } f_-)$ . Dann ist  $C_m$  kompakt, da es Schnitt und Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen ist. Außerdem ist  $C_m \subset C_{m+1}$  für alle  $m$  und  $\cup_m C_m = \mathbb{R}^n$ , da  $i_{\pm}(m)$  monoton steigend ist und  $(K_i)_i$  eine kompakte Ausschöpfung ist. Also ist  $(C_m)_m$  eine kompakte Ausschöpfung von  $\mathbb{R}^n$  mit

$$\int_{C_m} |f| \, d\text{vol} = \int_{K_{i_+(m)}} f_+ \, d\text{vol} - \int_{K_{i_-(m)}} f_- \, d\text{vol} \geq 2m.$$

Doch dann könnte  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{C_m} |f| \, d\text{vol}$  nicht gleich  $A$  sein, was den Widerspruch gibt.  $\square$

Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Es ist möglich, dass  $f$  in obigem Sinne integrierbar ist,  $|f|$  jedoch nicht:

**Beispiel 1.1.5.** In der Bonusaufgabe auf Blatt 6 von Analysis 2 hatten wir gesehen, dass  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ , uneigentlich integrierbar ist. Hier ist  $|f|$  nicht uneigentlich integrierbar, ÜA1.

## 1.2 Mehr Volumina

Ab nun (auch in den folgenden Abschnitten im gesamten ersten Kapitel) sei  $K$  immer entweder ein Quader  $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$  oder  $K = \mathbb{R}^n$ .

D.h. insbesondere, wenn wir  $A \subset K$  offen schreiben und  $K$  ein Quader ist, dann meinen wir  $A$  ist offen im metrischen Raum  $(K, \text{eukl. Abstand})$ .

**Definition 1.2.1.** Sei  $A \subset K$  offen. Wir nennen eine Funktion  $c \in C_c^0(K)$  für  $A$  erlaubt, falls  $0 \leq c \leq 1$ ,  $c|_{K \setminus A} = 0$  ist. Wir definieren das *Volumen von A* als

$$\text{vol } A := \sup\{I(c) \mid c \text{ ist für } A \text{ erlaubt}\} \in [0, \infty]$$

mit  $I(c) := \int_K c \, d\text{vol}$ .

## 1 Integration

Für  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt hat jede stetige Funktion  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  automatisch kompakten Träger und es ist  $C_c^0(K) = C^0(K)$ .

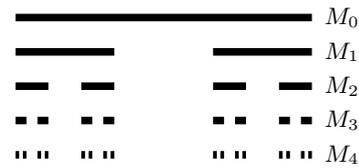
Ist  $A$  sowohl in  $K_1$  als auch in  $K_2$  offen, dann hängt das Volumen nicht davon, bzgl. welchen  $K_i$  die obige Definition angewendet wird, denn die Menge der erlaubten  $c$  ändert sich dann nicht.

**Bemerkung 1.2.2. (Vergleich zu Ana2)** Das Volumen vieler offener Mengen konnten wir auch schon in Analysis 2 berechnen. Ist zum Beispiel  $G$  das Innere einer kompakten Teilmenge deren Rand eine  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit ist, dann war in Analysis 2  $\text{vol } G = \int_G \text{dvol}$ . Der Beweis von [3, Lemma 2.4.7 und dann Satz 2.4.9, siehe insbesondere Abb. 2.6] zeigt direkt, dass dies gleich dem  $\text{vol } G$  von oben ist, denn dort wird eine Folge von für  $G$  erlaubten  $c$ , deren Integrale gegen das Supremum gehen, explizit konstruiert. Analog ist auch das Volumen des Inneren einer kompakten Menge  $G \subset \mathbb{R}^2$ , deren Rand eine stückweise  $C^1$ -Kurve ist, gleich  $\int_G \text{dvol}$  wie in Analysis 2 definiert (benutzt [3, Satz 2.4.10]).

Allgemeiner gilt: Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt mit  $\chi_G$  integrierbar, mit der Mehrfachintegraldefinition wie in Analysis 2. Dann ist  $\int_G \text{dvol}$  (in Ana2 als  $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_G \text{dvol}$  definiert) gleich dem Volumen von  $G$  aus Definition 1.2.1, ÜA.

**Vorl. 2** Allerdings ist nicht für jede offene beschränkte Menge  $G \subset \mathbb{R}^n$ , das Volumen im Sinne von Analysis 2 definiert, also  $\chi_G$  integrierbar:

**Beispiel 1.2.3.** Vgl. auch [2, ÜA 16]. Sei  $M_0 = [0, 1]$ . Wir definieren eine Folge aus Mengen  $M_n$ , wobei jedes  $M_n$  eine disjunkte Vereinigung von Intervallen ist, rekursiv wie folgt: Die Menge  $M_{n+1}$  entsteht aus  $M_n$ , indem jedes der Intervalle von  $M_n$  gedrittelt wird und das mittlere entfernt wird.



Sei  $\mathcal{C} := \bigcap_n M_n$  – die Cantormenge. Ihr Komplement  $G := [0, 1] \setminus \mathcal{C}$  ist offen. Wir werden später sehen (ÜA4), dass diese Menge vernachlässigbar (Def. 1.2.7) ist und damit  $\chi_G$  nach Satz 1.5.1 Riemann-integrierbar ist.

Man kann allerdings auf ganz ähnliche Weise eine Menge bauen, die keine Nullmenge mehr ist (in dem der mittlere Teil, der in jedem Schritt entfernt wird, immer kleiner wird) – die Smith-Volterra-Cantor-Menge  $\hat{\mathcal{C}}$ , vgl. Beispiel 1.5.2.iii. Hierfür werden wir in Satz 1.5.1 sehen, dass  $\chi_{\hat{\mathcal{C}}} := \chi_{[0,1] \setminus \hat{\mathcal{C}}}$  nicht Riemann-integrierbar ist (was daran liegen wird, dass die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $\chi_{\hat{\mathcal{C}}}$  keine vernachlässigbare Menge sein wird).

Aus der Definition folgen direkt erste Eigenschaften des Volumens:

**Lemma 1.2.4.**

- (i) Sind  $A \subset B \subset K$  offen, dann gilt  $\text{vol } A \leq \text{vol } B$ .
- (ii) Für  $A \subset \mathbb{R}^n$  offen gilt  $\text{vol } A = \lim_{a \rightarrow \infty} \text{vol } (A \cap [-a, a]^n)^*$ .

## 1.2 Mehr Volumina

*Beweis.* (i) Jede für  $A$  erlaubte Funktion aus  $C_c^0(K)$  ist auch für  $B$  erlaubt.

(ii) Aus (i) folgt, dass der Limes existiert und  $\text{vol } A \geq \lim_{a \rightarrow \infty} \text{vol}(A \cap [-a, a]^n)$  gelten muss. Sei nun  $c \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$  für  $A \subset \mathbb{R}^n$  erlaubt. Dann gibt es ein  $b \in \mathbb{R}$  mit  $\text{supp } c \subset [-b, b]^n$ . Also wäre  $I(c) \leq \text{vol}(A \cap [-b, b]^n) \leq \lim_{a \rightarrow \infty} \text{vol}(A \cap [-a, a]^n)$ . Supremum über alle für  $A$  erlaubten  $c$  gibt die reverse Ungleichung.  $\square$

Kommen wir nun zu weiteren Eigenschaften des Volumenbegriffs aus Definition 1.2.1:

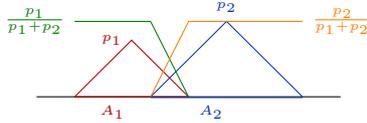
**Lemma 1.2.5.** *vol ist abzählbar subadditiv, d.h. für offene Mengen  $A_k \subset K$  gilt:\**

$$\text{vol}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol } A_k.$$

Das wird ein bisschen technisch, zeigt aber schon ein paar Beweistechniken für später. Z.B. werden wir Teile der Aussagen erst für  $K$  kompakt beweisen und den Fall  $\mathbb{R}^n$  über einen Limesprozess erhalten.

*Beweis.* Wir beginnen mit zwei offenen Mengen  $A_1$  und  $A_2$ . Sei  $c$  eine für  $A_1 \cup A_2$  erlaubte Funktion. Sei nun  $p_i(x) := \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus A_i)$ . D.h. insbesondere  $\text{supp } p_i \subset A_i$  und es ist  $p_1(x) + p_2(x) > 0$  für alle  $x \in A_1 \cup A_2$ . Wir setzen

$$c_i(x) := \begin{cases} \frac{p_i(x)}{p_1(x) + p_2(x)} c(x) & \text{für } x \in A_1 \cup A_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Die Funktion  $\frac{p_1(x)}{p_1(x) + p_2(x)}$  ist erst einmal nur auf  $A_1 \cup A_2$  wohldefiniert und dort kleiner gleich eins sowie, wo  $x \in A_1 \setminus A_2$  ist, konstant 1, vgl. Abbildung links. Da  $c$  stetig, kompakt getragen und außerhalb von  $A_1 \cup A_2$  gleich Null ist, ist  $c_1$  stetig. Analog für  $c_2$ . Außerdem ist  $c_i$  für  $A_i$  erlaubt und  $c_1 + c_2 = c$ .

Damit ist  $I(c_i) \leq \text{vol } A_i$  und

$$I(c) \leq \text{vol } A_1 + \text{vol } A_2.$$

Nehmen wir nun das Supremum über alle für  $A_1 \cup A_2$  erlaubte  $c$ , dann gibt das genau die gesuchte Ungleichung.

Induktiv erhalten wir dann die behauptete Ungleichung für endlich viele  $A_i$ . Es bleibt also der Fall, dass wir abzählbar viele  $A_i$  haben:

Wir zeigen die Behauptung zunächst für  $K$  ein Quader:

\*Hier ist nun  $A \cap [-a, a]^n$  in  $K = [-a, a]^n$  offen.

\*Hier verwenden wir die Konvention, dass  $a \leq \infty$  für alle  $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ist und dass aus  $\infty \leq b$  dann  $b = \infty$  folgt.

## 1 Integration

Sei  $c$  nun für  $\cup_i A_i$  erlaubt. Dann ist  $c_\varepsilon = \max\{c - \varepsilon, 0\}$  auch für  $\cup_i A_i$  erlaubt und  $\text{supp } c_\varepsilon$  ist kompakt und wird durch  $\cup_i A_i$  überdeckt. Also gibt es nach [3, Satz 2.3.3] eine endliche Teilüberdeckung  $A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}$  und es gilt

$$\int_K c \, d\text{vol} - \varepsilon \text{vol } K \leq \int_K c_\varepsilon \, d\text{vol} \leq \text{vol}(A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}) \leq \sum_{j=1}^k \text{vol } A_{i_j}$$

Lassen wir erst  $\varepsilon$  gegen Null gehen und nehmen dann das Supremum über alle für  $\cup_i A_i$  erlaubten  $c$ , erhalten wir

$$\text{vol } \cup_i A_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol } A_i.$$

Mit  $a \rightarrow \infty$  und letztem Lemma erhalten wir die Behauptung.  $\square$

**Lemma 1.2.6.** Sei  $d \geq 0$  eine stetige Funktion. Sei  $G_a := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x) > a\}$ . Dann gilt

$$\text{vol } G_a \leq \frac{I(d)}{a}.$$

*Beweis.* Da  $d$  stetig ist, ist  $G_a$  offen [3, Lem. 1.1.6]. Sei  $c_a$  eine für  $G_a$  erlaubte Funktion. Dann ist  $c_a(x) \leq \frac{d(x)}{a}$  und damit nach Monotonie des Integrals  $I(c_a) \leq \frac{I(d)}{a}$ .  $\square$

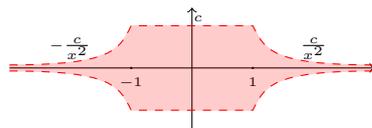
**Definition 1.2.7.** Eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  heißt *vernachlässigbar*, falls es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine offene Teilmenge  $A_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$  mit  $A \subset A_\varepsilon$  und  $\text{vol } A_\varepsilon < \varepsilon$  gibt.

Eine Aussage gilt *fast überall* bzw. *für fast alle Elemente einer Menge*, falls sie außerhalb einer vernachlässigbaren Teilmenge gilt.

Wir werden später sehen, dass die vernachlässigbaren Mengen genau die Mengen seien werden, die Lebesgue-Maß Null haben. Deshalb tritt der Begriff vernachlässigbar in der Literatur eher nicht auf, sondern man nennt solche Mengen *Lebesgue-Nullmengen*. Wir benutzen hier beide Begriffe.

**Beispiel 1.2.8.** (i)  $A := (a, b) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ , vgl. [3, ÜA29], ist vernachlässigbar: Für jedes  $\varepsilon > 0$  ist  $B_\varepsilon := (a, b) \times (-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \frac{\varepsilon}{4(b-a)})$  offen in  $\mathbb{R}^2$ , enthält  $A$  und es ist  $\text{vol } B_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ .

(ii) Eine unbeschränkte offene Menge im  $G \subset \mathbb{R}^2$  kann endliches Volumen haben, z.B.: Sei  $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < f(x)\}$  für  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit



$$x \mapsto \begin{cases} \frac{c}{x^2} & x > 1 \\ c & x \in [-1, 1] \\ -\frac{c}{x^2} & x < -1 \end{cases}$$

Dann ist  $G_a = \bar{G} \cap [-a, a]^2$  ein kompaktes Gebiet, dessen Rand eine stückweise  $C^1$ -Kurve ist. Somit ist, s. Bem. 1.2.2, für  $a$  groß genug  $\text{vol } G \cap [-a, a]^2 = \int_{G_a} d\text{vol} = 2 \int_{-a}^a f(x) dx$  und damit

$$\text{vol } G = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 4 \int_1^{\infty} \frac{c}{x^2} dx + 4c = 8c.$$

### 1.3 Lebesgue-Integral über Vervollständigung



Abbildung 1.1: Die Folge  $f_k$  aus (1.1) und ihr punktweiser Limes (die Treppenfunktion in schwarz).

Das Volumen ist also endlich. Lässt man nun verschiedene  $c$  zu, sieht man so nun auch, dass  $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$  eine vernachlässigbare Menge ist.

- (iii) Die Cantormenge  $C \subset [0, 1]$  aus Beispiel 1.2.3 und  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  sind vernachlässigbare Mengen, ÜA4.

## 1.3 Lebesgue-Integral über Vervollständigung

Es gibt verschiedene Möglichkeiten das Lebesgue-Integral einzuführen. Wir folgen hier den Ansatz von [4], für welchen man noch keine Maßtheorie braucht.

**Vorl. 3**

Sei  $c \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ . Dann setzen wir  $\|c\|_1 := I(|c|)$ .

Dann ist  $\|\cdot\|_1$  eine Norm, Übungsblatt 0, auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $C_c^0(\mathbb{R}^n)$  – die sogenannte  $L^1$ -Norm. Damit ist  $C_c^0(K)$  mit der  $L^1$ -Norm ein normierter (und damit auch insbesondere einen metrischen) Raum. Allerdings ist dieser nicht vollständig, da nicht jede Cauchyfolge konvergiert:

$$f_k(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq 1 \\ 1 & \text{für } |x| \leq 1 - \frac{1}{k} \\ \text{dazwischen linear} & \end{cases} \quad (1.1)$$

ist eine Folge in  $C_c^0(\mathbb{R})$ , die eine Cauchyfolge\* in  $L^1$  ist, ÜA2, siehe Abbildung 1.1. Würde  $f_k$  in  $L^1$  gegen ein Element  $f \in C_c^0(\mathbb{R})$  konvergieren, so muss  $f_k$  auch punktweise zu  $f$  konvergieren, ÜA2. Die Folge  $f_k$  konvergiert aber punktweise gegen eine Treppenfunktion.

### 1.3.1 Vervollständigung metrischer Räume

Aus Analysis 1 kennen wir aber schon eine Möglichkeit wie man, das Problem lösen kann, dass der metrische Raum nicht vollständig ist. Dort hatten wir  $\mathbb{Q}$  mit dem euklidischen Abstand. Wir haben dort in [2, Abschnitt 3.1] die reellen Zahlen konstruiert, in dem

\*Wdh – Definition von Cauchyfolgen in metrischen Räumen: Eine Folge  $(a_k)_k$  in einem metrischen Raum  $(X, d)$  ist eine Cauchyfolge, wenn es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $d(a_k, a_\ell) < \varepsilon$  für alle  $k, \ell \geq n$  gibt.

Da jeder normierte Raum  $(X, \|\cdot\|)$  mit  $d(x, y) := \|x - y\|$  auch ein metrischer Raum ist, ist eine Folge  $(a_k)_k$  im normierten Raum eine Cauchyfolge, wenn es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $\|a_k - a_\ell\| < \varepsilon$  für alle  $k, \ell \geq n$  gibt.

## 1 Integration

wir einfach gesprochen 'Punkte hinzugenommen hatten, die den Grenzwerten solcher Cauchyfolgen entsprechen sollten'. Das kann man für jeden metrischen Raum machen:

**Definition 1.3.1.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Sei

$$\bar{X} := \{(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge in } (X, d)\} / \sim$$

wobei  $(a_k)_k \sim (b_k)_k$  genau dann, wenn  $d(a_k, b_k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  ist.

Es ist natürlich zu überprüfen, dass  $\sim$  auf  $\bar{X}$  wirklich eine Äquivalenzrelation ist: Reflexiv und symmetrisch ist klar und transitiv folgt aus der Dreiecksungleichung.

Die Abbildung  $\iota: X \rightarrow \bar{X}$ ,  $x \mapsto [(x)_k]$ , ist injektiv, da aus  $[(x)_k] = [(y)_k]$  folgt, dass  $d(x, y) = 0$  sein muss. Damit können wir  $X$  mit  $\iota(X)$  identifizieren.

Um nun  $\bar{X}$  auch zu einem metrischen Raum zu machen, so dass auf  $\iota(X)$  wir die alte Abstandsfunktion  $d$  zurückerhalten, setzen wir:

**Satz 1.3.2.** Sei  $(X, d)$  und  $\bar{X}$  wie oben. Sei

$$\bar{d}([a_k], [b_k]) := \lim_{k \rightarrow \infty} d(a_k, b_k).$$

Dann ist  $(\bar{X}, \bar{d})$  ein vollständiger metrischer Raum. Es ist  $\iota: (X, d) \rightarrow (\iota(X), \bar{d})$ ,  $x \mapsto [(x)_k]$  eine Isometrie, d.h. die Abbildung ist bijektiv und für alle  $x, y \in X$  gilt

$$\bar{d}([(x)_k], [(y)_k]) = d(x, y).$$

Den metrischen Raum  $(\bar{X}, \bar{d})$  nennt man Vervollständigung von  $(X, d)$ .

*Beweis.* Was ist dafür alles zu zeigen?

- (i)  $\bar{d}$  ist wohldefiniert, d.h. der Limes existiert überhaupt und ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.
- (ii)  $\bar{d}$  ist auf  $\bar{X}$  eine Abstandsfunktion.
- (iii)  $(\bar{X}, \bar{d})$  ist vollständig.
- (iv)  $\iota$  ist eine Isometrie aufs Bild: Bijektiv ist klar. Bleibt noch  $\bar{d}([x], [y]) = d(x, y)$ . Das ist direkt nach Definition richtig.
- (v) Die Aussage zum Abstand.

Zu (i): Der Limes in der Definition von  $\bar{d}$  existiert: Aus der Dreiecksungleichung für  $d$  folgt

$$|d(a_k, b_k) - d(a_\ell, b_\ell)| \leq d(a_k, a_\ell) + d(b_k, b_\ell).$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $a_k$  und  $b_k$  jeweils Cauchyfolgen sind, gibt es  $k_0$ , so dass für alle  $k, \ell \geq k_0$  gilt  $d(a_k, a_\ell) < \frac{\varepsilon}{2}$  und  $d(b_k, b_\ell) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Damit folgt aus obiger Ungleichung, dass  $(d(a_k, b_k))_k$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$  ist und damit einen Limes besitzt.

### 1.3 Lebesgue-Integral über Vervollständigung

Unabhängigkeit von den gewählten Repräsentanten: Sei  $[(b_k)_k] = [(c_k)_k]$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{d}([(a_k)_k], [(b_k)_k]) &= \lim_{k \rightarrow \infty} d(a_k, b_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} d(a_k, c_k) + \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} d(b_k, c_k)}_{=0 \text{ wegen } [(b_k)_k] = [(c_k)_k]} \\ &= \bar{d}([(a_k)_k], [(c_k)_k]) \end{aligned}$$

Wegen Symmetrie in  $b$  und  $c$  folgt auch die reverse Ungleichung und damit die Gleichung. Der Beweis für den ersten Eintrag in  $\bar{d}$  geht analog.

Zu (ii): Symmetrie und Transitiv und  $\geq 0$  folgen direkt aus den entsprechenden Eigenschaften von  $d$ . Sei  $\bar{d}([(a_k)_k], [(b_k)_k]) = 0$ . Dann ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(a_k, b_k) = 0$ , was nach Definition direkt bedeutet, dass die beiden Folgen zur gleichen Äquivalenzklasse gehören.

Zu (iii): Sei  $[(a_{k\ell})_k]_\ell$  eine Cauchyfolge in  $(\bar{X}, \bar{d})$  (D.h. insbesondere auch  $a_{k\ell} \in X$ , für alle  $\ell$  ist  $(a_{k\ell})_k$  eine Cauchyfolge bzgl.  $d$ ). Wir konstruieren zuerst den Kandidaten für den Grenzwert in  $\bar{X}$ : (Das ist eine Art *Diagonalfolgenargument* – für jedes  $\ell$  sucht man ein geeignetes  $k = k(\ell)$ , so dass  $[a_{k(\ell)\ell}]$  am Ende das gewünschte tut.)

Sei nun  $\varepsilon > 0$ . Da  $[(a_{k\ell})_k]_\ell$  eine  $\bar{d}$ -Cauchyfolge ist, gibt es ein  $\ell_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $\ell, m \geq \ell_0$  gilt:  $\bar{d}([(a_{k\ell})_k], [(a_{km})_k]) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(a_{k\ell}, a_{km}) < \frac{\varepsilon}{4}$ . Also gibt es ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $k \geq k_0$  und  $\ell, m \geq \ell_0$  gilt:  $d(a_{k\ell}, a_{km}) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Da  $(a_{k\ell})_k$  für alle  $\ell$  selbst eine  $d$ -Cauchyfolge ist, gibt es für jedes  $\ell$  ein  $k(\ell) \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $k, k' \geq k(\ell)$  gilt:  $d(a_{k\ell}, a_{k'\ell}) < \frac{\varepsilon}{2}$ . O.B.d.A. können wir die Folge  $(k(\ell))_\ell$  monoton wachsend und mit  $k(\ell) \geq \ell$  wählen.

Dann gilt für alle  $\ell \geq \ell' \geq \max\{\ell_0, k_0\}$

$$d(a_{k(\ell)\ell}, a_{k(\ell')\ell'}) \leq d(a_{k(\ell)\ell}, a_{k(\ell)\ell'}) + d(a_{k(\ell)\ell'}, a_{k(\ell')\ell'}) < \varepsilon$$

und somit ist  $(a_{k(\ell)\ell})_\ell$  eine  $d$ -Cauchyfolge.

Es bleibt zu zeigen, dass  $[(a_{m\ell})_m]_\ell$  bzgl.  $\bar{d}$  zu  $[(a_{k(m)m})_m]$  konvergiert: Für  $\ell \geq \ell_0$  und  $m \geq k(\ell)$  folgt

$$d(a_{m\ell}, a_{k(m)m}) \leq d(a_{m\ell}, a_{k(m)\ell}) + d(a_{k(m)\ell}, a_{k(m)m}) < \varepsilon.$$

Bilden wir zunächst den Limes für  $m \rightarrow \infty$  und dann für  $\ell \rightarrow \infty$ , erhalten wir  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \bar{d}([(a_{m\ell})_m], [(a_{k(m)m})_m]) = 0$ .  $\square$

**Beispiel 1.3.3** (ÜA7). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subset X$ . Sei  $\bar{A}$  der Abschluss von  $A$  in  $X$  und  $(\bar{A}^d, \bar{d})$  die Vervollständigung des metrischen Raumes  $(A, d)$ . Zeigen Sie, dass  $(\bar{A}, d)$  und  $(\bar{A}^d, \bar{d})$  als metrische Räume isomorph sind, d.h. es gibt eine Bijektion  $\varphi: \bar{A} \rightarrow \bar{A}^d$  und Konstanten  $c_1, c_2 > 0$  mit

$$c_1 d(x, y) \leq \bar{d}(\varphi(x), \varphi(y)) \leq c_2 d(x, y)$$

für alle  $x, y \in \bar{A}$ .

## 1 Integration

Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein normierter Vektorraum und  $d(x, y) := \|x - y\|_X$ . Dann ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum [3, Abschnitt 3.3]. Sei  $(\bar{X}, \bar{d})$  die Vervollständigung aus letztem Satz. Dann ist  $0 := [0] \in \bar{X}$ .

**Satz 1.3.4.** Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Dann definiert

$$[a_k] + \lambda[b_k] := [a_k + \lambda b_k]$$

für  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $[a_k], [b_k] \in \bar{X}$  eine  $\mathbb{K}$ -Vektorraumstruktur auf  $\bar{X}$ . Für  $\bar{x} \in \bar{X}$  sei

$$\|\bar{x}\|_{\bar{X}} := \bar{d}(\bar{x}, 0).$$

Dann ist  $(\bar{X}, \|\cdot\|_{\bar{X}})$  ein vollständig normierter Vektorraum – also ein Banachraum.

*Beweis.* Was ist zu zeigen?

- (i)  $(a_k + \lambda b_k)_k$  ist selbst wieder Cauchyfolge bzgl.  $d$ : Folgt direkt aus der Dreiecksungleichung und der Homogenität der Norm.
- (ii) Unabhängigkeit der Addition und der skalaren Multiplikation von den Repräsentanten: Einsetzen und Nachrechnen.
- (iii) Die Vektorraumaxiome: Die folgen direkt aus denen auf  $X$ .
- (iv)  $\|\cdot\|_{\bar{X}}$  ist eine Norm auf  $\bar{X}$  (Vollständigkeit gibt der letzte Satz): Wegen

$$\|[(a_k)_k]\|_{\bar{X}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k\|_X$$

folgt  $\geq 0$ , positive Homogenität und Dreiecksungleichung direkt, da  $\|\cdot\|_X$  eine Norm ist. Es bleibt  $\|[(a_k)_k]\|_{\bar{X}} = 0$ . Dann ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(a_k, 0) = 0$  und damit  $[0] = [(a_k)_k]$ .  $\square$

**Notation:** Wir schreiben für die Vervollständigung auch oft  $\bar{X}^d$  bzw.  $\bar{X}^{\|\cdot\|_X}$ , um direkt in der Menge die Abstandsfunktion/Norm, in der vervollständigt wird zu zeigen.

### 1.3.2 Definition von $L^1$

**Definition 1.3.5.** Sei  $K = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$  für  $a_i < b_i$  oder  $K = \mathbb{R}^n$ . (Für  $K$  kompakt ist  $C_c^0(K) = C^0(K)$ .) Sei  $L^1(K)$  die Vervollständigung von  $C_c^0(K)$  bezüglich der  $L^1$ -Norm, also

$$L^1(K) := \overline{C_c^0(K)}^{\|\cdot\|_1}.$$

Jedes Element in  $L^1(K)$  ist also eine Äquivalenzklasse von  $L^1$ -Cauchyfolgen in  $C_c^0(K)$ . Nach Satz 1.3.4 ist  $L^1(K)$  wieder ein normierter Vektorraum, dessen Norm wir im Folgenden auch mit  $\|\cdot\|_1$  bezeichnen werden.

Sei  $f_k$  die Folge aus (1.1). Da es eine  $L^1$ -Cauchyfolge auf  $C_c^0(\mathbb{R})$  ist, ist  $f := [(f_k)_k] \in L^1(\mathbb{R})$ . Punktweise konvergiert  $f_k$  gegen  $\chi_{(-1,1)}$ , die charakteristische Funktion von  $(-1, 1)$ . Punktweise Konvergenz muss nicht gegeben sein, aber wenn es sie zumindest f.ü. gibt, dann helfen die Grenzfunktionen beim Verständnis der Elemente aus  $L^1$ .

**Definition 1.3.6.** Eine Funktion  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Realisierung* eines Elementes  $a \in L^1(K)$ , falls es eine  $L^1$ -Cauchyfolge  $c_k \in C_c^0(K)$  mit  $a = [c_k]$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_k(x) = f(x)$  fast überall\*.

Es ist manchmal nützlich auch zu erlauben, dass die Realisierung nur f.ü. auf  $K$  definiert sein muss. Da es völlig irrelevant ist, welche Werte  $f$  auf einer vernachlässigbaren Menge annimmt und man so diese Werte nicht extra spezifizieren muss. Das machen wir z.B. in ÜA5, wo wir uns überlegen, dass  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  eine Realisierung eines Elementes in  $L^1([0, 1])$  ist, da sagen wir nicht extra, was der Wert der Realisierung bei 0 sein soll.

**Beispiel 1.3.7.**

- (i) Es ist  $\chi_{(-1,1)}$  eine Realisierung von  $f = [(f_k)_k]$  von oben. Aber z.B. ist auch  $\chi_{[-1,1]}$  eine Realisierung von  $f$ .
- (ii) Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $\text{vol} G < \infty$ . Dann ist die charakteristische Funktion  $\chi_G: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  eine Realisierung eines Elementes in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ :

Sei zunächst  $G$  beschränkt: Sei  $c_k(x) := k \min\{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G), \frac{1}{k}\}$ . Dann ist  $c_k$  für  $G$  erlaubt und somit  $I(c_k) \leq \text{vol} G$ . Es konvergiert  $c_k \rightarrow \chi_G$  punktweise. Außerdem ist per Konstruktion  $c_k \leq c_{k+1}$  und damit ist  $I(c_k)$  monoton steigend und beschränkt. Also konvergiert  $I(c_k)$ . Wegen  $c_k \leq c_{k+1}$  ist  $\|c_{k+l} - c_k\|_1 = I(c_{k+l} - c_k) = I(c_{k+l}) - I(c_k)$  und damit  $c_k$  eine  $L^1$ -Cauchyfolge. Also ist  $[c_k] \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und  $\chi_G$  eine Realisierung dieses Elementes. Aus obigem folgt  $\|\chi_G\|_{L^1} \leq \text{vol} G$ . Wir werden auf Seite 23 sehen, dass, wie wir erwarten würden, sogar Gleichheit gilt.<sup>†</sup>

Sei nun  $G$  nicht beschränkt: Hier will man eigentlich genau dasselbe wie oben machen. Einziges Problem: Die  $c_k$  haben keinen kompakten Träger. Das kann man mit Abschneidefunktionen jedoch leicht beheben: Wir nehmen die  $c_k$  von oben und Funktionen  $\eta_k \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$  mit  $\eta_k(x) = 1$  für  $|x| \leq k$ ,  $\eta_k(x) = 0$  für  $|x| \geq k + 1$  und dazwischen linear in radiale Richtung. Wir setzen  $d_k := \eta_k c_k$ . Es ist  $d_k$  monoton steigend mit  $I(d_k) \leq \text{vol} G$ . Der Rest folgt wie oben.

Vorl. 4

- (iii) Aus [2, Bsp. 4.1.32] kennen wir die Dirichlet-Funktion

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sie ist ein Beispiel einer Funktion, die nicht Riemann-integrierbar ist. Aber es ist eine Realisierung eines Elementes in  $L^1([0, 1])$ : Sei  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$ . Dann ist  $c \in C_c^0([0, 1])$  und  $[c]$  ist als die Äquivalenzklasse der konstanten

\*Das hieß: diese Gleichheit stimmt für alle  $x \in K$  bis auf eine vernachlässigbare Menge. Anders gesagt:  $c_k$  konvergiert f.ü. punktweise gegen  $f$ .

<sup>†</sup>Man wundert sich vielleicht, was das Problem ist hier gleich Gleichheit zu zeigen. Man vergleicht einfach jedes erlaubte  $c$  mit  $\chi_G$ . Allerdings haben wir hier  $\chi_G$  nur als Realisierung eines Elementes in  $L^1$  und dort wissen wir noch nicht, dass das mit dem Vergleichen funktioniert und mit der  $L^1$ -Norm kompatibel ist. Dazu kommen wir später.

## 1 Integration

Folge  $(c)_k$  ein Element in  $L^1([0, 1])$ . Wegen  $c = f$  auf  $[0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  ist  $c = f$  fast überall und somit ist  $f$  eine Realisierung von  $[c]$ . Natürlich ist auch  $c$ , also die Nullfunktion, selbst eine Realisierung dieses Elements und  $c$  selbst ist selbstverständlich Riemann-integrierbar.

Man kann sich hier nun fragen, ob das für alle  $L^1([0, 1])$ -Elemente gilt, dass es immer eine Riemann-integrierbare Realisierung gibt und die Dirichlet-Funktion nur eine schlechte Wahl einer Realisierung ist. Das ist nicht so. wir werden noch später in Beispiel 1.5.2.iii sehen, dass es Elemente in  $L^1([0, 1])$  gibt, für die jede Realisierung nicht Riemann-integrierbar ist.

Bevor wir uns überlegen, ob es solche Realisierungen immer gibt und welche Eigenschaften dafür und für  $L^1(K)$  allgemein gelten:

### 1.3.3 Schnell konvergente Cauchyfolgen

Ein wichtiges Hilfsmittel insbesondere um zumindest punktweise Konvergenz zu erzwingen sind schnell konvergente Cauchyfolgen:

**Definition 1.3.8.** Eine Cauchyfolge  $c_k$  eines metrischen Raumes  $(X, d)$  heißt *schnell konvergent*, falls es ein  $\ell \in \mathbb{N}$  mit  $d(c_k, c_{k+1}) < \frac{\ell}{k^4}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gibt.

Es wird nicht wichtig sein, dass auf der rechten Seite der Ungleichung genau  $\frac{\ell}{k^4}$  steht. Sondern da könnte auch stattdessen jeweils ein  $\varepsilon_k^2$ ,  $\varepsilon_k > 0$ , solange  $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$  ist. Dies ist die Eigenschaft, die wir am Ende brauchen werden. Man kann sich noch fragen, warum wir nicht direkt  $\ell = 1$  verlangen. Das ist auch nur, damit z.B. die Summe schnell konvergenter Folgen direkt wieder schnell konvergent ist. Ohne das  $\ell$  müssten wir dann i.A. erst zu einer Teilfolge übergehen, würde am Ende aber keinen Unterschied machen. In ÜA3 sehen wir auch, dass jede Folge, die  $d(c_k, c_{k+1}) < \frac{\ell}{k^4}$  für ein  $\ell$  und alle  $k$  erfüllt, automatisch eine Cauchyfolge ist.

! Ist der metrische Raum aber nicht vollständig, so muss diese Folge natürlich nicht konvergieren, auch wenn sie 'schnell konvergent' heißt!

**Lemma 1.3.9.** Jede Cauchyfolge  $a_k$  eines metrischen Raumes  $(X, d)$  hat eine schnell konvergente Teilfolge.

*Beweis.* Da  $a_k$  eine Cauchyfolge ist, gilt: Für alle  $\ell \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $k_\ell \in \mathbb{N}$ , so dass  $d(a_n, a_m) < \frac{1}{\ell^4}$  für alle  $m, n \geq k_\ell$  gilt. O.B.d.A. sei  $k_{\ell+1} \geq k_\ell$  für alle  $\ell$ . Das kann man immer erreichen, denn die Eigenschaft bleibt erhalten, wenn man  $k_\ell$  größer wählt. Sei nun  $c_k := a_{k_\ell}$ . Dann ist  $c_k$  eine Teilfolge von  $a_k$  und nach Konstruktion schnell konvergent.  $\square$

**Lemma 1.3.10.** Sei  $c_k \in C_c^0(K)$  eine schnell konvergente Cauchyfolge bzgl.  $L^1$ .

(i)  $c_k$  konvergiert punktweise fast überall.

(ii) Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es eine offene Menge  $B$  mit  $\text{vol} B < \varepsilon$ , so dass  $c_k|_{K \setminus B}$  gleichmäßig konvergiert, vgl. Abbildung 1.2.

### 1.3 Lebesgue-Integral über Vervollständigung

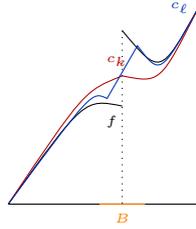


Abbildung 1.2:  $c_k$  konvergiert weg von  $B$  gleichmäßig gegen  $f$ . Am Bild sieht man, dass man eine Menge  $B$  herausnehmen muss, da nahe der Sprungstelle  $c_k$  nicht gleichmäßig gegen  $f$  konvergieren kann.

*Beweis.* Aus (ii) folgt direkt (i). Wir beweisen hier direkt (ii). Dazu setzen wir

$$D_k := \left\{ x \in K \mid |c_k - c_{k+1}| > \frac{1}{k^2} \right\}.$$

Nach Lemma 1.2.6 ist dann für  $D_k = G_{\frac{1}{k^2}}$  für die stetige Funktion  $|c_k - c_{k+1}|$

$$\text{vol } D_k \leq \frac{\|c_k - c_{k+1}\|_1}{\frac{1}{k^2}} < \frac{\ell}{k^2}.$$

(Das  $\ell$  ist das aus der Definition von schnell konvergenten Cauchyfolge). Sei nun  $N \in \mathbb{N}$  und  $x \notin \bigcup_{i=N}^{\infty} D_i$ . Dann gilt

$$|c_m(x) - c_{m+1}(x)| \leq \frac{1}{m^2}$$

für alle  $m > N$ . Also konvergiert  $c(x) := c_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k(x) - c_{k-1}(x))$  für alle  $x \notin \bigcup_{k=N}^{\infty} D_k$  sogar absolut. Wegen

$$c_k(x) = c_0(x) + \sum_{j=1}^k (c_j(x) - c_{j-1}(x)).$$

konvergiert  $c_k(x)$  damit für solche  $x$  gegen  $c(x)$ . Wegen Lemma 1.2.5 ist

$$\text{vol } \bigcup_{k=N}^{\infty} D_k \leq \sum_{k=N}^{\infty} \text{vol } D_k = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{\ell}{k^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Damit konvergiert  $(c_k(x))_n$  insbesondere fast überall.

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $N \in \mathbb{N}$  derart, dass  $\text{vol}(B := \bigcup_{k=N}^{\infty} D_k) < \varepsilon$  ist. Sei  $x \in K \setminus B$ . Dann gilt

$$|c(x) - c_k(x)| \leq \sum_{m=k+1}^{\infty} |c_m(x) - c_{m-1}(x)| \leq \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Da die rechte Seite unabhängig von  $x$  ist, konvergiert  $c_k$  gleichmäßig auf  $K \setminus B$ .  $\square$

### 1.3.4 Realisierungen von Elementen in $L^1(K)$

Im Definition 1.3.6 haben wir Realisierungen von Elementen in  $L^1(K)$  definiert. Was können wir über Realisierungen sagen?

**Satz 1.3.11.**

- (i) Jedes  $f \in L^1(K)$  hat eine Realisierung.
- (ii) Zwei Realisierungen eines Elementes in  $L^1(K)$  sind fast überall gleich.

Für  $f \in L^1(K)$  schreiben wir für eine Realisierung dann auch oft einfach  $f$  bzw.  $f(x)$ . Der letzte Satz sagt uns, dass eine Realisierung eindeutig bis auf eine Lebesgue-Nullmenge ist. D.h. insbesondere für ein  $f \in L^1(K)$  macht es keinen Sinn zu fragen, was der Wert von  $f$  an einem Punkt  $x \in K$  ist!

Andersherum schreiben wir dann der Einfachheit halber auch oft direkt für eine Realisierung  $f \in L^1(K)$ . Allerdings ist das 'abuse of notation' und man muss da aufpassen, da zwei Realisierungen  $f_1, f_2$  als Funktionen verschieden aber als Elemente in  $L^1(K)$  gleich sein können, wie der letzte Satz zeigte. Das heißt insbesondere muss man dann immer schauen, welches Gleichheitszeichen man jeweils meint, ob dass in  $L^1(K)$  oder die punktweise Gleichheit als Funktionen.

*Beweis.* (i) Sei  $f = [a_k]$  für  $a_k \in C_c^0(K)$ . Dann gibt es nach Lemma 1.3.9 eine schnell konvergente Teilfolge  $c_k$  von  $a_k$ . Nach Lemma 1.3.10 konvergiert  $c_m$  f.ü. gegen ein  $c: K \rightarrow \mathbb{R}$ . Dies ist nach Definition eine Realisierung von  $f$ .

(ii) Seien  $h(x)$  und  $g(x)$  zwei Realisierungen von  $f \in L^1(K)$ . Dann gehören dazu zwei  $L^1$ -Cauchyfolgen  $c_k, d_k$ , die fast überall punktweise gegen  $h$  bzw.  $g$  konvergieren. Da  $c_k$  und  $d_k$  beide  $f$  als Grenzwert in  $L^1$  haben, können wir eine schnell konvergente Cauchyfolge konstruieren, die sowohl von  $c_k$  als auch von  $d_k$  unendlich viele Folgenglieder erhalten: Es gilt  $c_k - d_k \rightarrow 0$  in  $L^1$ . Damit können wir zu einer Teilfolge  $(c_{k_j} - d_{k_j})_j$  übergehen, so dass  $\|c_{k_j} - d_{k_j}\| \leq \frac{1}{(2j)^4}$  und  $\|c_{k_j} - c_{k_{j+1}}\| \leq \frac{1}{(2j)^4}$  (Das ist ein analoger Beweis, wie die Existenz einer schnell konvergenten Cauchyteilfolge). Wir setzen  $a_\ell = c_{k_n}$  für  $\ell = 2n$  und  $a_\ell = d_{k_n}$  für  $\ell = 2n + 1$ . Dann ist  $a_\ell$  eine schnell konvergente Cauchyfolge, da:

$$\|a_{2n} - a_{2n+1}\|_1 \leq \|c_{k_n} - d_{k_n}\|_1 \leq \frac{1}{(2n)^4}$$

$$\|a_{2n+1} - a_{2n+2}\|_1 \leq \|d_{k_n} - c_{k_{n+1}}\|_1 \leq \|d_{k_n} - c_{k_n}\|_1 + \|c_{k_n} - c_{k_{n+1}}\|_1 \leq \frac{2}{(2n)^4}.$$

Diese schnell konvergente Cauchyfolge konvergiert nach Lemma 1.3.9 punktweise f.ü. Somit muss der Limes f.ü. sowohl mit  $h$  als auch mit  $g$  übereinstimmen. Also stimmen  $h$  und  $g$  auch f.ü. überein.  $\square$

Wir werden später sehen, dass zwei Realisierungen von  $L^1(K)$ , welche nicht f.ü. gleich sind, auch wirklich zu verschiedenen Elementen in  $L^1(K)$  gehören, s. Satz 1.3.21.

1.3 Lebesgue-Integral über Vervollständigung

**Lemma 1.3.12.** Seien  $f, g \in L^1(K)$  jeweils mit Realisierungen  $f(x), g(x)$ . Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $af(x) + g(x)$  eine Realisierung eines Elementes in  $L^1(K)$  von  $af + g \in L^1(K)$ .

*Beweis.* Das folgt direkt daraus, dass eine Linearkombination schnell konvergenter Cauchyfolgen wieder schnell konvergent ist.  $\square$

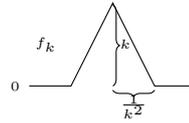
Als nächstes wollen wir schauen wie sich für eine Folge konvergenter Elemente in  $L^1$  eine Folge ihrer Realisierungen verhält.

**Lemma 1.3.13.** Sei  $g_k \in L^1(K)$  eine schnell konvergente Cauchyfolge. Sei  $g$  der Limes von  $g_k$  in  $L^1(K)$ . Dann gilt  $g_k(x) \rightarrow g(x)$  fast überall.

Sei  $f_k \in L^1(K)$ . Konvergiere  $f_k$  in  $L^1$  gegen ein  $f \in L^1(K)$ . Seien  $f_k(x)$  Realisierungen von  $f_k$ , so dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$  fast überall existiert. Dann ist  $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$  eine Realisierung von  $f$ .

*Beweis.* ÜA10  $\square$

Selbst wenn  $g_k(x)$  und  $g(x)$  aus dem letztem Lemma zusätzlich stetig ist, dann folgt die punktweise Konvergenz nicht überall. Z.B. konvergiert die Funktion  $f_k$  wie im Bild rechts in  $L^1$  gegen die Nullfunktion. Punktweise konvergiert  $f_k(x)$  nur für  $x \neq 0$  gegen Null.



Man kann die Folge  $c_k$  auch einigen besonderen Eigenschaften wählen, z.B.:

**Vorl. 5**

**Satz 1.3.14.** Sei  $f \in L^1(K)$  mit  $K$  ein Quader. Dann gibt es eine monoton fallende Cauchyfolge  $f_k \in C_c^0(K)$  mit  $f = [f_k]$ . Analog gibt es auch eine monoton steigende Cauchyfolge.

*Beweis.* Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $K$  kompakt ist: Sei  $c_k \in C_c^0(K)$  eine schnell konvergente Cauchyfolge mit  $f = [c_k]$ . Nach Lemma 1.3.10.ii gibt es für alle  $\ell \in \mathbb{N}$  eine offene Teilmenge  $B_\ell \subset K$  mit  $\text{vol } B_\ell < \frac{1}{\ell}$ , so dass  $c_k|_{K \setminus B_\ell}$  für  $k \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen  $f(x)$  konvergiert. D.h. für alle  $m \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $k(\ell, m)$ , so dass  $|f(x) - c_k(x)| \leq \frac{1}{m}$  für alle  $k \geq k(\ell, m)$  und  $x \in K \setminus B_\ell$ , vgl. auch Abbildung 1.2.

O.B.d.A. können wir durch Verkleinern von  $B_\ell$  und danach Vergrößern der  $k(\ell, m)$  immer annehmen, dass  $B_{\ell+1} \subset B_\ell$  und  $\max\{\ell, m\} \leq k(\ell, m) \leq k(\ell + 1, m + 1)$  für alle  $\ell, m$  gilt. Insbesondere gilt so  $k(m, m) \rightarrow \infty$  für  $m \rightarrow \infty$ .

Wir setzen

$$d_m(x) := c_{k(m,m)}(x) + \frac{2}{m}.$$

Es ist  $d_m \in C^0(K)$ ,  $f = [d_m]$ , da  $(c_{k(m,m)})_m$  eine Teilfolge von  $c_k$  ist und  $\frac{2}{m} \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$  ist. Insbesondere konvergiert für alle  $\ell \in \mathbb{N}$  die Folge  $d_m$  auf  $K \setminus B_\ell$  immer noch gleichmäßig zu  $f$  und es ist  $c_m(x) \geq f(x)$  für alle  $x \in K \setminus B_\ell$  und  $m \geq \ell$ . Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir auch annehmen, dass  $d_m$  schnell konvergiert.

Sei nun

$$f_m(x) := \min\{d_m(x), f_{m-1}(x)\}.$$

## 1 Integration

Dann ist  $f_m \in C^0(K)$ ,  $f_m(x) \leq d_m(x)$  und  $f_m$  ist monoton fallend. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \|f_m - d_m\|_1 &= \int_{\{x \mid f_{m-1}(x) < d_m(x)\}} (d_m - f_{m-1}) \, d\text{vol} \\ &\leq \int_{\{x \mid f_{m-1}(x) < d_m(x)\}} (d_m - d_{m-1}) \, d\text{vol} \leq \|d_{m-1} - d_m\|_1 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $m \rightarrow \infty$ , da  $d_m$  schnell konvergent ist. Also ist  $[f_m] = [d_m] = [c_m] = f$ .

Die Aussage für monoton steigend folgt analog.  $\square$

### 1.3.5 Lipschitz-Kalkül

Wie kriegt man aus Elementen in  $L^1$  neue? Auf den Funktionen in  $C_c^0(K)$  kennen wir verschiedene Operationen, die uns wieder neue Elemente aus  $C_c^0(K)$  geben, z.B. Addition, punktweises Maximum zweier Elemente, Produkt zweier Elemente, positiver Anteil.

Die Frage ist nun, ob es diese Operationen auch auf  $L^1$  gibt. Für Addition ist das z.B. möglich. Man kann zwei Elemente aus  $L^1$  addieren und erhält wieder ein Element in  $L^1$ , siehe Satz 1.3.4. Für das Produkt wird das nicht funktionieren (jedenfalls nicht so, dass es auf stetigen Repräsentanten das Erwartete tut), siehe ÜA9 zusammen mit ÜA5.

Kommen wir nun zunächst zur Frage des positiven Anteils. Wann wollen wir ein  $f \in L^1(K)$  nichtnegativ nennen und wie würden wir den 'nichtnegativen Anteil' von  $f$  definieren? Für eine Funktion  $c: K \rightarrow \mathbb{R}$  wissen wir das:  $c$  ist nichtnegativ, falls  $c(x) \geq 0$  für alle  $x \in K$  ist. Ansonsten ist

$$c_+(x) := \begin{cases} c(x) & c(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nichtnegativ – der nichtnegative Anteil von  $c$ . Mit  $c_- := -(-c)_+$  gilt dann  $c = c_- + c_+$ .

Für  $f \in L^1(K)$  könnte man nichtnegativ noch über die Realisierung definieren – also wenn diese f.ü. nichtnegativ ist. Aber beim nichtnegativen Anteil der Realisierung wäre erst einmal nicht klar, ob dieser dann wieder eine Realisierung eines Elements in  $L^1(K)$  ist. Deshalb gehen wir anders vor.

Dazu definieren wir ein gleich etwas allgemeiner ein kleines Kalkül, was uns erlaubt, mittels Lipschitzfunktionen auf  $\mathbb{R}$  aus  $L^1$ -Elementen neue Elemente in  $L^1$  zu definieren.

**Satz 1.3.15.** Sei  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz mit Lipschitzkonstante  $C$ , d.h. für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  gelte

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq C|s - t|.$$

Sei  $\varphi(0) = 0$ . Für alle  $f \in L^1(K)$  gibt es genau ein Element  $\varphi(f) \in L^1(K)$ , so dass folgende Eigenschaften gelten: Für alle  $f, g \in L^1(K)$  gilt

$$(i) \quad \|\varphi(f) - \varphi(g)\|_1 \leq C\|f - g\|_1$$

### 1.3 Lebesgue-Integral über Vervollständigung

(ii)  $\varphi(f)(x) = \varphi(f(x))$  f.ü.

Die Zusatzbedingung  $\varphi(0) = 0$  braucht man nur für  $K$  unbeschränkt, da konstante Funktionen nicht in  $L^1$  wären.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit von  $\varphi(f)$  folgt direkt aus (i), wenn man  $f = g$  wählt.

Seien  $c, d \in C_c^0(K)$ . Dann ist  $\varphi(c), \varphi(d) \in C_c^0(K)$ . Integration der Lipschitzbedingung für  $c(x)$  und  $d(x)$  ergibt

$$\|\varphi(c) - \varphi(d)\|_1 \leq C\|c - d\|_1.$$

Sei  $f = [c_k \in C_c^0(K)] \in L^1(K)$ . Nach Lemma 1.3.9 kann  $c_k$  schnell konvergent gewählt werden. Dann folgt aus der letzten Ungleichung, dass auch  $\varphi(c_k) \in C_c^0(K)$  eine schnell konvergente Cauchyfolge in  $L^1$  ist und damit ein Element  $\varphi(f)$  in  $L^1(K)$  definiert.

Sei  $f = [c_k]$  und  $g = [d_k]$ . Dann ist  $\|c_k - d_k\|_1 \rightarrow \|f - g\|_1$  und  $\|\varphi(c_k) - \varphi(d_k)\|_1 \rightarrow \|\varphi(f) - \varphi(g)\|_1$  für  $k \rightarrow \infty$ . Somit folgt (i) mit  $\|\varphi(c_k) - \varphi(d_k)\|_1 \leq C\|c_k - d_k\|_1$ .

(ii) folgt, da Lipschitzfunktionen automatisch stetig sind.  $\square$

Ein bisschen allgemeiner gilt

**Satz 1.3.16.** Sei  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz mit Lipschitzkonstante  $C$ , d.h. für alle  $s, t \in \mathbb{R}^m$  gelte

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq C|s - t|.$$

Sei  $\varphi(0, \dots, 0) = 0$ . Für alle  $f_1, \dots, f_m \in L^1(K)$  gibt es genau ein Element  $\varphi(f_1, \dots, f_m) \in L^1(K)$ , so dass folgende Eigenschaften gelten: Für alle  $f_i, g_i \in L^1(K)$  gilt

(i)  $\|\varphi(f_1, \dots, f_m) - \varphi(g_1, \dots, g_m)\|_1 \leq C \max_{i=1, \dots, m} \|f_i - g_i\|_1$

(ii)  $\varphi(f_1, \dots, f_m)(x) = \varphi(f_1(x), \dots, f_m(x))$  f.ü.

ÜA12

#### Nichtnegativ

Mit obiger Methode wollen wir nun als erstes den nichtnegativen Anteil eines  $f \in L^1(K)$  definieren. Dazu sei

$$\varphi_+(s) := \begin{cases} s & \text{für } s \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \varphi_-(s) := \begin{cases} s & \text{für } s < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Funktionen sind beide Lipschitz mit Lipschitzkonstante 1.

**Definition 1.3.17.** Für  $f \in L^1(K)$  sei  $f_{\pm} := \varphi_{\pm}(f)$ . Wir nennen  $f_+$  bzw.  $f_-$  den *nicht-positiven* bzw. *nichtnegativen Anteil* von  $f$ . Wir nennen  $f$  nichtnegativ bzw. nichtpositiv, wenn  $f = f_+$  bzw.  $f = f_-$  ist.

Sei  $f, g \in L^1(K)$ . Dann schreiben wir  $f \leq g$ , falls  $g - f$  nichtnegativ ist.

Wir sammeln kurz einige recht offensichtliche Eigenschaften von  $f_{\pm}$  und  $\geq$ :

## 1 Integration

**Lemma 1.3.18.** Sei  $f, g, f_m \in L^1(K)$ . Dann gilt

(i)  $\varphi_+(-f) = \varphi_-(f)$ ,  $f = f_- + f_+$  und  $\|f\|_1 = \|f_+\|_1 + \|f_-\|_1$  und  $I(f) := \|f_+\|_1 - \|f_-\|_1 < \infty$ .

(ii) Ist  $f$  nichtnegativ, dann ist  $\|f\|_1 = I(f)$ .

(iii) Konvergiert  $f_m \rightarrow f$  in  $L^1(K)$ , dann konvergiert  $(f_m)_\pm \rightarrow f_\pm$  in  $L^1$  und  $I(f_m) \rightarrow I(f)$  für  $m \rightarrow \infty$ .

(iv) Aus  $f \geq g$  und  $g \geq f$ , folgt  $f = g$  (Gleichheit in  $L^1(K)$ ).

Insbesondere erweitert (i) das Integral  $I$  von  $C_c^0(K)$  auf  $L^1(K)$ :

**Definition 1.3.19.** Elemente  $f$  aus  $L^1(K)$  nennen wir *Lebesgue-integrierbar* und  $I(f)$  ist das zugehörige *Lebesgue-Integral*. In Anlehnung an die Integrale zuvor schreiben wir für  $I(f)$  oft auch  $\int_K f \, d\text{vol}$ .\*

Für  $f = [c_k] \in L^1(K)$  gilt also insbesondere  $I(c_k) \rightarrow I(f)$  für  $k \rightarrow \infty$ .

*Beweis von Lemma 1.3.18.* (i)–(ii) folgen direkt aus den jeweiligen Aussagen für die approximierenden Cauchyfolgen in  $C_c^0(K)$ .

(iii) Folgt aus

$$\|(f_m)_\pm - f_\pm\|_1 = \|\varphi_\pm(f_m) - \varphi_\pm(f)\|_1 \leq \|f_m - f\|_1$$

und (i).

(iv) Nach Voraussetzung ist  $(f - g)_+ = 0$  und  $(f - g)_- = 0$ . Damit ist nach (i)  $f - g = 0$ , also  $f = g$ .  $\square$

**Lemma 1.3.20.** Sei  $f, g \in L^1(K)$  mit  $f \leq g$ . Dann ist  $I(f) \leq I(g)$ .

*Beweis.* Wegen  $I(f - g) = I(f) - I(g)$  reicht es, den Fall  $f \leq g = 0$  zu betrachten. Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $K$  ein Quader ist: Nach Satz 1.3.14 gibt es eine monotone wachsende Cauchyfolge  $c_k \in C_c^0(K)$  mit  $f = [c_k]$ . O.B.d.A. ist  $c_k$  schnell konvergent. Damit ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k(x) = f(x)$  f.ü. Aus  $f \leq 0$  folgt,  $f_+ = 0$  und damit  $(c_k)_+(x) \rightarrow 0$  f.ü. Da  $c_k$  stetig und monoton wachsend ist, folgt  $(c_k)_+ = 0$ , also  $c_k(x) \leq 0$ . Also ist  $I(c_k) \leq 0$  und damit  $I(f) \leq 0$ .

Sei nun  $K = \mathbb{R}^n$  und  $Q = [-a, a]^n$ . Dann gilt  $f|_Q \leq g|_Q$  und aus dem ersten Teil folgt  $I(f|_Q) \leq I(g|_Q)$ . Lässt man nun  $a \rightarrow \infty$  gehen, folgt die Aussage mit Lemma 1.2.4.  $\square$

**Satz 1.3.21.** Sind zwei Elemente aus  $L^1(K)$  nicht gleich, dann unterscheiden sich Realisierungen dieser Elemente durch eine Menge, die nicht vernachlässigbar ist.

*Beweis.* Der Satz folgt direkt aus der folgenden Behauptung: Aus  $f(x) = 0$  fast überall, folgt  $f = 0 \in L^1(K)$ : Wegen  $f \leq 0$ , folgt nach letztem Satz  $I(f) \leq 0$ . Analog folgt  $I(f) \geq 0$  und somit  $- \|f\|_1 = I(f) = 0$ . Also ist  $f = 0$ .  $\square$

\*Auch wenn eine Realisierung von  $f$  nicht integrierbar im Sinne von Analysis 2 ist.

Daraus folgt direkt:

**Folgerung 1.3.22.** Sei  $f \in L^1(K)$ . Dann gilt genau dann  $f = 0$  (als Element in  $L^1(K)$ ), wenn  $f(x) = 0$  f.ü.

**Zu Beispiel 1.3.7(ii):** Wir hatten dort schon gesehen, dass für  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt  $\chi_G \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und  $I(\chi_G) \leq \text{vol } G$  ist. Es bleibt noch zu sehen, dass in der letzten Ungleichung Gleichheit gilt: Gelte  $I(\chi_G) < \text{vol } G$ . Dann gibt es ein für  $G$  erlaubtes  $c$  mit  $I(\chi_G) < I(c)$ . Nach Definition von  $c$  ist dann  $(c - \chi_G)(x) \leq 0$  für alle  $x$  und nach Lemma 1.3.23 und 1.3.20 somit  $I(c - \chi_G) \leq 0$ , was den Widerspruch gibt.

Es bleibt die Frage: Ist nichtnegativ in diesem Sinne gleich der ad-hoc Definition die wir am Anfang auf den Realisierungen gegeben hätten? Ja:

Vorl. 6

**Lemma 1.3.23.** Sei  $f \in L^1(K)$ . Sei  $f(x) \geq 0$  f.ü. Dann ist  $f$  nichtnegativ.

*Beweis.* Nach Satz 1.3.15 ist  $\varphi_-(f)(x) = \varphi_-(f(x)) = 0$  f.ü. Also ist  $\varphi_-(f) = 0 \in L^1(K)$  und somit  $f = \varphi_+(f)$ .  $\square$

### Beschränken von $L^1$ -Elementen

Für  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist

$$\varphi_a(s) := \begin{cases} -a & \text{für } s \leq -a \\ s & \text{für } -a < s < a \\ a & \text{für } a \leq s \end{cases}$$

Lipschitz und wir können obigen Kalkül verwenden.

**Definition 1.3.24.** Sei  $f \in L^1(K)$ . Wir nennen  $f$  beschränkt, falls  $f = \varphi_a(f)$  für ein  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt.

**Lemma 1.3.25.**

- (i)  $f \in L^1(K)$  ist genau dann beschränkt, wenn es eine gleichmäßig beschränkte\*  $L^1$ -Cauchyfolge  $c_k \in C_c^0(K)$  mit  $f = [c_k]$  gibt.
- (ii)  $f \in L^1(K)$  ist genau dann beschränkt, wenn es eine Realisierung von  $f$  gibt, die f.ü. beschränkt ist.
- (iii) Ist  $f \in L^1(K)$  beschränkt, dann gibt es ein kleinstes  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $f = \varphi_a(f)$ . Wir definieren dann  $\|f\|_\infty$  als dieses  $a$ .

Wegen (ii) findet man in der Literatur statt dem Begriff 'beschränkt' für Elemente in  $L^1(K)$  auch den Begriff 'wesentlich beschränkt', da eine Realisierung von  $f$  (und damit nach Satz 1.3.11 jede Realisierung von  $f$ ) f.ü. beschränkt (Das heißt man könnte es auch 'f.ü. beschränkt' nennen.).

$\|\cdot\|_\infty$  ist eine Norm auf den beschränkten Elementen aus  $L^1(K)$  und stimmt für  $L^1$ -Elemente mit einer Realisierung aus  $c \in C^0(K)$  mit der Supremumsnorm  $\sup_{x \in K} |c(x)|$  überein. ÜA14

\*Gleichmäßig beschränkt heißt: Es gibt ein  $a \in \mathbb{R}$ , so dass  $|c_k| \leq a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

## 1 Integration

*Beweis.* (i) Sei  $|c_k| \leq a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\varphi_a(c_k) = c_k$ . Somit ist  $\varphi_a(f) = [\varphi_a(c_k)] = [c_k] = f$ . Sei andererseits  $\varphi_a(f) = f$  für ein  $a \geq 0$  und sei  $f = [c_k]$ . Dann ist  $[\varphi_a(c_k)] = \varphi_a(f) = f = [c_k]$  und  $\varphi_a(c_k) \in C_c^0(K)$  ist gleichmäßig beschränkt.

(ii) Sei  $f \in L^1(K)$  beschränkt. Dann folgt aus (i), dass  $f = [c_k]$  für eine gleichmäßig beschränkte Cauchyfolge  $c_k$  ist. Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert diese f.ü. punktweise gegen eine Realisierung, die damit f.ü. beschränkt sein muss.

Sei nun  $f \in L^1(K)$  mit einer Realisierung  $f(x)$ , die f.ü. beschränkt ist. Dann ist  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k(x)$  f.ü. für eine schnell konvergente Cauchyfolge  $c_k$  mit  $f = [c_k]$ . Sei  $|f(x)| \leq a$  f.ü. Wir betrachten  $\varphi_{2a}(c_k)$ . Dann ist  $[\varphi_{2a}(c_k)] = \varphi_{2a}(f)$  und  $\varphi_{2a}(f)(x) = \varphi_{2a}(f(x)) = f(x)$  fast überall. Nach Satz 1.3.21 ist somit  $\varphi_{2a}(f) = f$  und  $f$  damit beschränkt.

(iii) Sei nun  $f \in L^1(K)$  beschränkt. Sei  $a := \inf\{b \geq 0 \mid \varphi_b(f) = f\}$ . Wir müssen zeigen, dass dieses Infimum angenommen wird.

Wir beschränken uns auf  $K$  ein Quader. Der Fall  $K = \mathbb{R}^n$  folgt, dann direkt, da  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$  genau dann beschränkt ist, wenn  $f|_{[-a,a]^n}$  für alle  $a > 0$  beschränkt ist.

Wir beginnen mit  $f \geq 0$ . Sei  $b_i$  eine Folge mit  $\varphi_{b_i}(f) = f$  und  $b_i \rightarrow a$  (existiert da  $f$  beschränkt ist.) Also ist  $f(x) \leq b_i$  f.ü. für alle  $i$ . Nach Satz 1.3.14 existiert eine monoton steigende Cauchyfolge  $c_k \in C_c^0(K)$  mit  $f = [c_k]$ . Dann ist auch  $(c_k)_+ \in C_c^0(K)$  und eine monoton steigende Cauchyfolge und  $[(c_k)_+] = f_+ = f = [c_k]$ . Damit ist  $|(c_k)_+(x)| \leq b_i$  f.ü. für alle  $k$  und  $i$ . Da aber  $(c_k)_+$  stetig ist, gilt diese Ungleichung überall. Da dies für alle  $i$  gilt, ist damit  $|(c_k)_+| \leq a$  für alle  $k$ . Somit ist  $\varphi_a(f) = [\varphi_a((c_k)_+)] = [(c_k)_+] = f$ .

Ist nun  $f = f_+ + f_-$ , machen wir das einzeln für  $f_{\pm}$  und erhalten dadurch  $a_{\pm}$  als kleinste Zahlen mit  $f_{\pm} = \varphi_{a_{\pm}}(f_{\pm})$ . Das gesuchte  $a$  ist dann das Maximum von  $a_+$  und  $a_-$ .  $\square$

**Lemma 1.3.26.** Für alle  $f \in L^1(K)$  gilt  $\varphi_a(f) \rightarrow f$  in  $L^1$  für  $a \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $f \in L^1(K)$  ist, gibt es ein  $c \in C_c^0(K)$  mit  $\|f - c\|_1 < \varepsilon$ . Wegen Satz 1.3.15.i folgt  $\|\varphi_a(f) - \varphi_a(c)\|_1 < \varepsilon$  für alle  $a > 0$ . Da  $c \in C_c^0(K)$  automatisch beschränkt ist, gibt es ein  $b \in \mathbb{R}$ , so dass  $\varphi_a(c) = c$  für alle  $a \geq b$  gilt.

Somit gilt dann für alle  $a \geq b$

$$\|\varphi_a(f) - f\|_1 \leq \|\varphi_a(f) - c\|_1 + \|c - f\|_1 < 2\varepsilon$$

und die Behauptung folgt.  $\square$

Das letzte Lemma kann man manchmal, z.B. beim nächsten Satz, gewinnbringend verwenden: Man zeigt eine Behauptung erst für beschränkte Elemente (ist manchmal leichter) und bildet dann für beliebiges  $f$  den Grenzwert für  $\varphi_a(f)$  für  $a \rightarrow \infty$ .

**Satz 1.3.27.** Seien  $f, g, h \in L^1(K)$  jeweils mit Realisierungen  $f(x), g(x), h(x)$ . Sei  $h$  beschränkt. Dann ist  $h(x)f(x)$  eine Realisierung eines Elementes in  $L^1(K)$ . Dieses

### 1.3 Lebesgue-Integral über Vervollständigung

Element ist unabhängig von den gewählten Realisierungen und wir bezeichnen es mit  $hf$ . Außerdem gilt

$$h(f + g) = hf + hg \quad (1.2)$$

und

$$\|hf\|_1 \leq \|h\|_\infty \|f\|_1. \quad (1.3)$$

*Beweis.* Sei zunächst auch  $f$  beschränkt. Sei  $h = [c_k]$  und  $f = [d_k]$  mit  $c_k$  und  $d_k$  jeweils gleichmäßig beschränkt. Dann ist auch  $c_k d_k$  gleichmäßig beschränkt und eine Cauchyfolge, da aus

$$c_k d_k - c_m d_m = (c_k - c_m) d_k + c_m (d_k - d_m) \quad (1.4)$$

$$\|c_k d_k - c_m d_m\|_1 \leq \|d_k\|_\infty \|c_k - c_m\|_1 + \|c_m\|_\infty \|d_k - d_m\|_1$$

folgt. Wir definieren  $hf := [c_k d_k] \in L^1(K)$ . Man kann direkt überprüfen, dass dieser Limes nicht von der Wahl der Folgen  $c_k$  und  $d_k$  abhängt.

Um zu zeigen, dass  $h(x)f(x)$  eine Realisierung von  $hf$  ist, wählen wir die Cauchyfolgen  $c_k$  und  $d_k$  als schnell konvergent. Dann folgt aus (1.4), dass auch  $c_k d_k$  schnell konvergent ist und somit fast überall gegen  $h(x)f(x)$  konvergiert.

Die weiteren Eigenschaften folgen für  $f, g$  beschränkt dann direkt aus Konstruktion.

Kommen wir nun zum allgemeinen Fall: Nur  $h$  muss beschränkt sein. Sei  $f \in L^1(K)$ . Dann folgt aus obigem das  $h\varphi_a(f) \in L^1(K)$ . Wegen

$$\|h\varphi_a(f) - h\varphi_b(f)\|_1 = \|h(\varphi_a(f) - \varphi_b(f))\|_1 \leq \|h\|_\infty \|\varphi_a(f) - \varphi_b(f)\|_1$$

und  $\varphi_a(f) \rightarrow f$  in  $L^1$  nach Lemma 1.3.26, folgt dass  $h\varphi_a(f)$  eine  $L^1$ -Cauchyfolge ist und somit eine Element in  $L^1(K)$  definiert, welches wir  $hf$  nennen. Dann folgt (1.2) und (1.3) im Limes aus den entsprechenden Aussagen  $\varphi_a(f)$  und  $\varphi_a(g)$ .  $\square$

#### Betrag

Die Betragsfunktion  $x \mapsto |x|$  ist Lipschitz. Somit ist für  $f \in L^1(K)$  auch  $|f| \in L^1(K)$ .

Da  $|x| = \varphi_+(x) + \varphi_-(x)$  ist, folgt  $|f| = f_+ + f_-$ .

#### Maximum/Minimum zweier $L^1$ -Funktionen

Sei

$$\varphi_{max} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \mapsto \max \{a, b\}.$$

Man sieht mittels Fallunterscheidung direkt, dass  $\varphi_{max}$  eine Lipschitzfunktion ist. Aus Satz 1.3.16 folgt somit, dass für  $f, g \in L^1(K)$  auch  $\max\{f, g\} := \varphi_{max}(f, g) \in L^1(K)$  ist und

$$\varphi_{max}(f, g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{f.ü.}$$

## 1 Integration

gilt. Rekursiv kann man so auch  $\max\{f_1, \dots, f_k\} \in L^1(K)$  für  $f_i \in L^1(K)$  definieren. Die Definition des Minimum folgt analog.

Mit etwas mehr Arbeit werden wir auch nachher sehen, dass man unter Zusatzvoraussetzungen auch das Supremum/Infimum von abzählbar vielen  $L^1$ -Elementen definieren kann.

### 1.3.6 Komplexwertige Funktionen

Die Definition für  $L^1$  kann man auf komplexwertige Funktionen ausweiten:

$$L^1(K, \mathbb{C}) := \overline{C_c^0(K, \mathbb{C})}^{\|\cdot\|_1},$$

wobei  $C_c^0(K, \mathbb{C})$  nun die stetigen kompakt getragenen Funktionen von  $K$  nach  $\mathbb{C}$  sind und die  $L^1$ -Norm genau wie für reelle Funktionen definiert ist. Dann gilt alles was wir davor gemacht haben, sofern es prinzipiell Sinn ergibt.  $\geq 0$  macht keinen Sinn auf komplexen Zahlen, da wir da keine Ordnungsrelation haben.

Allgemein hat man aber den Lipschitzkalkül ganz genau so wie in Satz 1.3.15 für  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  Lipschitz. Der Beweis bleibt gleich. Damit hat man z.B. direkt:

**Folgerung 1.3.28.** Sei  $f \in L^1(K, \mathbb{C})$ . Dann ist  $|f|, \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L^1(K) =: L^1(K, \mathbb{R})$ .

*Beweis.* Anwenden des Lipschitzkalküls auf die Lipschitzfunktionen  $z \mapsto |z|$ ,  $z \mapsto \operatorname{Re} z$  bzw.  $z \mapsto \operatorname{Im} z$ .  $\square$

$\varphi_a$  wie auf Seite 23 macht erst einmal auch nicht, da es über eine Ordnungsrelation definiert war. Beschränktheit kann man aber definieren, in dem man sagt:  $f \in L^1(K, \mathbb{C})$  ist beschränkt, falls  $|f| \in L^1(K)$  beschränkt ist. So kann man auch für beschränkte Elemente in  $L^1(K, \mathbb{C})$  die Supremumsnorm als  $\|f\|_\infty := \||f|\|_\infty$  definieren.

## 1.4 Konvergenzsätze

**Vorl. 7** Während wir in Analysis 1 Integration und Grenzwerte von Funktionenfolgen i.A. nur für gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen auf kompakten Intervallen vertauschen können, werden wir nun sehen, dass wir auf  $L^1$  allgemeinere Sätze haben, die wesentlich die Vollständigkeit von  $L^1$  nutzen. Inwieweit man unter Zusatzvoraussetzungen doch ähnliche Sätze für das Riemann-Integral hat werden wir in Abschnitt 1.5.1 sehen

**Satz 1.4.1** (Monotonie Konvergenz in  $L^1$ ). Seien  $f_n \in L^1(K)$  mit  $f_n \leq f_{n+1}$ \* für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $(I(f_n))_n$  beschränkt. Dann existiert ein  $f \in L^1(K)$  mit  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1$ . Weiterhin gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) = \int f(x)$  f.ü. und  $I(f_n) \rightarrow I(f)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

\*Hier wieder das  $\leq$  für  $L^1$ -Elemente. D.h. diese Relation gilt für die Realisierungen punktweise nur f.ü.

*Beweis.* Wegen  $f_n \leq f_{n+1}$  folgt aus Lemma 1.3.18.iv, dass  $I(f_n)$  eine monoton wachsende Folge ist. Da sie außerdem beschränkt ist, existiert ihr Limes. Also gilt für  $n \geq m \geq n_0$

$$\|f_n - f_m\|_1 \stackrel{f_n \geq f_m}{=} I(f_n - f_m) = I(f_n) - I(f_m) \rightarrow 0$$

für  $n_0 \rightarrow \infty$ . Somit ist  $f_n$  eine  $L^1$ -Cauchyfolge und konvergiert damit gegen ein  $f \in L^1(K)$ .  $\square$

Durch Übergang auf  $-f_n$  gilt die analoge Aussage auch für monoton fallende Folgen.

Als erste Anwendung werden wir unter gewissen Zusatzvoraussetzungen mittels dieses Konvergenzsatzes das Supremum einer Folge von  $L^1$ -Funktionen definieren.

**Lemma 1.4.2.** *Sei  $g_n \in L^1(K)$ ,  $g \in L^1(K)$  mit  $|g_n(x)| \leq g(x)$  f.ü. für alle  $n$ . Dann gibt es  $\sup_{n \in \mathbb{N}} g_n \in L^1(K)$ , so dass*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) = \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n \right)(x) \quad \text{f.ü.}$$

*Beweis.* Sei  $h_n := \max\{g_1, \dots, g_n\}$ . Dann ist  $h_n \in L^1(K)$ ,  $h_n \leq h_{n+1} \leq g$  und somit ist  $(I(h_n))_n$  beschränkt. Aus dem Lemma der monotonen Konvergenz folgt somit, dass  $h_n$  gegen ein  $h \in L^1(K)$  konvergiert, für das  $\sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = h(x)$  f.ü. gilt. Dieses  $h$  ist also das gesuchte  $\sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$ .  $\square$

Eine Verallgemeinerung des Satzes der monotonen Konvergenz ist

**Satz 1.4.3** (Lemma von Fatou). *Sei  $f_k \in L^1(K)$ ,  $f_k \geq 0$ . Dann ist  $\liminf_{k \rightarrow \infty} I(f_k) = \infty$  oder  $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \in L^1(K)$  mit*

$$I\left(\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k\right) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I(f_k).$$

*Beweis.* ÜA16  $\square$

**Satz 1.4.4** (Satz von Lebesgue, Majorisierte Konvergenz). *Sei  $f_n, g \in L^1(K)$ . Die Folge  $f_n(x)$  konvergiere punktweise f.ü. und es sei  $|f_n| \leq g$ . Dann konvergiert  $f_n$  in  $L^1(K)$  gegen ein  $f$  und  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  f.ü.*

*Beweis.* Nach Lemma 1.4.2 ist  $f_n^{max} := \sup_{k \geq n} f_k \in L^1(K)$ . Es gilt  $f_n^{max} \geq f_{n+1}^{max} \geq -g$ . Nach Satz 1.4.1 konvergiert  $f_n^{max}$  in  $L^1$  gegen ein  $f^{max}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{max}(x) = f^{max}(x)$  f.ü. Da  $f_n(x)$  f.ü. konvergiert, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{max}(x) = f^{max}(x) \quad \text{f.ü.}$$

Analog können wir  $f_n^{min} = \inf_{k \geq n} f_k \in L^1(K)$  definieren und erhalten  $f_n^{min} \rightarrow f^{min}$  in  $L^1$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{min}(x) = f^{min}(x) \quad \text{f.ü.}$$

## 1 Integration

Somit gilt  $f^{\min}(x) = f^{\max}(x)$  f.ü. Damit ist  $f^{\min} = f^{\max} =: f$  in  $L^1(K)$  nach Satz 1.3.21.

Wegen  $f_n^{\min} \leq f_n \leq f_n^{\max}$  folgt,  $(f_n^{\min} - f)_\pm \leq (f_n - f)_\pm \leq (f_n^{\max} - f)_\pm$  und damit  $I((f_n^{\min} - f)_\pm) \leq I((f_n - f)_\pm) \leq I((f_n^{\max} - f)_\pm)$ . Also  $I((f_n - f)_\pm) \rightarrow 0$  und somit muss  $f_n$  in  $L^1$  auch gegen  $f^{\min}$  konvergieren.  $\square$

Mit Hilfe der Konvergenzsätze können wir ein Kriterium, wann eine Folge  $c_k \in C_c^0(K)$  ein Element in  $L^1(K)$ , ohne dass wir direkt überprüfen müssen, dass es sich um eine  $L^1$ -Cauchyfolge handelt.

**Satz 1.4.5** (Integrabilitätskriterium). *Sei  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass es eine Folge  $c_k \in C_c^0(K)$  mit  $c_k(x) \rightarrow f(x)$  f.ü.\* und ein  $g \in L^1(K)$  mit  $|f(x)| \leq g(x)$  f.ü. gibt. Dann ist  $f \in L^1(K)$ .*

*Beweis.* Sei  $f_k := \max\{\min\{2g, c_k\}, -2g\}$  wie auf Seite 25 definiert. Dann ist  $f_k \in L^1(K)$ . Damit ist  $|f_k| \leq 2g$ . Außerdem konvergiert  $f_k$  noch immer f.ü. punktweise gegen  $f$ , da  $|f| \leq g$  ist. Aus dem Satz von Lebesgue folgt nun  $f \in L^1(K)$ .  $\square$

**Folgerung 1.4.6.** *Sei  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass es eine Folge  $c_k \in C_c^0(K)$  mit  $c_k(x) \rightarrow f(x)$  f.ü. gibt. Sei  $|c_k| \leq \alpha$ . Sei  $g \in L^1(K)$ . Dann ist  $fg \in L^1(K)$  mit*

$$\left| \int_K gf \, d\text{vol} \right| \leq \alpha \|g\|_1.$$

*Insbesondere folgt, ist  $f \in L^1(K)$  und beschränkt, dann gilt*

$$\left| \int_K gf \, d\text{vol} \right| \leq \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

*Beweis.* Sei  $g = [d_k]$  mit  $d_k(x) \rightarrow f(x)$  f.ü. Dann ist  $c_k d_k \in C_c^0(K)$ ,  $c_k d_k(x) \rightarrow f(x)g(x)$  f.ü. und  $|fg| \leq \alpha g$ . Nach dem Integrabilitätskriterium ist somit  $fg \in L^1(K)$  und  $I(c_k d_k) \rightarrow I(fg)$ . Wegen Monotonie des Integrals ist  $|\int_K c_k d_k \, d\text{vol}| \leq \alpha \|d_k\|_1$  und es folgt die gesuchte Ungleichung durch Limesbildung.  $\square$

Eine weitere kleine Anwendung der Konvergenzsätze:

**Beispiel 1.4.7.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und sei  $f'$  beschränkt. Dann ist  $f'$  Lebesgue-integrierbar<sup>†</sup> mit

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Sei  $g_n(x) := n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$ . Dann ist  $g_n \in C^0([a, b])$ , da  $f$  stetig ist. Außerdem gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein  $\xi_{n,x} \in [\alpha, \beta]$  mit  $|g_n| \leq$

\*Die Bedingung, der Approximation durch die  $c_k$ -Folge, ist in dem Ansatz der erst Maßtheorie entfernt, durch die Forderung der Messbarkeit von  $f$  ersetzt – dazu mehr später.

<sup>†</sup> $f'$  muss nicht Riemann-integrierbar sein, vgl. [6, S.80 ff].

$|f'(\xi_{n,x})|$ . Da  $f'$  beschränkt ist, ist somit  $g_n$  gleichmäßig beschränkt. Wegen  $g_n(x) \rightarrow f'(x)$  für alle  $x$  folgt mit dem Integrierbarkeitskriterium, dass  $f' \in L^1([\alpha, \beta])$  mit  $I(f') = \lim_{n \rightarrow \infty} I(g_n)$  ist.

Sei nun  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ . Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt  $F' = f$  und damit

$$\begin{aligned} \int_a^b g_n(x) dx &= n \int_a^b \left( f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) dx \\ &= n \left( \int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f\left(x + \frac{1}{n}\right) dx - \int_a^b f(x) dx \right) \\ &= n \left( F\left(b + \frac{1}{n}\right) - F(b) - F\left(a + \frac{1}{n}\right) + F(a) \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} F'(b) - F'(a) = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

## 1.5 Vergleich mit dem Riemann-Integral aus Analysis 1

Treppenfunktionen auf  $[a, b]$ , vgl. [2, Def. 4.5.1], sind Realisierungen von Elementen in  $L^1([a, b])$ , und es ist  $I(f)$  gleich dem Riemann-Integral  $\int_a^b f(x) dx$ , ÜA6.

Vorl. 8

**Satz 1.5.1.** *Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann ist  $f$  genau dann Riemann-integrierbar, wenn  $f$  fast überall stetig ist. Ist  $f$  Riemann-integrierbar, dann ist  $f$  auch Lebesgue-integrierbar und beide Integrale stimmen überein.*

*Beweis.* Zuerst sei  $f$  Riemann-integrierbar. Wir zeigen, dass  $f$  in  $L^1$  ist und  $I(f)$  mit dem Riemann-Integral aus [2, Abschnitt 4.5.6] übereinstimmt:

Da  $f$  Riemann-integrierbar ist, gibt es nach dem Riemannsches Integrationskriterium [2, Satz 4.5.40] für alle  $k \in \mathbb{N}$  eine Zerlegung  $\mathcal{Z}_k$ , so dass für die zugehörigen Treppenfunktionen  $g_k$  zur Untersumme bzw.  $h_k$  zur Obersumme gilt:  $I(h_k) - I(g_k) < \varepsilon$ .

Da alles Treppenfunktionen sind, sind  $g_k, h_k$  in  $L^1([0, 1])$ . Nach Wahl der Zerlegungen  $\mathcal{Z}_k$  gilt:  $g_k \leq g_{k+1} \leq h_1$  und  $h_k \geq h_{k+1} \geq g_1$ . Da  $f$  Riemann-integrierbar ist, folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 g_k(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 h_k(x) dx$ . Da  $g_k, h_k$  Treppenfunktionen sind, sind ihre Riemann-Integrale gleich ihrem Lebesgue-Integral.  $g_k$  ist also eine monoton steigende Folge in  $L^1(K)$  mit  $(I(g_k))_k$  beschränkt. Also konvergiert  $g_k$  nach dem Satz zur monotonen Konvergenz in  $L^1$  gegen ein  $g$  mit  $I(g) = \limsup_{k \rightarrow \infty} I(g_k)$ . Analog konvergiert  $h_k$  in  $L^1$  gegen ein  $h$  mit  $I(h) = \limsup_{k \rightarrow \infty} I(h_k)$ . Wegen  $g_k \leq h_k$  ist auch  $g \leq h$ . Mit dem Integrationskriterium von oben folgt  $I(g) = I(h)$ . Wegen  $h - g \geq 0$  ist somit  $\|h - g\|_1 = I(h - g) = 0$  und damit  $g = h$  in  $L^1(K)$ . Da jedoch  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  f.ü. gilt, folgt  $f \in L^1(K)$ .

O.B.d.A. sei  $[a, b] = [0, 1]$ . Sei nun  $\mathcal{Z}_k = \{j2^{-k} \mid 0 \leq j \leq 2^k, j \in \mathbb{N}\}$ . Dann ist  $\mathcal{Z}_k \subset \mathcal{Z}_{k+1}$ . Seien  $g_k$  bzw.  $h_k$  die zugehörigen Treppenfunktionen wie oben. Da  $g_k$  bzw.  $h_k$  monoton sind und  $f$  beschränkt ist, ist  $I(g_k) \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} f$  und

## 1 Integration

$I(h_k) \geq (b-a) \inf_{x \in [a,b]} f$  und damit folgt, dass es Funktionen  $g, h$  mit  $g_k(x) \rightarrow g(x)$  und  $h_k(x) \rightarrow h(x)$  für alle  $x$  und  $g, h \in L^1([0, 1])$ .

Sei  $R := \cup_k \mathcal{Z}_k$  und  $C$  die Menge der Punkte, in denen  $f$  stetig ist. Wir werden zunächst zeigen:

$$\{x \mid g(x) = h(x)\} \cap ([0, 1] \setminus R) \subset C \subset \{x \mid g(x) = h(x)\}. \quad (1.5)$$

Für die erste Inklusion sei  $\varepsilon > 0$  und  $x_0 \in [0, 1] \setminus R$  mit  $g(x_0) = h(x_0)$ . Dann gibt es  $k \in \mathbb{N}$  mit  $h_k(x_0) - g_k(x_0) < \varepsilon$  und ein  $j \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$  mit  $x_0 \in I_{j,k} := (j2^{-k}, (j+1)2^{-k})$  ( $x_0$  liegt also im Inneren eines Intervalls der Zerlegung  $\mathcal{Z}_k$ ). Für alle  $x \in I_{j,k}$  gilt damit

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sup_{y \in I_{j,k}} f(y) - \inf_{y \in I_{j,k}} f(y) = h_k(x_0) - g_k(x_0) < \varepsilon$$

und somit ist  $f$  in  $x_0$  stetig, was die erste Inklusion beweist.

Für die zweite Inklusion sei  $x_0 \in C$ , also  $f$  in  $x_0$  stetig. Dann gibt es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $x \in [0, 1]$  mit  $|x - x_0| < \delta$ . Sei  $k_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $2^{-k_0} \leq \delta$ . Dann gibt es für alle  $k \geq k_0$  ein  $j \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$  mit  $x_0 \in I_{j,k} \subset [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ . Daraus folgt

$$0 \leq h_k(x_0) - g_k(x_0) = \sup_{x \in I_{j,k}} (f(x) - f(x_0)) - \inf_{x \in I_{j,k}} (f(x) - f(x_0)) < \varepsilon$$

Damit folgt  $h(x_0) - g(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} (h_k(x_0) - g_k(x_0)) = 0$ , also auch die zweite Inklusion.

Sei nun  $f$  Riemann-integrierbar. Dann folgt aus dem ersten Teil dieses Beweises, dass  $g = h$  als  $L^1$ -Elemente und damit ihre Realisierung f.ü. übereinstimmen. Damit muss wegen (1.5)  $f$  f.ü. stetig sein.

Sei nun  $f$  f.ü. stetig. Dann ist wegen (1.5)  $g(x) = h(x)$  f.ü. (da  $R$  als Teilmenge von  $\mathbb{Q}$  selbst vernachlässigbar ist). Damit muss nach Satz 1.3.21  $g = h$  als  $L^1$ -Elemente sein. Also muss  $\int_0^1 (g_k - h_k) d\text{vol} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  und damit ist  $f$  Riemann-integrierbar.  $\square$

### Beispiel 1.5.2.

- (i) Die Dirichletfunktion ist in jedem Punkt unstetig und somit folgt auch mit letztem Satz, dass sie nicht Riemann-integrierbar ist.
- (ii) Die Thomaesche Funktion aus [2, Bsp. 4.1.42.iii] ist überall stetig außer auf  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  und damit Riemann- und Lebesgue-integrierbar. Da die Funktion fast überall Null ist, ist ihr Integral gleich Null.
- (iii) Wir machen eine ähnliche Konstruktion wie bei der Cantormenge, aber die entstehende Menge wird dieses Mal nicht vernachlässigbar sein:

$M_0 = [0, 1]$ ,  $M_1 = M_0 \setminus (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ ,  $M_2 = M_1 \setminus ((\frac{3}{16}, \frac{5}{16}) \cup (\frac{11}{16}, \frac{13}{16}))$ . .. Allgemein entsteht  $M_{n+1}$  aus  $M_n$ , indem in jedem Teilintervall von  $M_n$  das 'mittlere Intervall'

## 1.5 Vergleich mit dem Riemann-Integral aus Analysis 1

der Länge  $2^{-n-1}$  entfernt wird. Damit ist  $\text{vol } M_{n+1} = (1 - 2^{-n-1})\text{vol } M_n = \prod_{j=0}^n (1 - 2^{-j-1})$ .

Sei  $M = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$  – das ist die *Smith-Volterra-Cantor Menge*. Dann ist  $\text{vol } M = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - 2^{-j-1}) > 0$  (Begründung unten). Es ist  $\chi_{M_n} \rightarrow \chi_M$  punktweise monoton fallend,  $\chi_{M_n} \in L^1([0, 1])$  (da Treppenfunktion) mit  $\|\chi_{M_n}\|_1 = \text{vol } M_n$ . Damit folgt mit dem Satz zur monotonen Konvergenz:  $\chi_M \in L^1([0, 1])$  mit  $\|\chi_M\|_1 = \text{vol } M$ .

Die Behauptung ist nun, dass  $\chi_M$  keine Riemann-integrierbare Realisierung hat: Wenn wir wüssten, dass (Begründung unten) in jedem Teilintervall  $J \subset [0, 1]$  die Menge  $\{\chi_M(x) = 0\} \cap J$  nicht vernachlässigbar ist, dann stimmt diese Aussage auch noch für jede andere Realisierung  $f$  von  $\chi_M$ . Damit muss die Untersumme von  $f$  einer beliebigen Zerlegung von  $[0, 1]$  gleich Null sein. Wenn  $f$  Riemann-integrierbar wäre, folgt daraus, dass das Riemann-Integral gleich Null wäre. andererseits müsste das Riemann-Integral aber gleich dem Lebesgue-Integral, also  $\text{vol } M > 0$  sein, was den Widerspruch gibt.

Es bleibt also noch die zwei fehlenden Begründungen zu geben:

$\prod_{j=0}^{\infty} (1 - 2^{-j-1}) > 0$ : Dazu werden wir zeigen, dass  $\sum_{j=0}^{\infty} -\ln(1 - 2^{-j-1})$  konvergiert, dann folgt die Behauptung durch Anwenden der Exponentialfunktion. Für  $x \in (0, 1)$  gilt nach Taylor  $-\ln(1 - x) = x + \frac{1}{2}\xi_x^2$  für ein  $\xi_x \in (0, x)$ . Also ist  $-\ln(1 - 2^{-j-1}) \leq 2^{-j-1} + 2^{-2j-3}$  und damit  $\sum_{j=0}^{\infty} -\ln(1 - 2^{-j-1}) \leq \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-j-1} + 2^{-2j-3}) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} < \infty$ .

Sei  $J \subset [0, 1]$  ein Teilintervall. Die Menge  $M_n$  ist eine disjunkte Vereinigung von  $2^n$ -Intervallen gleicher Länge. Damit geht diese Länge mit  $n \rightarrow \infty$  gegen Null. Da  $M_{n+1} \subset M_n$  ist, gibt es also ein  $n$  ab dem es für jedes  $M_n$  und damit auch für  $M$  ein Teilintervall  $U \subset J$  gilt:  $\chi_{M_n}|_U = \chi_M|_U = 0$ . Dieses  $U$  ist also insbesondere nicht vernachlässigbar.

Für die ursprüngliche Cantormenge ist das anders, da diese vernachlässigbar ist. D.h.  $\chi_{Cantor} \in L^1$  mit Norm Null. Damit hat  $\chi_{Cantor}$  die Nullfunktion als eine Riemann-integrierbare Realisierung.

Ein Teil des letzten Satzes hat eine Entsprechung für den Integralbegriff aus Analysis 2:

**Vorl. 9**

**Satz 1.5.3.** *Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein Quader und  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Ist  $f$  integrierbar (im Sinne von Analysis 2), dann ist  $f$  auch Lebesgue-integrierbar und beide Integrale stimmen überein.*

*Beweis.* Für  $f = \chi_G$  mit  $G \subset Q$  offen, ist dies die Sonderübungsaufgabe und allgemeines  $f$  geht dann analog. □

In höheren Dimensionen kann man jedoch Integrierbarkeit (wie in Analysis 2) nicht so schön charakterisieren wie für das Riemann-Integral.

## 1 Integration

Kommen wir nun noch zu uneigentlich Riemann-integrierbaren Funktionen und der Frage, ob diese Lebesgue-integrierbar sind:

**Satz 1.5.4.** *Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein (nicht unbedingt beschränktes) Intervall und sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf jedem kompakten Teilintervall von  $I$  Riemann-integrierbar. Dann ist  $f \in L^1(I)^*$  genau dann, wenn  $|f|$  auf  $I$  uneigentlich Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall ist das Lebesgue-Integral von  $f$  gleich seinem uneigentlichen Riemann-Integral.*

Der letzte Satz impliziert insbesondere, dass, für  $f \geq 0$ , ein solches  $f$  wie im letzten Satz genau dann uneigentlich Riemann-integrierbar ist, wenn es Lebesgue integrierbar ist.

*Beweis.* Sei  $I = (a, b)$  mit  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  und  $a_n, b_n$  Folgen mit  $a < a_n < b_n < b$ ,  $a_n \searrow a$  und  $b_n \nearrow b$ . Dann ist nach letztem Satz das Riemann-Integral von  $|f|: [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}$  gleich dem Lebesgue-Integral. Wir können den Satz über monotone Konvergenz auf die Folge  $f_n := |f| \chi_{[a_n, b_n]}$  anwenden, da diese monoton, in  $L^1(\mathbb{R})$  und  $I(f_n)$  kleiner gleich dem uneigentlichen Riemann-Integral von  $|f|: I \rightarrow \mathbb{R}$  ist und damit in  $n$  beschränkt ist. Damit erhalten wir, dass  $|f| \chi_I$  Lebesgue-integrierbar ist und wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |f| \chi_{[a_n, b_n]} d\text{vol} = \int_I |f| d\text{vol}$$

ist das Lebesgue-Integral von  $|f|$  gleich seinem uneigentlichen Riemann-Integral. Die Aussage zu  $f$  folgt nun, da dies alles auch für  $f_{\pm}$  einzeln gilt.  $\square$

### Beispiel 1.5.5.

- (i)  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ , ist uneigentlich Riemann-integrierbar, aber  $|f|$  nicht (ÜA1). Damit ist  $f$  nicht in  $L^1((0, \infty))$ .
- (ii) Für  $x > 0$  ist  $f_x: t \in [0, \infty) \mapsto e^{-t} t^{x-1}$  uneigentlich Riemann-integrierbar, da für  $x \in [\alpha, \beta] \subset (0, \infty)$

$$0 \leq f_x(t) \leq \begin{cases} t^{\alpha-1} & 0 < t \leq 1 \\ M(\beta) e^{-t/2} & t \geq 1 \end{cases}$$

gilt<sup>†</sup> und die rechte Seite integrierbar ist, vgl. Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale [2, Satz 4.5.32]. Nach letztem Satz ist  $f_x$  damit Lebesgue-integrierbar. Das Integral gibt die *Gammafunktion*:

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Erste Eigenschaften:  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  (partielle Integration) und damit folgt aus  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$  mit Induktion  $\Gamma(n+1) = n!$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Die Gamma-Funktion kommt in verschiedensten Kontexten häufig vor, z.B.

\*Strenggenommen haben wir z.B.  $L^1((a, b))$  noch nicht definiert. Dazu kommen wir allgemeiner noch später. Aber  $f \in L^1((a, b))$  soll einfach bedeuten, dass die Fortsetzung durch Null in  $L^1(\mathbb{R})$  ist.

<sup>†</sup>Das  $M(\beta)$  ist eine obere Schranke an die Funktion  $t^{\beta-1} e^{-t/2}$  für  $t \geq 1$ .

- Das Volumen von  $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$  ist gleich  $\frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ , ÜA20.
- Die Funktionen  $f_x$  (mal geeigneter Konstante, s.u.) bzw. Skalierungen\* dieser werden in der Statistik in der Gamma-Verteilung verwendet. Die Gamma-Verteilung ist eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung – d.h. das Integral dieser Verteilung über einem Intervall  $[a, b]$  gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine Zufallsgröße, die sich gemäß dieser Verteilung verhält, Werte im Bereich  $[a, b]$  annimmt. Da die Gesamtwahrscheinlichkeit für irgendeinen Wert immer 1 also 100% ist, kommt die Gamma-Funktion in der Konstante zu dieser Verteilung vor. Die Verteilung wird z.B. in der Warteschlangentheorie, um die Bedienzeiten oder Reparaturzeiten zu beschreiben und in der Versicherungsmathematik zur Modellierung kleinerer bis mittlerer Schäden verwendet.
- In bestimmten Modellen der statistischen Mechanik.
- In vielen Asymptotiken oder Darstellung von speziellen Funktionen, z.B. ist  $J_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(\nu+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu}$ . Die  $J_\nu$  sind die Besselfunktionen, das ist eine Lösung von  $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{x^2-\nu^2}{x^2}y = 0$  für  $\nu \in \mathbb{R}$ ,  $\nu \geq 0$ , [3, Bsp. 3.7.4].

### 1.5.1 Konvergenzsätze für Riemann-Integrale?

Eine Rechtfertigung dafür, dass wir das Riemann-Integral von Analysis 1 bzw. das Mehrfachintegral von Analysis 2 noch verallgemeinern wollen, ist immer, dass sich dafür Integrale von Funktionenfolgen nicht so gut verhalten. Da  $L^1$  jedoch extra vollständig gebaut wurde, haben wir dort die Konvergenzsätze des letzten Abschnittes.

In diesem Abschnitt wollen wir uns kurz der Frage widmen, ob man in den Konvergenzsätzen des letzten Abschnittes nicht doch immer einfach  $L^1$  durch Riemann-integrierbar oder integrierbar im Sinne von Analysis 2 ersetzen könnten?

Schauen wir uns dazu den Satz zur monotonen Konvergenz an: Wir würden dort gerne mit einer monotonen Folge Riemann-integrierbarer Funktionen  $f_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  starten und noch fordern, dass  $(I(f_k))_k$  beschränkt ist. Das Problem ist nun, dass der punktweise Limes von  $f_n$ , selbst wenn er in allen Punkten existiert, nicht Riemann-integrierbar sein muss. Beispiel: Sei  $r_k$  eine Abzählung der rationalen Zahlen in  $[0, 1]$ . Sei  $f_k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{r_0, r_1, \dots, r_k\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist jedes  $f_k$  stetig bis auf in endlich vielen Punkten und damit Riemann-integrierbar. Der punktweise Limes ist aber die Dirichletfunktion und die ist nicht Riemann-integrierbar.

---

\*D.h.  $t \mapsto bt$ .

## 1 Integration

Wenn man aber im obigen Szenario zusätzlich fordert, dass der punktweise Limes Riemann-integrierbar ist, dann folgt auch, dass die Integrale konvergieren. Das ist dann aber nur ein Spezialfall vom Satz zur monotonen Konvergenz 1.4.1, da nach Satz 1.5.1 aus Riemann-Integrierbarkeit Lebesgue-integrierbar folgt.

**Satz 1.5.6** (Beschränktes Konvergenztheorem von Arzelà). *Seien  $f_k, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar. Konvergiere  $f_k(x)$  f.ü. zu  $f(x)$  und sei  $(f_k)_k$  gleichmäßig beschränkt. Dann gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Diesen Satz kann man elementar, also ohne Lebesgue-Integrale beweisen. Das ist eher aufwändig aber machbar. Wir können diesen Satz hier aber als Spezialfall des Satzes zur majorisierten Konvergenz verstehen:

*Beweis.* Nach Satz 1.5.1 ist  $f_k, f \in L^1([a, b])$ . Da  $f_k$  gleichmäßig beschränkt ist, gibt es ein  $M > 0$  mit  $|f_k| \leq M$ . Die konstante Funktion mit Wert  $M$  ist auch ein Element in  $L^1([a, b])$ . Dann folgt mit dem Satz zur majorisierten Konvergenz 1.4.4, dass  $f_k \rightarrow f$  in  $L^1$  und damit auch  $I(f_k) \rightarrow I(f)$  gilt.  $\square$

## 1.6 Parameterintegrale

In [3, Abschnitt 2] haben wir schon Parameterintegrale in einer Variablen für stetige Funktionen betrachtet. Es gibt auch eine Version von [3, Satz 2.1.1] für Mehrfachintegrale über stetige Funktionen:

**Satz 1.6.1** (Stetigkeit von Parameterintegralen für Mehrfachintegrale über stetige Funktionen). *Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  ein Quader. Sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $f: U \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist*

$$\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_Q f(x, y) d\text{vol}_y$$

*stetig.*

Der Beweis ist exakt genau wie in [3, Satz 2.1.1]. Dort hatten wir uns nur deshalb auf den Fall  $n = 1$  beschränkt, da wir Mehrfachintegrale erst danach eingeführt haben.

Für  $L^1$  erhalten wir nun einen allgemeineren Satz:

**Satz 1.6.2** (Stetigkeit von Parameterintegralen für  $L^1$ ). *Sei  $(\Lambda, d)$  ein metrischer Raum und sei  $f: K \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ . Es gelte*

(i)  $f(\cdot, \lambda) \in L^1(K)$  für alle  $\lambda \in \Lambda$

(ii)  $f(x, \cdot) \in C^0(\Lambda, \mathbb{R})$  für fast alle  $x \in K$

(iii) Es gibt ein  $g \in L^1(K)$  mit  $|f(\cdot, \lambda)| \leq g$  für alle  $\lambda \in \Lambda$ .

Dann ist

$$F: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto I(f(\cdot, \lambda))$$

wohldefiniert und stetig.

*Beweis.* Wohldefiniert folgt direkt aus (i). Für die Stetigkeit überprüfen wir die Folgenstetigkeit. Dazu sei  $\lambda_m \rightarrow \lambda$  in  $\Lambda$  und  $f_m := f(\cdot, \lambda_m)$ . Wegen (ii) konvergiert  $f_m(x) \rightarrow f(x, \lambda)$  f.ü. Mit dem Satz von Lebesgue 1.4.4 folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F(\lambda_j) = \lim_{m \rightarrow \infty} I(f_m) = I(f(\cdot, \lambda)) = F(\lambda). \quad \square$$

Auch für die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen gibt es eine  $L^1$ -Version:

**Satz 1.6.3** (Differenzierbarkeit von Parameterintegralen). *Sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen und sei  $f: K \times U \rightarrow \mathbb{R}$ . Es gelte*

(i)  $f(\cdot, y) \in L^1(K)$  für alle  $y \in U$

(ii)  $f(x, \cdot) \in C^1(U)^*$  für fast alle  $x \in K$

(iii) Es gibt ein  $g \in L^1(K)$  mit  $|\partial_{y_j} f(\cdot, y)| \leq g$  für alle  $y \in U$  und  $1 \leq j \leq m$ .

Dann ist

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto I(f(\cdot, y))$$

stetig differenzierbar mit

$$\partial_{y_j} F(y) = I(\partial_{y_j} f(\cdot, y)) \quad \text{für alle } y \in U, 1 \leq j \leq m.$$

*Beweis.* Sei  $y \in U$  und  $1 \leq j \leq m$ . Sei  $h_k \in \mathbb{R}$  eine Nullfolge und für  $x \in K$  und  $k \in \mathbb{N}$  sei

$$f_k(x) := \frac{1}{h_k} (f(x, y + h_k e_j) - f(x, y)).$$

Es gilt  $f_k \in L^1(K)$  wegen (i). Verwenden wir nun den Mittelwertsatz [2, Satz 4.2.13] auf die  $j$ .te Koordinate von  $y$ , erhalten wir

$$|f_k(x)| \leq \sup_{\lambda \in U} |\partial_{y_j} f(x, \lambda)| \leq g(x) \quad \text{f.ü.}$$

Außerdem ist  $f_k(x) \rightarrow \partial_{y_j} f(x, y)$  für  $k \rightarrow \infty$ . Damit folgt nach dem Satz von Lebesgue 1.4.4.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{h_k} (F(y + h_k e_j) - F(y)) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(f_k) = I(\partial_{y_j} f(\cdot, y)).$$

Damit ist  $F$  partiell differenzierbar mit  $\partial_{y_j} F(y) = I(\partial_{y_j} f(\cdot, y))$ . Mit Satz 1.6.2 folgt, dass diese partiellen Ableitungen stetig sind.  $\square$

---

\* $C^1(U)$  war die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen  $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 1 Integration

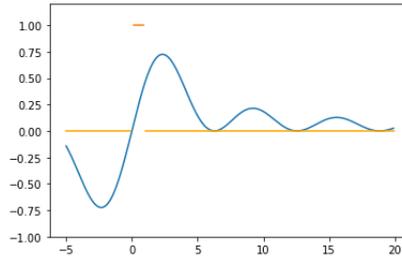


Abbildung 1.3:  $g(t) = \chi_{(0,1)}$  in orange. Dann ist  $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(xt)g(t)dt = \int_0^1 \sin(xt)dt = \frac{1-\cos x}{x}$  (in blau) in  $L^1$  und sogar stetig (hier sogar glatt).

Diese Sätze können wir also insbesondere auch direkt für  $K = \mathbb{R}^n$  anwenden. In Ana2 mussten wir den Fall von uneigentlichen Parameterintegralen noch extra betrachten und hatten im Gegensatz zum Integral über einem kompakten Intervall Zusatzvoraussetzungen zur gleichmäßigen Konvergenz bzgl. der Parameter, vgl. [3, Satz 2.1.3].

**Vorl. 10 Beispiel 1.6.4.** Die Gammafunktion, Beispiel 1.5.5, ist unendlich oft differenzierbar:

$f(t, x) = e^{-t}t^{x-1}$  ist für alle  $t$  in  $x$  unendlich oft differenzierbar mit  $\partial_x^k f(t, x) = (\ln t)^k e^{-t}t^{x-1}$ . Es ist für alle  $x \in (\alpha, \beta)$ :

$$|(\ln t)^k e^{-t}t^{x-1}| \leq g_k(t) := \begin{cases} |\ln t|^k t^{\alpha-1} & 0 < t \leq 1 \\ M(\beta, k)e^{-\frac{t}{2}} & t \geq 1 \end{cases}$$

Die rechte Seite ist integrierbar (muss man nachrechnen\*). Also ist nach Satz 1.6.3 (iterativ angewendet) die Gammafunktion auf  $x \in (\alpha, \beta)$  und damit auf ganz  $\mathbb{R}$  unendlich oft differenzierbar.

**Beispiel 1.6.5.** Sei  $g \in L^1(\mathbb{R})$ . Sei  $f(t, x) := \sin(xt)g(t)$ . Dann ist  $f(\cdot, x) \in L^1(\mathbb{R})$  für alle  $x$  nach Folgerung 1.4.6 und  $f(t, \cdot) \in C^0(\mathbb{R})$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Weiterhin ist  $|f(t, x)| \leq |g(t)|$  für alle  $x$ . Damit folgt noch Satz 1.6.2 das

$$x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \sin(xt)g(t)dt$$

stetig ist, s. Beispiel in Abbildung 1.3

Analog folgt  $x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \cos(xt)g(t)dt$  ist stetig und für  $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ist

$$x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}g(t)dt$$

stetig in  $x$ . Dies wird später (bis auf eine Konstante) die Fouriertransformation werden.

\*Für  $\alpha > 0$  ist  $\int_0^1 (\ln t)^k t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\alpha} t^\alpha (\ln t)^k \Big|_0^1 - \frac{k}{\alpha} \int_0^1 t^{\alpha-1} (\ln t)^{k-1} dt \stackrel{\text{IH op.}}{=} -\frac{k}{\alpha} \int_0^1 t^{\alpha-1} (\ln t)^{k-1} dt$ .

## 1.7 Satz von Fubini und Transformationssatz

Wir wollen nun noch einige Sätze aus Analysis 2 auf  $L^1$ -Elemente übertragen:

**Satz 1.7.1** (Fubini in  $L^1$ ). Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ . Dann gilt

- (i)  $f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m)$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $f(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$  für fast alle  $y \in \mathbb{R}^m$
- (ii) Es ist  $x \mapsto I(f(x, \cdot)) =: \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) d\text{vol}_y$  eine Realisierung eines Elementes in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  und analog  $y \mapsto I(f(\cdot, y))$  eines in  $L^1(\mathbb{R}^m)$  und es gilt.

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f d\text{vol} = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) d\text{vol}_x \right) d\text{vol}_y = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) d\text{vol}_y \right) d\text{vol}_x.$$

Was ist nochmal genau mit ' $f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m)$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$ ' gemeint? Damit meinen wir, dass es für fast alle  $x$  ein Element in  $L^1(\mathbb{R}^m)$  gibt, so dass  $y \mapsto f(x, y)$  eine Realisierung dieses Elementes ist.

*Beweis.* Wir betrachten den Fall  $f \geq 0$  – der Rest folgt mit der Zerlegung  $f = f_+ + f_-$ . Seien  $K_1 \subset \mathbb{R}^n$  und  $K_2 \subset \mathbb{R}^m$  Quader. Wir zeigen den Satz zunächst für  $f = f \chi_{K_1 \times K_2}$ : Nach Satz 1.3.14 gibt es eine monoton wachsende Folge  $f_j \in C^0(K_1 \times K_2)$ , die in  $L^1$  gegen  $f$  konvergiert und welche wir außerhalb von  $K_1 \times K_2$  durch Null fortsetzen. Da  $f \geq 0$  ist, kann durch Übergang zu  $x \mapsto \max\{0, f_j\}$  auch  $f_j \geq 0$  gewählt werden. Dann ist  $f_n(x, \cdot) \in C^0(K_1 \times K_2)$  ebenfalls monoton wachsend.

Für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , für die  $(I(f_j(x, \cdot)))_j$  beschränkt ist, konvergiert nach Satz 1.4.1  $f_j(x, \cdot)$  in  $L^1$  und punktweise gegen  $f(x, \cdot)$ .

Damit fehlt für (i) noch, dass  $(I(f_j(x, \cdot)))_j$  für fast alle  $x$  beschränkt ist: Sei

$$D_a := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sup_j I(f_j(x, \cdot)) > a\}.$$

Die Mengen  $D_{j,a} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid I(f_j(x, \cdot)) > a\}$  ist offen, da  $x \mapsto I(f_j(x, \cdot))$  nach Satz 1.6.1 (angewendet auf einen Quader  $Q$  mit  $\text{supp } f_j \subset Q$ ) stetig ist. Damit ist  $D_a = \cup_j D_{j,a}$  wieder offen.

Jedes  $f_j$  hat Support in  $K_1 \times K_2$  – also in einem Quader. Damit können wir für  $f_j$  Fubini für stetige Funktionen auf Quadern [3, Satz 2.4.5] anwenden. Dann ist

$$I(f) \leftarrow I(f_j) = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f_j(x, y) d\text{vol}_y \right) d\text{vol}_x \stackrel{f_j \geq 0}{\geq} \int_{D_a} a = a \text{vol } D_a$$

und somit muss  $\text{vol } D_a \rightarrow 0$  für  $a \rightarrow \infty$  sein. Also ist  $\sup_n I(f_j(x, \cdot)) < \infty$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Die analoge Aussage für  $y$  folgt genauso.

(ii) Die Abbildung  $g_j: x \mapsto I(f_j(x, \cdot))$  ist für alle  $j$  stetig auf  $K_1$  und Null sonst, und  $(g_j)_j$  ist monoton wachsend, da  $f_j$  es ist. Außerdem ist nach Fubini  $I(g_j) =$

## 1 Integration

$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_j d\text{vol} = I(f_j)$ . Da  $I(f_j) \rightarrow I(f)$  geht, ist somit  $I(g_j)$  in  $j$  beschränkt. Nach dem Satz über monotone Konvergenz folgt somit, dass  $\lim_{j \rightarrow \infty} g_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ist und

$$\left(\lim_{j \rightarrow \infty} g_j\right)(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} (g_j(x)) = \lim_{j \rightarrow \infty} I(f_j(x, \cdot)) = I(f(x, \cdot)) \quad \text{f.ü.}$$

Analoge Aussage erhalten wir für  $y$ . Insbesondere folgt mit Fubini für die  $f_j$  so nun aus mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) d\text{vol}_y \right) d\text{vol}_x \leftarrow I(g_j) = I(f_j) \rightarrow I(f)$$

für  $j \rightarrow \infty$  der Fubini für  $f$ .

Es bleibt der Fall, wo  $f$  keinen Repräsentanten mit Träger in einem Quader besitzt: Dann folgt die Aussage, indem man eine Überdeckung von  $\mathbb{R}^n$  durch Quader  $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$  nimmt, deren Innere paarweise disjunkt und paarweise höchstens Seitenflächen gemeinsam haben. Sei nun  $f_j$  auf dem Inneren von  $Q_i$  gegeben durch die Approximation von  $f \chi_{Q_i}$  von oben. Dann folgt der Rest analog.  $\square$

Wir kommen nun noch zum Transformationssatz. Dazu sei führen wir noch eine Notation ein: Für  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ist  $f \chi_V \in L^1(\mathbb{R}^n)$  nach Folgerung 1.4.6. Wir setzen:

$$\int_V f d\text{vol} := \int_{\mathbb{R}^n} f \chi_V d\text{vol}$$

Weiterhin sagen wir  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  ist (eine Realisierung eines Elementes) in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  ( $V$  noch immer offen), wenn  $f \chi_V \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ist.

**Satz 1.7.2** (Transformationssatz für  $L^1$ ). *Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\varphi: U \rightarrow V$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus. Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist*

$$\int_V f(y) d\text{vol}_y = \int_U f(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| d\text{vol}_x$$

*Beweis.* Folgt aus der stetigen Version aus Analysis 2 [3, 2.4.13]: Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  Sei  $f = [c_k]$ . Weiterhin gibt es nach Beispiel 1.3.7.ii eine Folge  $d_k \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp } d_k \subset V$ ,  $0 \leq d_k \leq 1$  und  $d_k \rightarrow \chi_V$  in  $L^1$  für  $k \rightarrow \infty$ . Dann ist  $f \chi_V = [c_k d_k]$  und wir können den Transformationssatz für stetige Funktionen [3, 2.4.13] auf jeden Quader  $Q \subset \mathbb{R}^n$  mit  $Q \subset V$  anwenden. Da  $\text{supp } d_k \subset V$ ,  $V$  offen und  $\text{supp } d_k$  offen ist, ist  $\text{dist}(\text{supp } d_k, \mathbb{R}^n \setminus V) > 0$  und damit gibt es für  $\ell = \ell(k)$  groß genug eine Überdeckung von  $\text{supp } d_k$  mit Teilquadern der Seitenlänge  $\frac{1}{\ell}$ , die alle in  $V$  liegen, vgl. Abbildung 1.4. Summieren wir den Transformationssatz für alle diese Teilquader auf, erhalten wir so:

$$\int_V (c_k d_k)(y) d\text{vol} = \int_U ((c_k d_k) \circ \varphi)(x) |\det D\varphi(x)| d\text{vol}_x$$

und

$$\int_V |(c_k d_k)(y)| d\text{vol} = \int_U |((c_k d_k) \circ \varphi)(x)| |\det D\varphi(x)| d\text{vol}_x$$

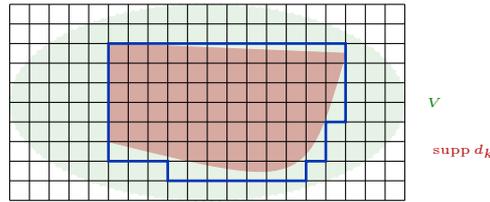


Abbildung 1.4: Da der Abstand  $\text{dist}(\text{supp } d_k, \mathbb{R}^n \setminus V) > 0$  ist, gibt es eine Zerlegung von  $\mathbb{R}^n$  in disjunkte, kongruente Teilquader, die klein genug sein, so dass eine Teilmenge von denen (im Bild, die innerhalb der blauen Kurve)  $\text{supp } d_k$  überdeckt und vollständig in  $V$  liegt.

insbesondere ist  $|(c_k d_k) \circ \varphi| |\det D\varphi| \chi_U \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Mit  $k \rightarrow \infty$  folgt die Behauptung, da  $c_k d_k$  in  $L^1$  gegen  $f \chi_V$  konvergiert und damit auch  $((c_k d_k) \circ \varphi) |\det D\varphi|$  in  $L^1$  konvergiert (Der Grenzwert hat  $f \circ \varphi |\det D\varphi(x)| \chi_U$  als Realisierung, da es f.ü. der punktweise Limes sein muss).  $\square$

**Beispiel 1.7.3.** Wir können Fubini und den Transformationssatz verwenden um noch einmal (auf anderem Wege als in ÜA18)  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$  zu berechnen:

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d\text{vol} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d\text{vol} \stackrel{\text{Polarkoord.}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\varphi = \pi e^{-r^2} \Big|_0^\infty = \pi. \end{aligned}$$

## 1.8 Lebesgue-Räume

Für  $c \in C_c^0(K)$  definieren wir für  $p \in [1, \infty)$

$$\|c\|_p := \left( \int_K |c|^p d\text{vol} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Für  $p = \infty$  und  $c: K \rightarrow \mathbb{R}$  sei

$$\|c\|_\infty := \sup_K |f(c)|.$$

Dieses  $\|\cdot\|_\infty$  ist für Elemente  $c \in C_c^0(K) \subset L^1(K)$  genau dem Wert aus Lemma 1.3.25.iii.

Wir werden bald sehen, dass das eine Norm sein wird. Man kann die gleiche Definition auch für  $p \in (0, 1)$  verwenden, allerdings wird es dann keine Norm mehr sein, da dann die Dreiecksungleichung nicht mehr gelten wird – ÜA24.

Für  $p \in [1, \infty]$  definieren wir den *konjugierten Exponenten*  $p' \in [1, \infty]$  durch

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{für } p \in (1, \infty)$$

und  $(1)' := \infty$  und  $(\infty)' := 1$ .

## 1 Integration

**Lemma 1.8.1** (Hölder und Minkowski für  $C_c^0$ ). Seien  $f, g \in C_c^0(K)$ . Sei  $p \in [1, \infty]$  und  $p'$  der konjugierte Exponent.

(i)

$$\left| \int_K fg \, d\text{vol} \right| \leq \int_K |fg| \, d\text{vol} \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \quad (\text{Hölder-Ungleichung})$$

(ii)

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (\text{Minkowski-Ungleichung})$$

*Beweis.* (i) Die erste Ungleichung und für  $p \in \{1, \infty\}$  auch die zweite Ungleichung folgen aus [3, Satz 2.4.4]. Sei nun  $p \in (1, \infty)$ . Für  $f$  oder  $g$  gleich 0 sind beide Seiten gleich Null.

Es bleibt also der Fall, dass sowohl  $f$  als auch  $g$  nicht konstant Null sind. Dann ist  $\|f\|_p > 0$  und  $\|g\|_{p'} > 0$ . Nach [2, Folg. 4.4.4] gilt für  $a, b \geq 0$  die Young-Ungleichung

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^{p'}}{p'}$$

Wir setzen  $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$  und  $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}}$  und dann liefert Integration über  $x$  und die Monotonie des Integrals

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

und damit die Behauptung.

(ii) Für  $p = \infty$  folgt es aus der entsprechenden Eigenschaft des Supremums. Für  $p = 1$  folgt es direkt aus der Dreiecksungleichung des Betrags.

Sei nun  $p \in (1, \infty)$ . Mit der Hölder-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_K |f + g| |f + g|^{p-1} \, d\text{vol} \\ &\leq \int_K |f| |f + g|^{p-1} \, d\text{vol} + \int_K |g| |f + g|^{p-1} \, d\text{vol} \\ &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_{p'}^{p-1} \end{aligned}$$

Wegen  $\| |f + g|^{p-1} \|_{p'}^{p'} = \int_K |f + g|^{(p-1)p'} \, d\text{vol} = \|f + g\|_p^p$  und  $p - \frac{p}{p'} = 1$  folgt die Behauptung.  $\square$

Die Minkowski-Ungleichung ist die Dreiecksungleichung für  $\|\cdot\|_p$ . Positiv homogen folgt direkt aus der Linearität des Integrals und  $\|f\|_p \geq 0$  ist klar. Aus  $f \neq 0$  und  $f$  stetig, folgt direkt  $\|f\|_p > 0$ . Damit haben wir gesehen:

**Folgerung 1.8.2.** Für  $p \in [1, \infty]$  ist  $\|\cdot\|_p$  eine Norm auf  $C_c^0(K)$ .

Damit können wir für  $p \in [1, \infty)$  nun die *Lebesgue-Räume*

$$L^p(K) := \overline{C_c^0(K)}^{\|\cdot\|_p}$$

definieren. (Für  $p = 1$  hatten wir das natürlich schon gemacht.) Wegen Satz 1.3.4 ist  $L^p(K)$  mit  $\|\cdot\|_p$  ein Banachraum.

Für  $p = 2$  wird die Norm durch ein Skalarprodukt\* – dem  $L^2$ -Produkt:

$$L^2(K, \mathbb{C}) \times L^2(K, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto (g, f)_{L^2} := \int_K f \bar{g} \, \text{dvol.}$$

induziert, d.h.  $\|f\|_2^2 = (f, f)_{L^2}$  für alle  $f \in L^2(K, \mathbb{C})$ . Auf  $L^2(K, \mathbb{R})$  ist das Skalarprodukt einfach die Einschränkung dieses hermiteschen Produkts. Einen Banachraum, deren Norm  $\|\cdot\|$  von einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  kommen, d.h.  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , nennen wir *Hilbertraum*. Von den  $L^p$ -Räumen ist nur  $L^2$  ein Hilbertraum, vgl. ÜA24.

! Für  $p = \infty$  könnten wir zwar auch den Abschluss von  $C_c^0(K)$  in der  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm bilden. Aber das ist nicht der Raum, den man in der Literatur mit  $L^\infty(K)$  bezeichnet. Zu diesem kommen wir später!

Wenn wir ein Element  $f$  von  $L^p$  als Äquivalenzklasse schreiben wollen, schreiben wir  $f = [c_k]_p$ , um in der Notation zu zeigen, dass es um die  $L^p$ -Norm geht. D.h.  $[c_k]$  aus der Definition von  $L^1$  wäre gleich  $[c_k]_1$ .

Jetzt beschäftigen wir uns erst einmal damit, ob Hölder und Minkowski auch für  $L^p$ -Räume gilt. Dazu wollen wir natürlich benutzen, dass wir diese Ungleichungen für  $C_c^0(K)$  schon kennen und diese Funktionen dicht in  $L^p$  für  $p \in [1, \infty)$  liegen.

**Satz 1.8.3.**

(i) Sei  $p \in (1, \infty)$ . Sei  $f \in L^p(K)$ ,  $g \in L^{p'}(K)$ . Dann ist  $fg \in L^1(K)$  und

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \quad (\text{Hölder})$$

(ii) Sei  $p \in [1, \infty)$  und  $f, g \in L^p(K)$ . Dann ist  $f + g \in L^p(K)$  und

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (\text{Minkowski})$$

Auch die Hölderungleichung wird für  $p = 1$  (und dann  $p' = \infty$ ) gelten, s. Definition 1.8.10 und darunter.

*Beweis.* (i) Sei  $f = [c_k]_p$  und  $g = [d_k]_{p'}$  mit  $c_k, d_k \in C_c^0(K)$ . Dann gilt mit der Dreiecksungleichung und Hölder für  $C_c^0$

$$\begin{aligned} \|c_k d_k - c_\ell d_\ell\|_1 &\leq \|c_k(d_k - d_\ell)\|_1 + \|(c_k - c_\ell)d_\ell\|_1 \\ &\leq \|c_k\|_p \|d_k - d_\ell\|_{p'} + \|c_k - c_\ell\|_p \|d_\ell\|_{p'}. \end{aligned}$$

---

\*Skalarprodukt ist auf reellen Vektorräumen eine positiv definite symmetrische Bilinearform und auf komplexen Vektorräumen eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform (bei uns C-antilinear in der zweiten Komponente).

## 1 Integration

Damit ist  $[c_k d_k] \in L^1(K)$  und  $fg$  als f.ü. punktweser Limes eine Realisierung und die Ungleichung folgt von Hölder für  $c_k d_k$  als Limes für  $k \rightarrow \infty$ .

(ii) geht wie (i) oder man benutzt Satz 1.3.4, der einem sagt, dass die Vervollständigung wieder ein normierter Raum ist und damit auch die Dreiecksungleichung erfüllt.  $\square$

**Beziehungen  $L^p$  zu  $L^1$ .** Für  $c \in C_c^0(K)$ ,  $c \geq 0$ ,  $p \in [1, \infty)$  gilt

$$\|c^p\|_1 = \int_K |c^p| \, d\text{vol} = \int_K |c|^p \, d\text{vol} = \|c\|_p^p.$$

Gilt sowas auch für  $c \in L^p$ ? Um dazu etwas sagen zu können, beweisen wir zunächst einige Analoga zu Sätzen, die wir schon für  $L^1$  hatten.

Eine Realisierung eines Elementes von  $L^p(K)$  definieren wir genau wie in Definition 1.3.6. Die Existenz einer solchen Realisierung folgt wieder aus Lemma 1.3.9 und:

**Lemma 1.8.4.** ( *$L^p$ -Version von Lemma 1.3.10*) Sei  $c_k \in C_c^0(K)$  eine schnell konvergente Cauchyfolge bzgl.  $L^p$ ,  $p \in [1, \infty)$ .

(i)  $c_k$  konvergiert punktweise fast überall.

(ii) Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es eine offene Menge  $B$  mit  $\text{vol } B < \varepsilon$ , so dass  $c_k|_{K \setminus B}$  gleichmäßig konvergiert.

*Beweis.* ÜA11  $\square$

Der Beweis vom Lipschitzkalkül, Satz 1.3.15, bleibt gleich (man muss nur die  $L^1$ -Norm jeweils durch eine  $L^p$ -Norm ersetzen), genauso wie der Beweis (Lemma 1.3.26) von  $\varphi_a(f) \rightarrow f$  in  $L^p$  für  $a \rightarrow \infty$  und Satz 1.3.14.

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun zeigen:

**Satz 1.8.5.** Sei  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \geq 0$ , und  $p \in [1, \infty)$ . Es ist  $f \in L^p(K)$  genau dann, wenn  $f^p \in L^1(K)$ . Dann gilt  $\|f\|_p^p = \|f^p\|_1$ .

*Beweis.* Sei zunächst  $f^p \in L^1(K)$ . Dann gibt es eine Folge  $c_k \in C_c^0(K)$  mit  $f^p = [c_k]_1$  und  $c_k(x) \rightarrow f^p(x)$  f.ü. Wir können  $c_k \geq 0$  wählen. Wegen

$$\|c_k^{\frac{1}{p}} - c_\ell^{\frac{1}{p}}\|_p^p \leq \|c_k - c_\ell\|_1,$$

was direkt aus  $|a - b|^p \leq |a^p - b^p|$  für alle  $a, b \geq 0$  folgt, haben wir  $[c_k^{\frac{1}{p}}]_p \in L^p(K)$  und  $f$  ist eine Realisierung dieses Elementes.

Sei  $f \in L^p(K)$  mit  $K$  ein Quader. Dann gibt es nach Lemmata 1.3.9 und 1.8.4 eine Folge  $c_k \in C_c^0(K)$  mit  $f = [c_k]_p$  und  $c_k(x) \rightarrow f(x)$  f.ü. Die Folge  $c_k$  kann analog zur  $L^1$ -Theorie nichtnegativ und monoton steigend gewählt werden. Wir betrachten  $c_k^p \in C_c^0(K)$ .

---

\*Dafür reicht es  $(a - 1)^p \leq a^p - 1$  für alle  $a \geq 1$  zu zeigen und das geht z.B. indem man  $f(a) = \frac{(a-1)^p}{a^p-1}$  betrachtet,  $f'(a) > 0$  und  $\lim_{a \rightarrow \infty} f(a) = 1$  (l'Hopital) nachrechnet.

Diese Folge ist auch monoton steigend und  $\|c_k^p\|_1 = \|c_k\|_p^p$  muss beschränkt sein. Damit existiert nach Satz 1.4.1 über monotone Konvergenz ein  $g \in L^1(K)$  mit  $g = [c_k^p]_1$ . Nach Übergang zu einer schnell konvergenten Teilfolge konvergiert  $c_k^p$  punktweise fast überall. Da jedoch schon  $c_k(x) \rightarrow f(x)$  f.ü., konvergiert  $c_k^p$  punktweise f.ü. gegen  $f^p$ . Also ist  $f^p \in L^1(K)$ .

Sei  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist  $f|_{[-a,a]^n} \in L^p([-a,a]^n)$  und damit  $f^p|_{[-a,a]^n} \in L^1([-a,a]^n)$  für alle  $a > 0$ . Also ist  $f^p \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Die Normgleichheit folgt ebenfalls als Grenzwert für  $a \rightarrow \infty$ .  $\square$

Daraus erhalten wir verschiedene Folgerungen:

Vorl. 12

**Lemma 1.8.6.** Für  $\text{vol } K < \infty$ ,  $1 \leq p \leq q$  und  $f \in L^q(K)$ . Dann ist  $f \in L^p(K)$  und es gilt

$$\|f\|_p \leq (\text{vol } K)^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_q$$

Dieses Lemma sagt also, dass für  $\text{vol } K < \infty$  gilt  $L^q(K) \subset L^p(K)$  für  $1 \leq p \leq q$ . Für unendliches Volumen stimmt das nicht, z.B. ist  $\frac{1}{x} \in L^2([1, \infty))$ , da  $\frac{1}{x^2} \in L^1([1, \infty))$  ist, aber  $\frac{1}{x} \notin L^1([1, \infty))$ .

*Beweis von Lemma 1.8.6.* Aus  $f \in L^q(K)$  folgt  $|f|^p \in L^{\frac{q}{p}}$ . Damit folgt aus letztem Lemma mit Hölder (benutzt  $q/p \geq 1$ ), dass  $|f|^p \in L^1$  (und damit  $|f| \in L^p$ ) ist mit

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \|f^p\|_1 = \int_K f^p \, d\text{vol} \leq \left( \int_K (f^p)^{\frac{q}{p}} \, d\text{vol} \right)^{\frac{p}{q}} \left( \int_K 1^{\frac{q}{q-p}} \, d\text{vol} \right)^{1-\frac{p}{q}} \\ &= \|f\|_q^p (\text{vol } K)^{\frac{q-p}{q}}. \end{aligned}$$

Macht man das für  $f_{\pm}$  einzeln, erhält man  $f \in L^p$ .  $\square$

**Lemma 1.8.7** (Interpolationsungleichung). Sei  $p, q \in [1, \infty)$ . Sei  $f \in L^p(K) \cap L^q(K)^*$  und  $\theta \in [0, 1]$ . Dann ist

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\theta} \|f\|_q^{\theta} \quad \text{für } \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}.$$

Inbesondere ist somit  $f \in L^s(K)$  für alle  $s \in [p, q]$  bzw.  $s \in [q, p]$ .

*Beweis.* ÜA25.i  $\square$

### 1.8.1 Dualräume und $L^\infty$

Wir erinnern uns an lineare Algebra: Haben wir einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$ , dann ist der Dualraum

$$V^* := \{f: V \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist linear}\}$$

zusammen mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation selbst wieder ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

---

\*Das heißt, es gibt ein  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ , was sowohl Realisierung eines Elementes in  $L^p$  als auch eines in  $L^q$  ist.

## 1 Integration

**Lemma 1.8.8.** *Ist  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein normierter reeller oder komplexer Vektorraum, dann erhält man auf  $V^*$  eine Norm durch*

$$\|f\|_{V^*} := \sup\{|f(x)| \mid x \in V \text{ mit } \|x\|_V \leq 1\}$$

*Beweis.* Es ist  $\|f\|_{V^*} \geq 0$  für alle  $f \in V^*$  und  $\|0: V \rightarrow \mathbb{K}\| = 0$ .

Sei nun  $\|f\|_{V^*}$ . Dann ist  $f(x) = 0$  für alle  $x \in V$  mit  $\|x\|_V \leq 1$ . Da  $f$  linear ist, ist somit  $f = 0$ .

Positiv homogen folgt direkt aus der Linearität von  $f$  und da der Betrag auf  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  positiv homogen ist.

Die Dreiecksungleichung folgt direkt, wegen

$$\sup_{x \in V, \|x\|_V \leq 1} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in V, \|x\|_V \leq 1} |f(x)| + \sup_{x \in V, \|x\|_V \leq 1} |g(x)|. \quad \square$$

Wenn wir nun  $L^p(K)$  oder  $(L^p(K))^*$  schreiben, meinen wir jeweils immer den normierten Vektorraum (also mit der jeweiligen Norm).

**Was wären nun Elemente in  $(L^p)^*$ ?** Sei  $p \in (1, \infty)$  und sei  $q$  der zu  $p$  konjugierte Exponent, also  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Sei  $f \in L^q(K)$ . Dann ist

$$T_f: L^p(K) \rightarrow \int_K f g \, d\text{vol}$$

wohldefiniert nach Satz 1.8.3(i) und linear. Also ist  $T_f \in (L^p(K))^*$ .

Der nächste Satz sagt uns, dass alle Elemente in  $(L^p(K))^*$  diese Form haben:

**Satz 1.8.9.** *Sei  $p \in (1, \infty)$  und  $q$  der konjugierte Exponent. Dann ist*

$$L^q(K) \rightarrow (L^p(K))^*, \quad f \mapsto T_f$$

*ein isometrischer Isomorphismus, d.h. es ist eine lineare bijektive Abbildung mit  $\|T_f\|_{(L^p)^*} = \|f\|_q$  für alle  $f \in L^q(K)$ .*

Damit sind diese  $(L^p(K))^*$  insbesondere Banachräume.

*Beweis(skizze).* \* Mittels der Hölder-Ungleichung, Satz 1.8.3(i), folgt

$$\|T_f\|_{(L^p)^*} = \sup_{g \in L^p(K), \|g\|_p \leq 1} \left| \int_K f g \, d\text{vol} \right| \leq \|f\|_q.$$

---

\*Da fehlen aus Zeit- und Platzgründen Details. Hauptziel dessen, was da steht, ist es zu demonstrieren, wo bei gegebenen  $T \in (L^p(K))^*$  das Urbild herkommen soll und damit eine Anschauung zu schaffen (und ansonsten an einigen Beweisschritten zu sehen, wie wichtig die Hölderungleichung ist).

Die umgekehrte Ungleichung folgt durch die Wahl  $g = f^{\frac{q}{p}} \|f\|_q^{-\frac{q}{p}} : \text{Nach Satz 1.8.5 ist } g \in L^p(K) \text{ mit } \|g\|_p = 1. \text{ Dann ist}$

$$\|T_f\|_{(L^p)^*} \geq \int_K f g \, d\text{vol} = \|f\|_q^{-\frac{q}{p}} \int_K f f^{\frac{q}{p}} \, d\text{vol} = \|f\|_q$$

(es ist  $1 + \frac{q}{p} = q$ ).

Aus  $\|T_f\|_{(L^p)^*} = \|f\|_q$  folgt direkt die Injektivität der Abbildung  $f \mapsto T_f$ . Es bleibt die Surjektivität zu zeigen. Da gibt es verschiedene Möglichkeiten. Wir wollen hier mal eine recht konstruktive Art skizzieren, wie man bei gegebenen  $T \in (L^p(K))^*$  das Urbild in  $L^q(K)$  approximieren kann:

Wir betrachten direkt  $K = \mathbb{R}^n$ . Für  $K$  ein Quader kann man alles folgende einfach mit  $\chi_K$  multiplizieren.

Sei  $Q_k = [-2^k, 2^k]^n \subset \mathbb{R}^n$  und  $Q_k$  sei in Teilquader der Seitenlänge  $2^{-k}$  eingeteilt. Dann ist für  $n \geq k$  ein Teilquader von  $Q_n$  vollständig in einem Teilquader von  $Q_k$  enthalten. Die Menge der Funktionen  $\mathcal{F} := \{g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists m \in \mathbb{N}, \alpha_Q \in \mathbb{R}: g = \sum_{Q \text{ Teilquader von } Q_m} \alpha_Q \chi_Q\}$  ist dicht in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  für  $p \in [1, \infty)$  (Beweis analog dazu, dass Treppenfunktionen in  $L^1([a, b])$  dicht sind - ÜA6 (das ist ein 'Skizzenteil des Beweises')).

Wir definieren  $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  als

$$f_k = \sum_{Q \text{ Teilquader von } Q_k} \beta_Q \chi_Q \quad \text{mit } \beta_Q := T(\chi_Q)(\text{vol } Q)^{-1}$$

und sonst gleich Null. Es ist  $f_k \in L^q(\mathbb{R}^n)$  und definiert damit durch  $T_k(h) := \int_{\mathbb{R}^n} h f_k \, d\text{vol}$  ein Element in  $(L^p(\mathbb{R}^n))^*$ . Damit ist (muss man nachrechnen) für einen Teilquader  $Q$  von  $Q_m$  mit  $m \leq k$ :  $T_k(\chi_Q) = T(\chi_Q)$ .

Sei  $h = \sum_{Q \text{ Teilquader von } Q_m} \alpha_Q \chi_Q \in \mathcal{F}$ . Dann ist für  $m \leq k$ :

$$T_k(h) = \sum_{Q \text{ Teilquader von } Q_m} \alpha_Q T(\chi_Q) = T(h).$$

Allgemeiner kann man für alle  $k$  und alle  $h \in \mathcal{F}$  direkt nachrechnen, dass  $|T_k(h)| \leq \|T\|_{(L^p)^*} \|h\|_p$  gilt. Da  $\mathcal{F}$  dicht in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  ist, ist damit insbesondere  $\|T_k\|_{(L^p)^*} \leq \|T\|_{(L^p)^*}$ .

Es ist nun zu zeigen:

- (i)  $T_k \rightarrow T$  in  $(L^p(\mathbb{R}^n))^*$
- (ii)  $f_k$  konvergiert in  $L^q$  gegen ein  $f$

---

\*Ist  $f \geq 0$ , ist das  $g$  so direkt wohldefiniert, sonst erst mal nicht. Aber man kann dann  $(\text{sign } f(x)) |f(x)|^{\frac{q}{p}}$  statt  $f^{\frac{q}{p}}$ , muss sich aber natürlich überlegen, dass dies auch in  $L^p$  ist (funktioniert da diese Konstruktion 'die Stetigkeit der approximierenden Folge nicht kaputt macht').

## 1 Integration

(iii)  $T(h) = \int_{\mathbb{R}^n} h f \, d\text{vol}$ .

Zu (i): Da  $\mathcal{F}$  dicht in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  liegt, gibt es eine Folge  $h_k = \sum_Q \text{Teilquader von } Q_k \alpha_Q \chi_Q \rightarrow h$  in  $L^p$ . Damit ist

$$\begin{aligned} |T_k(h) - T(h)| &\stackrel{T_k(h_k)=T(h_k)}{\leq} |T_k(h - h_k)| + |T(h_k - h)| \\ &\leq (\|T_k\|_{(L^p)^*} + \|T\|_{(L^p)^*}) \|h_k - h\|_p \\ &\leq 2\|T\|_{(L^p)^*} \|h_k - h\|_p. \end{aligned}$$

Dies geht für  $k \rightarrow \infty$  gegen Null. Das reicht aber so erst mal nicht, da wir  $\|T_k(h) - T(h)\|_{(L^p)^*}$  brauchen und dann in

$$\|T_k - T\|_{(L^p)^*} \leq 2\|T\|_{(L^p)^*} \sup_{\|h\|_p \leq 1} \|h_k - h\|_p.$$

für  $\lim_{k \rightarrow \infty}$  zwei Grenzprozesse vertauschen müssten. Das darf man nicht so einfach. Aber man kann hier durch Verwenden  $\mathcal{F}$  dicht in  $L^p$  und direktes Berechnen und Abschätzen  $|T_k(h) - T(h)|$  für  $h \in \mathcal{F}$  sehen (dauert eine Weile), dass wir auch die gesuchte Konvergenz erhalten.

Zu (ii): Aus der Isometrie-eigenschaft von oben folgt

$$\|T_k - T_m\|_{(L^p)^*} = \|T_{f_k - f_m}\|_{(L^p)^*} = \|f_k - f_m\|_q.$$

Da  $T_k$  in  $(L^p)^*$  konvergiert, ist damit  $f_k$  eine Cauchyfolge in  $L^q$  und konvergiert wegen Vollständigkeit gegen ein  $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ .

Zu (iii): Es ist

$$\begin{aligned} \left| T(h) - \int_{\mathbb{R}^n} h f \, d\text{vol} \right| &\leq |(T - T_k)(h)| + \int_{\mathbb{R}^n} |h| |f - f_k| \, d\text{vol} \\ &\leq |(T - T_k)(h)| + \|h\|_p \|f - f_k\|_q \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \quad \square \end{aligned}$$

Da kann man sich jetzt fragen, wie es mit dem Dual von  $L^1$  aussieht.

**Definition 1.8.10.** Wir definieren

$$L^\infty(K) := \{f: K \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists c_k \in C_c^0(K), \alpha \geq 0 : c_k(x) \rightarrow f(x) \text{ f.ü.}, |c_k| \leq \alpha\} / \sim$$

wobei  $f \sim g$  sein soll, wenn  $f(x) = g(x)$  f.ü. gilt. Für  $f \in L^\infty(K)$  sei  $\|f\|_\infty$ , das kleinste  $\alpha \geq 0$  für das es eine solche Folge  $c_k$  wie in der Definition gibt.

Man kann direkt zeigen, dass  $\|\cdot\|_\infty$  eine Norm auf  $L^\infty(K)$ . Diese stimmt mit der alten Norm  $\|\cdot\|_\infty$  aus Lemma 1.3.25.iii auf allen beschränkten  $L^1$ -Elementen überein.

Mit der Definition von  $L^\infty$  bedeutet Folgerung 1.4.6 direkt, dass die Hölderungleichung auch für  $p = 1$  und  $q = \infty$  gilt.

**!** Wichtiger Unterschied zu  $L^p(K)$  für  $p \in [1, \infty)$ :  $C_c^0(K)$  ist nicht dicht in  $L^\infty(K)$ , s. Abbildung 1.5. Also für uns eigentlich kein schöner Raum. Aber die  $\|\cdot\|_\infty$  Norm ist oft nützlich (nicht nur auf beschränkten Funktionen aus  $L^1$ ). **!**

Wir erwähnen ihn hier trotzdem, um das Thema mit den Dualräumen abzuschließen:

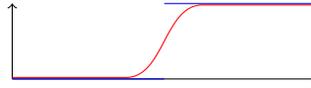


Abbildung 1.5:  $\chi_{[1,2]} \in L^\infty([0,2])$  kann in  $L^\infty$  nicht durch eine Folge in  $C^0([0,2])$  angenähert werden, da für jedes  $c \in C^0([0,2])$  gilt:  $\|c - \chi_{[1,2]}\|_\infty > \frac{1}{2}$ .

**Satz 1.8.11.**

(i)  $L^\infty(K) \rightarrow (L^1(K))^*$ ,  $f \mapsto \int_K f g d\text{vol}$ , ist ein isometrischer Isomorphismus.

(ii)  $L^1(K) \rightarrow (L^\infty(K))^*$ ,  $f \mapsto \int_K f g d\text{vol}$  ist linear, isometrisch und injektiv.

*Beweis.* (i) Das geht ganz analog wie im Fall  $p \in (1, \infty)$ , da wir auch für  $p = 1$  wie oben erwähnt eine Hölderungleichung haben.

(ii) auch genau wie oben □

Die Abbildung in (ii) ist nicht surjektiv, der Dualraum  $(L^\infty(K))^*$  ist zu groß (Beweis in Funktionalanalysis). Wo geht unsere Beweisstrategie für  $p < \infty$  nun bei  $p = \infty$  schief. Die Funktionen  $\mathcal{F}$  sind nicht dicht in  $L^\infty(K)$ . (z.B. ist  $\chi_{[\frac{1}{3},1]} \in L^\infty([0,1])$  aber kann in  $L^\infty$  nicht durch Funktionen in  $\mathcal{F}$  angenähert werden, da  $\frac{1}{3}$  immer im Inneren eines der erlaubten Teilquader (hier: Teilintervall) liegt und deshalb jedes Element aus  $\mathcal{F}$  zu  $\chi_{[\frac{1}{3},1]}$  in  $L^\infty$  mindestens Abstand  $\frac{1}{2}$  hat.)

!  $L^\infty$  ist also ein unschöner Raum. Zu groß! Will man eigentlich nicht... !



# 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

## 2.1 Fourierreihen

In Analysis 1 haben wir am Ende schon einmal Fourierreihen gesehen, um periodische Funktionen (hier Periode  $2\pi$ ) durch trigonometrische Polynome

Vorl. 13

$$a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

mit  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$  zu approximieren. Um Rechnungen zu erleichtern geht man i.A. direkt zur komplexen Version

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

mit  $c_k \in \mathbb{C}$  über. Man kann die verschiedenen Darstellungen direkt mit Hilfe der Eulerschen Formel ineinander umrechnen.

### 2.1.1 Wo kommt das her und vor?

Fourier wollte die Wärmeleitungsgleichung für einen Ring lösen. D.h. er hatte einen metallischen Ring, macht den z.B. an einer Stelle warm und schaut wie sich die Wärme im zeitlichen Verlauf verteilt.

Wenn man mal annimmt, dass der Ring schmal ist und seine Breite für die Wärmeleitung nicht so die Rolle spielt, können wir den Ring als Kreis (Umfang  $L$  modellieren). Sei  $u(x, t)$  die Temperatur zur Zeit  $t$  an der Stelle  $x$  des Ringes. Wir betrachten den Ring als  $[0, L]$  mit den Randpunkten identifiziert. Die beschreibende Gleichung des Temperaturverlaufs ist dann die Wärmeleitungsgleichung.

$$\partial_t u(x, t) - a \partial_x^2 u(x, t) = 0$$

( $a$  die Temperaturleitfähigkeit des Mediums). Zur Zeit Null liege eine Anfangswärmeverteilung vor:

$$\text{Anfangsbedingung: } u(x, 0) = g(x) \quad \text{für alle } x \in [0, L]$$

Hier muss  $g$  natürlich auch periodisch sein und wir suchen nach Lösungen  $u$ , die periodisch sind.

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

Wie löst man das? Wir zerlegen  $u(x, t)$  in einfache periodische Funktionen:

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(t) e^{i \frac{2\pi k}{L} x}$$

Für jedes feste  $t$  setzen wir also ein unendliches trigonometrischen Polynom an (das  $\frac{2\pi k}{L}$  kommt daher, dass  $u(\cdot, t)$  als Funktion mit der Periode  $L$  statt  $2\pi$  betrachten – hier benutzen wir schon die Periodizität der gesuchten Lösung.) – damit sind die Koeffizienten  $c_k$  dann von  $t$  abhängig.

Wenn wir uns erst einmal so gar keine Gedanken darüber machen, ob es diese Zerlegung immer geben muss, in welchem Sinne (wenn überhaupt) sie konvergiert und wie wir damit rechnen dürfen, können wir sehen, ob uns dieser Ansatz potentiell für das Problem überhaupt was bringen kann:

Setzen wir den Ansatz in die Wellengleichung ein und ignorieren alle Bedenken, dann erhalten wir:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (c'_k(t) + a \frac{4\pi^2 k^2}{L^2} c_k(t)) e^{i \frac{2\pi k}{L} x} = 0.$$

Glauben wir mal (stimmt auch), dass es wie bei den Potenzreihen ist, dass diese Reihe nur dann Null ist, wenn die einzelnen Summanden verschwunden, erhalten wir

$$c'_k(t) + a \frac{4\pi^2 k^2}{L^2} c_k(t) = 0$$

für alle  $k$ . Dies ist für jedes  $k$  eine gewöhnliche Differentialrechnung mit der allgemeinen Lösung

$$c_k(t) = \alpha_k e^{-\frac{4\pi^2 k^2 a}{L^2} t}, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}.$$

Die Konstanten erhalten wir aus der Anfangsbedingung, wenn wir auch  $g$  als unendliche Summe trigonometrischer Funktionen schreiben, also:

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{i \frac{2\pi k}{L} x}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen in  $u(x, 0)$  liefert  $\alpha_k = g_k$  und somit

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{-\frac{4\pi^2 k^2 a}{L^2} t + i \frac{2\pi k}{L} x}.$$

### 2.1.2 Definition, Konvergenz, ...

Kommen wir nun zur Theorie, die am Ende die Rechnungen des letzten Abschnitts rechtfertigen soll (also Konvergenz der Summen, Differentiation unter der Summe...). Sei  $C(S^1; \mathbb{C})$  die Menge der stetigen Funktionen  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(-\pi) = f(\pi)$  (also

der  $2\pi$ -periodischen Funktionen). Wir setzen  $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , sind Elemente in  $C(S^1, \mathbb{C})$  mit

$$(\varphi_n(x), \varphi_m(x))_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases}$$

Wir nennen diese  $\varphi_n(x)$  ein *Orthonormalsystem* von  $C(S^1, \mathbb{C})$  (Das 'orthonormal' bezieht sich hier auf das  $L^2$ -Skalarprodukt).

Ist nun  $p(x)$  ein (komplexes) trigonometrisches Polynom, dann erhalten wir deshalb die Koeffizienten  $c_n$  als  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\varphi_n(x)} dx$ .

In Analysis 1 hatten wir definiert

**Definition 2.1.1.** Sei  $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  und sei  $\varphi_n$  wie oben. Dann nennen wir

$$\hat{f}(n) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\varphi_n(x)} dx = (f, \varphi_n)_{L^2}$$

den *n-ten Fourierkoeffizienten* von  $f$  und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \varphi_k(x)$$

die *Fourierreihe* von  $f$  bzgl.  $\varphi_n$ .

In Analysis hatten wir die Definition eigentlich für  $f \in C(S^1, \mathbb{C})$ . Wir sehen aber, dass die Definition der Fourierkoeffizienten für alle  $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  sinnvoll ist (Hölder).

Im Gegensatz zur Taylorreihe ist das Berechnen der Fourierreihe keine lokale Operation mehr, sondern die Fourierreihe an einem Punkt hängt von der gesamten Funktion ab. Aber das Bilden der Fourierreihe ist noch immer eine lineare Operation, also  $\widehat{\lambda f + g}(k) = \lambda \hat{f}(k) + \hat{g}(k)$ .

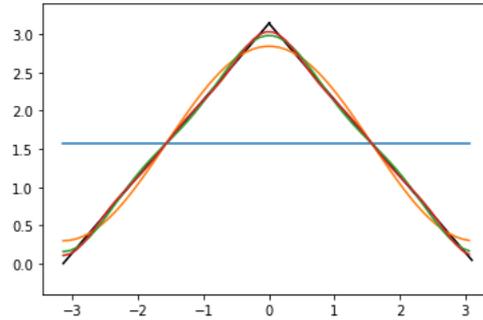
**Beispiel 2.1.2.** Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & x \in [0, \pi] \\ \pi + x & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

hat als Fourierreihe  $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$ .

(Da  $f$  eine gerade Funktion ist, d.h.  $f(x) = f(-x)$ , sind die Koeffizienten für die Sinusfunktionen alle Null, vgl. ÜA29).

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen



Wenn man wüsste, dass diese Konvergenz sogar punktweise ist (ist hier der Fall, zeigen wir später in Satz 2.1.8, i.A. stimmt das nicht, vgl. das Beispiel von Seite 3), dann folgt

$$\pi = f(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \text{also} \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Wie bei der Taylorentwicklung ist natürlich wieder die Frage inwieweit die Partialsummen dieser Reihe das ursprüngliche  $f$  approximiert und ob diese Reihe konvergiert.

**Lemma 2.1.3** (Beste Approximationseigenschaft in  $L^2$ ). \* Sei  $s_n(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$  die  $n$ .te Partialsumme der Fourierreihe eines  $f \in L^2([- \pi, \pi], \mathbb{C})$ . Dann approximiert  $s_n(x)$  unter allen Funktionen der Form  $t_n(x) := \sum_{k=-n}^n \gamma_k \varphi_k(x)$  mit  $\gamma_k \in \mathbb{C}$  die Funktion  $f$  in  $L^2$  am besten, d.h. es gilt

$$\|f - s_n\|_2 \leq \|f - t_n\|_2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $\gamma_k = c_k$  für alle  $k$  ist. Insbesondere ist

$$\|f - s_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

*Beweis.* Es ist nach Eigenschaften von Skalarprodukten

$$\|f - t_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - (f, t_n)_{L^2} - (t_n, f)_{L^2} + \|t_n\|_2^2$$

Es gilt

$$(f, t_n)_{L^2} = \sum_{k=-n}^n \bar{\gamma}_k (f, \varphi_k)_{L^2} = \sum_{k=-n}^n \bar{\gamma}_k c_k$$

sowie

$$\|t_n\|_2^2 = (t_n, t_n)_{L^2} = \sum_{k=-n}^n \sum_{\ell=-n}^n \bar{\gamma}_k \gamma_\ell (\varphi_\ell, \varphi_k)_{L^2} = \sum_{k=-n}^n |\gamma_k|^2.$$

\*Hatten wir in [2, Lemma 4.7.3] schon für  $f$  stetig. Der Beweis war genau der gleiche nur in anderer Notation.

Zusammen ist

$$\begin{aligned}\|f - t_n\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n \overline{\gamma_k} c_k - \sum_{k=-n}^n \gamma_k \overline{c_k} + \sum_{k=-n}^n |\gamma_k|^2 \\ &= \|f\|_2^2 + \sum_k |\gamma_k - c_k|^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist genau dann minimal, wenn  $c_k = \gamma_k$  ist und das gibt den Wert von  $\|f - t_n\|_2^2$ .  $\square$

Man sieht schon das in solchen Rechnungen oft Ausdrücke der Form  $\sum_{k=-n}^n |c_k|^2$  vorkommen, da sie die  $L^2$ -Norm der trigonometrischen Polynome sind. Deshalb setzen wir

$$\ell_2(\mathbb{Z}) := \left\{ (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mid a_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$$

und

$$\|(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}\|_2 := \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dann ist  $(\ell_2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_2)$  ein normierter komplexer Vektorraum, ÜA31. Die Norm kommt vom Skalarprodukt  $((a_k)_k, (b_k)_k)_{\ell_2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \overline{b_k}$ .

**Folgerung 2.1.4.** *Die Abbildung*

$$L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}), \quad f \mapsto (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$$

ist wohldefiniert, es gilt  $\|(\hat{f}(k))_k\|_2 \leq \|f\|_2$  und damit  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(k) = 0$ . Insbesondere konvergiert die Fourierreihe von  $f$  damit in  $L^2$ , d.h. es gibt ein  $g \in L^2$  mit  $\|g - \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) \varphi_k\|_2 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Die Ungleichung folgt direkt aus der letzten Identität im letzten Lemma für  $n \rightarrow \infty$ . Damit ist die Abbildung insbesondere wohldefiniert. Damit  $\|(\hat{f}(k))_k\|_2$  konvergiert müssen die Fourierkoeffizienten insbesondere für  $k \rightarrow \pm$  jeweils eine Nullfolge sein.

Sei  $f_n := \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) \varphi_k$ . Dann ist für  $m \geq n$

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \sum_{n+1 \leq |k| \leq m} |\hat{f}(k)|^2.$$

Die rechte Seite geht gegen Null, da  $\|(\hat{f}(k))_k\|_2 < \infty$ . Also ist  $f_n$  in  $L^2$  eine Cauchyfolge und muss somit konvergieren.  $\square$

Der nächste Satz wird uns zeigen, dass  $f_n$  in  $L^2$  sogar gegen  $f$  konvergiert und damit in obiger Ungleichung Gleichheit gilt:

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

**Satz 2.1.5** (Satz von Parseval). Für alle  $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  konvergiert ihre Fourierreihe in  $L^2$  gegen  $f$ . Außerdem gilt  $\|f\|_2 = \|(\hat{f}(k))_k\|_2$ .

Damit ist die Abbildung aus der letzten Folgerung insbesondere bijektiv und isometrisch.

*Beweis.* In der letzten Folgerung haben wir schon gesehen, dass  $f_n := \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) \varphi_k$  in  $L^2$  konvergiert. Es ist also nur die Frage, ob gegen  $f$ . Wir überlegen uns das zunächst für Treppenfunktionen  $f$  auf  $[-\pi, \pi]$ :

Es reicht zu zeigen, dass eine Teilfolge von  $f_n$  f.ü. punktweise gegen  $f(x)$  konvergiert. Es ist

$$\begin{aligned} f(x_0) - f_n(x_0) &= f(x_0) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx_0} \\ &\stackrel{\text{Def. v. } \hat{f}(k)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0) - f(x)) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x_0-x)} dx \\ &\stackrel{\substack{y=x-x_0 \\ f \text{ period.}}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0) - f(y+x_0)) \sum_{k=-n}^n e^{-iky} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0) - f(y+x_0)}{e^{-iy} - 1} (e^{-i(n+1)y} - e^{iny}) dy \end{aligned}$$

(wegen  $\sum_{k=-n}^n e^{-iky} = e^{iny} \sum_{k=0}^{2n} e^{-iky} = e^{iny} \frac{e^{-i(2n+1)y} - 1}{e^{-iy} - 1} = \frac{e^{-i(n+1)y} - e^{iny}}{e^{-iy} - 1}$ ). Sei nun  $g(y) = \frac{f(x_0) - f(y+x_0)}{e^{-iy} - 1}$  und  $x_0$  im Inneren einer Treppe von  $f$ . Dann ist  $g = 0$  nahe  $y = 0$  und damit ist  $g \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ . Somit gilt  $f(x_0) - f_n(x_0) = \hat{g}(-n-1) - \hat{g}(n)$ . Wegen  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \hat{g}(k) = 0$  nach Folgerung 2.1.4 folgt im Inneren einer jeden Treppenstufe von  $f$  konvergiert  $f_n$  punktweise gegen  $f$ . Da eine Treppenfunktion auf einem abgeschlossenen Intervall nur endlich viele Treppenstufen hat, konvergiert  $f_n$  f.ü. gegen  $f$ .

Die Treppenfunktionen liegen dicht in  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ . Da wir eben gesehen haben, dass für jede Treppenfunktion ihre Fourierreihe in  $L^2$  gegen eben diese Treppenfunktion konvergiert, sind somit die Menge der trigonometrischen Polynome dicht in  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})^*$ . Sei  $\mathbb{P}_n$  die Menge der trigonometrischen Polynome der Form  $\sum_{k=-n}^n c_k \varphi_k$ . Dann gilt zusammen mit Satz 2.1.3 für alle  $f \in L^2([-\pi, \pi])$

$$\|f - f_n\|_2 \leq \min_{p_n \in \mathbb{P}_n} \|f - p_n\|_2 \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ . □

Insbesondere sagt der letzte Beweis:

---

\*Das ist wieder ein Diagonalfolgenargument, wie wir es schon öfter durchgeführt haben – allgemein gilt: Sei  $C$  dicht in einem normierten Raum  $(X, \|\cdot\|)$  und kann jedes Element in  $C$  bzgl.  $d$  durch Elemente aus  $B$  approximiert werden. Dann ist  $B$  dicht in  $X$ :

Sei  $x \in X$ . Dann gibt es  $(c_k)_k \in C$  mit  $c_k \rightarrow x$  und für jedes  $k$  gibt es  $b_{k\ell} \in B$  mit  $b_{k\ell} \rightarrow c_k$ . Damit gibt es für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $k_0$  mit  $\|c_k - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $k \geq k_0$ . Außerdem gibt es für alle  $k$  ein  $\ell(k)$ , so dass  $\|b_{k\ell(k)} - c_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Aus Dreiecksungleichung folgt  $\|x - b_{k\ell(k)}\| < \varepsilon$  für alle  $k \geq k_0$ .

**Satz 2.1.6.** Die Menge der trigonometrischen Polynome ist dicht in  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ .

Mit den Mitteln des letzten Beweises sehen wir auch:

**Satz 2.1.7.** Sei  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  in  $L^2$  und in einer Umgebung von  $x_0 \in (-\pi, \pi)$  stetig und stetig differenzierbar. Dann konvergiert die Fourierreihe von  $f$  in  $x_0$  gegen  $f(x_0)$ .

*Beweis.* Wie im letzten Beweis gilt

$$f(x_0) - f_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0) - f(y+x_0)}{e^{-iy} - 1} (e^{-i(n+1)y} - e^{iny}) dy.$$

Wir betrachten wieder  $g(y) = \frac{f(x_0) - f(y+x_0)}{e^{-iy} - 1}$ . Da  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$  stetig differenzierbar ist, gilt für  $|y|$  klein genug, dass  $|g(y)| \leq \frac{|f'(\xi_y + x_0)y|}{|e^{-iy} - 1|}$  für ein  $\xi_y$  zwischen 0 und  $y$ . Wegen  $\frac{y}{e^{-iy} - 1} \rightarrow i$  für  $y \rightarrow 0$ , ist damit  $g$  nahe der Null beschränkt und damit in  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ . Der Rest des Argumentes geht wieder wie im letzten Beweis.  $\square$

Bis jetzt wissen wir, dass Fourierreihen einer  $L^2$ -Funktion immer in  $L^2$  gegen diese konvergieren und damit f.ü. auch punktweise konvergieren müssen. Unter gewissen Voraussetzungen gilt noch mehr:

**Satz 2.1.8.** Sei  $f \in C(S^1)$  stückweise stetig differenzierbar. Dann konvergiert die Fourierreihe von  $f$  gleichmäßig gegen  $f$ .

*Beweis.* Wir müssen  $|f(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{|k|>n} \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k|>n} |\hat{f}(k)|$  unabhängig von  $n$  abschätzen, so dass diese Schranke dann für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null geht.

Für  $f$  stetig und stückweise stetig differenzierbar, ist  $f'$  f.ü. definiert, damit dort stetig und beschränkt und somit in  $L^2$  und es gilt  $\hat{f}'(k) = ik\hat{f}(k)$ , ÜA29. Damit gilt

$$\sum_{|k|>n} |\hat{f}(k)| = \sum_{|k|>n} |\hat{f}'(k)| \frac{1}{|k|} \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left( \sum_{|k|>n} |\hat{f}'(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{|k|>n} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Insbesondere sagt der letzte Beweis, dass in dieser Situation  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < \infty$  ist und damit die Fourierreihe in jedem Punkt sogar absolut konvergiert (da  $|\varphi_k(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  ist).

Wir wollen noch zum *Gibbs'schen Phänomen der Überschwinger* kommen, vgl. Seite 3, was wir an dem Beispiel der Stufenfunktion direkt nachrechnen wollen:

**Beispiel 2.1.9.** Die Funktion

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi) \\ 0 & x \in \{0, \pi, -\pi\} \\ -1 & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

hatte als Fourierreihe  $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$ . Also ist  $\theta_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$ . Wir suchen das erste Maximum von  $\theta_n$  mit  $x > 0$ . Dazu berechnen wir für  $x \in (0, \pi)$

$$\begin{aligned} \theta'_n(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \cos((2k+1)x) = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i(2k+1)x} = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left( e^{ix} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i2kx} \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left( e^{ix} \frac{e^{i2(n+1)x} - 1}{e^{i2x} - 1} \right) = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \frac{e^{i2(n+1)x} - 1}{e^{ix} - e^{-ix}} \\ &= \frac{2 \sin(2(n+1)x)}{\pi \sin x}. \end{aligned}$$

Also ist für  $x > 0$  das erste Extrema von  $\theta_n$  bei  $x_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$  und dort ist

$$\theta_n(x_n) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\sin \frac{\pi(2k+1)}{2(n+1)}}{2k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\sin \frac{\pi(2k+1)}{2(n+1)}}{\frac{\pi(2k+1)}{2(n+1)}} \frac{\pi}{n+1}$$

Das ist eine Zwischensumme  $\sum_{k=0}^n h\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)(x_{k+1}-x_k)$  vom Integral von  $h(x) = \frac{\sin x}{x}$  auf dem Intervall  $[0, \pi]$  bzgl. der äquidistanten Zerlegung  $x_k = \frac{\pi k}{n+1}$  (Länge der Teilintervalle:  $\frac{\pi}{n+1}$ ). D.h. für  $n \rightarrow \infty$  geht  $\theta_n(x_n) \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx := \Theta \sim 1.18$ .

So ein Gibbs'sches Phänomen gibt es immer bei den Sprungstellen von Fourierreihen stückweise stetig differenzierbaren Funktionen. Wie sieht man das?

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stückweise stetig differenzierbar,  $2\pi$ -periodische Funktion. Sei  $x_0$  eine Sprungstelle mit Sprung vom Wert  $a$  auf  $b$ . O.B.d.A. sei  $f(x_0) = \frac{b-a}{2}$ . Das ändert die Fourierreihe nicht.

Wir setzen  $g(x) = \left( \frac{2}{b-a} f(x+x_0) - \frac{b+a}{b-a} \right) - \theta(x)^*$ . Dann ist  $g$  noch immer  $2\pi$ -periodisch in einer Umgebung von 0 stetig und stückweise stetig differenzierbar mit  $g(0) = 0$ . D.h. die Fourierreihe von  $g$  konvergiert nach Satz 2.1.7 in dieser Umgebung der Null gegen  $g$ .

Mit dem  $x_n$  aus dem letzten Beispiel haben wir:

$$g_n(x_n) = \frac{2}{b-a} f_n(x_n+x_0) - \frac{b+a}{b-a} - \theta_n(x_n)$$

Da  $g_n$  in einer Umgebung der Null gleichmäßig gegen  $g$  konvergiert, erhält man für alle  $y_n \rightarrow 0$ , dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y_n) = g(0) = 0$  ist. Somit folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n+x_0) = \frac{b-a}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(x_n) + \frac{b+a}{2} = \frac{b-a}{2} \Theta + \frac{b+a}{2}$$

und damit

$$\sup_{x \in [x_0, x_0+2x_n]} f_n(x) \geq \frac{b-a}{2} \Theta + \frac{b+a}{2}.$$

\*Die Funktion in  $\frac{2}{b-a} f(x+x_0) - \frac{b+a}{b-a}$  ist so gebaut, dass sie gegen  $-1$  für  $x \searrow 0$  und gegen  $1$  für  $x \nearrow 0$  geht.

(Das  $x_n + x_0$  wird nicht genau die Stelle sein, wo  $f_n$  sein nächstes Maximum nahe der Sprungstelle hat. )

Andererseits ist

$$\sup_{x \in [x_0, x_0 + 2x_n]} f_n(x) \leq \frac{2}{b-a} \left( \sup_{x \in [0, 2x_n]} g_n(x) + \sup_{x \in [0, 2x_n]} \theta_n(x) \right) - \frac{b+a}{b-a} = \frac{b-a}{2} \Theta + \frac{b+a}{2}.$$

Also ist die Höhe des Überschingers für  $x > x_0$  im Limes  $n \rightarrow \infty$  gleich  $\frac{b-a}{2} \Theta + \frac{b+a}{2}$ .

**Zusammenfassung:**

Jede Funktion  $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  besitzt eine Fourierreihe, die in  $L^2$  konvergiert. Die Abbildung

$$f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \mapsto (\hat{f}(k))_k \in \ell_2(\mathbb{Z})$$

ist ein isometrischer Isomorphismus. In jedem Punkt  $x$  in dem  $f$  in einer Umgebung stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert die Fourierreihe in  $x$  gegen  $f(x)$ . Falls  $f$  insgesamt stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, ist diese Konvergenz der Fourierreihe sogar gleichmäßig und die Fourierreihe konvergiert in diesem Fall sogar absolut. Sonst nicht unbedingt, siehe das Phänomen des Gibbs'schen Überschingers. An dem Abfallverhalten der Fourierkoeffizienten eines  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  sieht man Regularität von  $f$ : Wir haben nur gesehen, dass aus  $f \in C^1(\mathbb{R})$   $2\pi$ -periodisch, folgt  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < \infty$ , aber man dies kann ganz analog für  $f \in C^\ell(\mathbb{R})$  machen, vgl. ÜA36.

Da jedes Element in  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  als  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_k(x)$  für geeignete  $c_k \in \mathbb{C}$  darstellbar ist, sagt man  $(\varphi_k)_k$  ist ein *vollständiges Orthonormalsystem* bzw. eine *(Hilbert-)Basis*.

! Hier ist Basis (Hilbertbasis) nicht das gleiche wie die Basis aus der linearen Algebra (Hamelbasis). Bei einer Hamelbasis muss jedes Element des Vektorraumes durch eine endliche Linearkombination von Basiselementen darstellbar sein (vgl. Vektorraum der Polynome). Dahingegen sind bei einer Hilbertbasis unendliche Linearkombinationen zugelassen und die unendliche Reihe muss dann in der jeweiligen Norm (hier  $L^2$ ) konvergieren. Hilbertbasen sind der relevante Basisbegriff für Hilberträume. Allgemeiner gibt es für Banachräume den Begriff der Schauderbasis, wo auch unendliche Linearkombinationen zugelassen (und nötig) sind. Dort macht die Zusatzforderung der Hilbertbasis 'orthonormiert' nur keinen Sinn mehr. (Normieren geht natürlich noch, aber für orthogonal braucht man ein Skalarprodukt.)!

**Kommen wir zurück zur formalen Rechnung aus Abschnitt 2.1.1:** Wenn wir annehmen, dass es eine Funktion  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , welche in der ersten Variable zweimal stetig differenzierbar und  $L$ -periodisch ist und in der zweiten Variable einmal stetig differenzierbar ist und

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) - a \partial_x u(x, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= g(x) \end{aligned}$$

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

für eine  $L$ -periodische Funktion  $g$  löst.

Dann folgt insbesondere, dass auch  $g$  zweimal differenzierbar ist und  $u(\cdot, t)$  für alle  $t$  in  $L^2$  ist. Damit konvergiert für jedes  $t$  die Fourierreihe  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(t) e^{i \frac{2\pi k}{L} x}$  in  $L^2$  und gleichmäßig und punktweise absolut gegen  $u(\cdot, t)$ .

Ist  $u$  in  $x$  zweimal stetig differenzierbar, ist  $\partial_x^2 u(x, t)$  stetig und damit in  $L^2$  und hat auch eine Fourierreihe. Durch partielle Integration, analog zu ÜA29, sieht man, dass  $\partial_x^2 u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(t) \frac{4\pi^2 k^2}{L^2} e^{i \frac{2\pi k}{L} x}$  in  $L^2$  ist.

Was fehlt noch: Um zu sehen, dass  $\partial_t u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k(t) e^{i \frac{2\pi k}{L} x}$  brauchen wir noch, dass  $c_k(t)$  mindestens differenzierbar in  $t$  sein muss. Dies folgt aus der Differenzierbarkeit von Parameterintegralen, Satz 1.6.3 (Als Majorante kann man  $g(x) = \sup_{t \in (\alpha, \beta)} \partial_t u(x, t)$  wählen, da  $u(x, \cdot)$   $C^1$  für alle  $x$  ist und damit  $g$  stetig ist.) Nun können wir genauso zu Ende rechnen wie in Abschnitt 2.1.1.

**Warum heißen die endlichen Summen der  $\sin(kx)$ ,  $\cos(kx)$  bzw.  $e^{ikx}$  trigonometrische Polynome?** Sei  $p(z) = \sum_{k=0}^n d_k z^k$  ein komplexes Polynom ( $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ). Schränkt man  $p$  auf  $S^1 \subset \mathbb{C}$  ein und parametrisiert  $S^1$  durch  $x \in [-\pi, \pi) \mapsto e^{ikx} \in S^1$ , erhält man  $p(x) = \sum_{k=0}^n d_k e^{ikx}$  und somit zumindest die trigonometrischen Polynome mit nichtnegativen  $k$  (positive Frequenzen). Betrachtet man Polynome in  $z$  und  $\bar{z}$  auf  $\mathbb{C}$  und schränkt diese auf  $S^1$  ein (und verwendet das auf  $S^1$  gemischte Terme  $z^k \bar{z}^\ell$  gleich  $z^{k-\ell}$  oder  $\bar{z}^{\ell-k}$  sind, da  $z\bar{z} = |z|^2 = 1$  ist) erhält man jedes komplexe trigonometrische Polynom  $\sum_{k=-n}^n d_k e^{ikx}$ .

**Periodische vs. Nullrandbedingungen (Dirichlet-Randbedingungen)** Wir haben Fourierreihen für periodische Funktionen betrachtet. Ansätze in trigonometrische Polynome werden auch oft verwendet um Differentialgleichungen mit *Dirichlet-Randbedingungen* (d.h. der Wert der gesuchten Größe ist Null am Rand) zu lösen, z.B.

Euler, Daniel Bernoulli, d'Alembert und Lagrange diskutierten Ende des 18. und Anfang des 19. Jahrhunderts, wie man die Gleichung einer schwingenden Saite (z.B. einer Gitarre oder Geige) löst. Dieses Problem wird durch die Wellengleichung\*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) = 0$$

beschrieben, wobei  $u(t, x)$  die Auslenkung der Saite an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$  beschreibt. Um das Problem einer schwingenden Saite vollständig zu beschreiben, benötigt man noch Rand- und Anfangsbedingungen.

$$\text{Randbedingungen: } u(t, 0) = u(t, L) = 0 \quad \text{für alle } t$$

beschreiben, dass die Saite (Länge  $L$ ) an ihren Enden eingespannt ist.

$$\text{Anfangsbedingungen: } u(0, x) = g(x), \quad \frac{\partial}{\partial x} u(0, x) = h(x) \quad \text{für alle } x \in [0, L]$$

---

\*Das ist hier unter der (total falschen) Zusatzannahme von keiner Dämpfung. Wenn die Saite hier einmal schwingt, dann hört sie nie wieder auf.

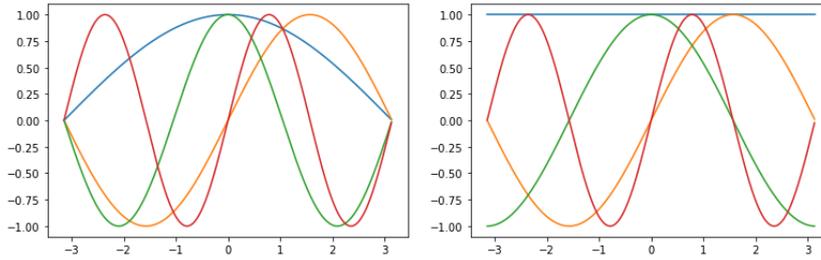


Abbildung 2.1: Jeweils die ersten Terme der trigonometrischen Polynome für Nullrandbedingungen (links) und glatt  $2\pi$ -periodische Terme (rechts)

für die Ausgangsauslenkung und Ausgangsgeschwindigkeit der Saite zur Zeit  $t = 0$ . Dieses Problem beschreibt dann eine frei schwingende Saite, also wo man nicht noch äußerlich eingreift (z.B. mit einem Geigenbogen). Das kann aber analog beschrieben werden, man muss nur in der rechten Seite der Wellengleichung die Null durch diese externe Kraft ersetzen – lassen wir erst mal.

Auch hier möchte man einen Ansatz der Lösung  $u(x, t)$  bei  $t$  fest in einfache Schwingungen machen sin und cos (die einzelnen Töne) machen. Allerdings sollen es Töne sein, die Null-Randbedingung erfüllen, und damit sind im Ansatz  $\sum_k a_k \cos(kx) + \sum_k b_k \sin(kx)$  nicht die gleichen  $k$  erlaubt, wie bei periodischen Randbedingungen, vgl. ÜA32 und Abbildung 2.1. Ansonsten ist die Theorie sehr sehr ähnlich und man kann obiges Problem ganz analog zur Wärmeleitungsgleichung aus Abschnitt 2.1.1 lösen, ÜA33.

Weil die Zerlegung hier mit der Interpretation von Tönen kommt wir, nennen wir  $k$  die Frequenz (in Wirklichkeit in der Physik Kreisfrequenz genannt, die Frequenz in der Physik wäre  $\frac{k}{2\pi}$  (=1/Periode)).

**In höheren Dimensionen?** Ist  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in jeder Koordinate periodisch, dann kann man Fourierreihe bzgl. jeder Koordinate durchführen. Z.B. sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \in L^2([-\pi, \pi]^2, \mathbb{C})$  in beiden Koordinaten  $2\pi$ -periodisch, dann haben wir

$$f(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(y) \varphi_k(x)$$

mit  $c_k(y) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \overline{\varphi_k(x)} d\text{vol}_x$ . Die Funktionen  $c_k$  sind noch immer  $2\pi$ -periodisch. Aus Hölder folgt  $|c_k(y)|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x, y)|^2 d\text{vol}_x$  und damit ist nach dem Integrabilitätskriterium  $c_k \in L^2([-y, y], \mathbb{C})$  mit  $\|c_k\|_{L^2([-y, y])} \leq \|f\|_{L^2([-\pi, \pi]^2)}$ . Damit hat jedes  $c_k$  auch eine Fourierreihe und wir haben

$$f(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} d_{k\ell} \varphi_\ell(y) \varphi_k(x).$$

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

Ist die Funktion  $f$  nett genug, z.B. stetig differenzierbar, konvergieren die Fourierreihen alle punktweise absolut und dann muss man sich über Reihenfolge der Summation keine Gedanken machen.

### Was geht z.B. noch? – Ausblick

Die  $n$ -te Fourierapproximation kann man auch wie folgt schreiben

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy e^{ikx} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-y)} dy$$

Mit S. 54 haben wir

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1} \stackrel{\text{Eulerform.} \pm \text{Add.thm.}}{=} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

und damit

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(x-y) dy$$

$D_n$  heißt *Dirichlet-Kern*.

Wir hatten gesehen,  $f_n$  konvergiert im Allgemeinen nicht gleichmäßig gegen  $f$ . Man kann aber durch Resummation eine gleichmäßige Konvergenz von trigonometrischen Polynomen für alle stetigen  $f$  erreichen:

Sei

$$K_n(x) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x).$$

der *Fejer-Kern*. Dann kann man nachrechnen:

- (i)  $K_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}$  und  $K_n(0) = n+1$ .
- (ii)  $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) = 2\pi$ .

Setzt man nun

$$\sigma_n(f)(x) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) K_n(x-y) dy$$

dann hat man mit  $\sigma_n(f)$  trigonometrische Polynome die  $f$  approximieren – es gilt sogar

**Satz 2.1.10** (Satz von Fejer). *Ist  $f$  stetig und  $2\pi$ -periodisch, dann konvergiert  $\sigma_n(f)$  gleichmäßig gegen  $f$ .*

*Beweis.* [5, Thm. 5.2] □

Wir ersetzen oben die Folge  $f_n$  durch  $\sigma_n(f)$  (ihre *Cesaro-Summen*) und erhalten dadurch bessere Konvergenz. Das z.B. die punktweise Konvergenz der  $f_n$  (sofern gegeben) erhalten bleibt, hatten wir in [2, ÜA20]. Aber nun werden für  $f$  stetig, die  $\sigma_n(f)$  gleichmäßig und damit insbesondere punktweise konvergieren, auch dort wo es die  $f_n$  eventuell nicht taten.

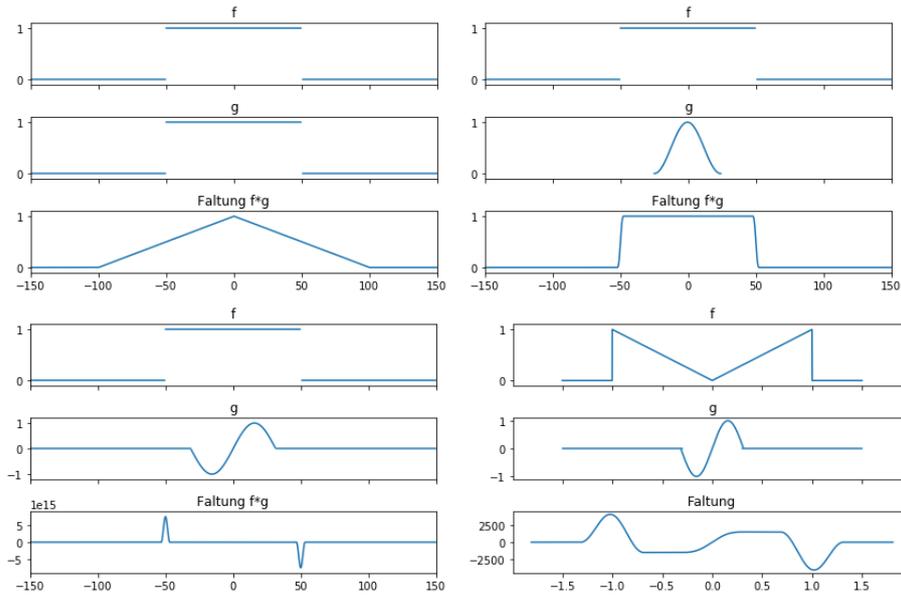


Abbildung 2.2: Beispiele von Faltung: In der unteren Reihe sieht man, dass man durch Faltung mit geeigneten Funktionen (hier Mittelwert Null) Knicke oder Sprünge detektieren kann (Stichwort: Kantenerkennung in Bildern).

## 2.2 Faltung

Die *Faltung* zweier Funktion ist (sofern existent) definiert als

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) \text{dvol}_y$$

Wir nennen  $f$  und  $g$  *faltbar*, falls  $f * g(x)$  für fast alle  $x$  definiert ist.

**Beispiel 2.2.1.** (i) s. Abbildung 2.2

(ii) Das Bilden der  $n$ -ten Approximation der Fourierreihe kann man auch als Faltung schreiben: Sei  $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ . Dann ist nach letztem Abschnitt

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)D_n(x-y)dy$$

Also ist  $f_n$  die Faltung von  $f$  mit  $\frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}y)}{\sin \frac{y}{2}} \chi_{[-\pi, \pi]}$ .

Erste Eigenschaft:

**Lemma 2.2.2.** *Hat  $f$  Träger in  $A$  und  $g$  Träger in  $B$ , dann hat  $f * g$  Träger in  $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ .*

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

*Beweis.*  $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ . Falls  $f(x-y) = 0$  für gegebenes  $x$  und alle  $y \in B$  gleich Null ist, also  $x \notin A+B$  gilt, ist  $f * g(x) = 0$ .  $\square$

Wir beginnen mit Aussagen zu  $L^p$ :

**Satz 2.2.3.** Sei  $p \in [1, \infty]$  und  $(f, g) \in L^p(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n)$ . Dann sind  $f$  und  $g$  faltbar,  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$  und es gilt die Youngsche Ungleichung

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

*Beweis.* Sei  $1 < p < \infty$ . Wie bei Hölder reicht es die Ungleichung für  $C_c^0(\mathbb{R}^n)$  zu beweisen, der Rest folgt dann wie dort.

Seien  $c, d \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt mit Hölder (für  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ )

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |c(x-y)d(y)|d\text{vol}_y &= \int_{\mathbb{R}^n} |c(x-y)| |d(y)|^{\frac{1}{p}} |d(y)|^{\frac{1}{p'}} d\text{vol}_y \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |c(x-y)|^p |d(y)|d\text{vol}_y \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |d(y)|d\text{vol}_y \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Integration über  $x$  und Fubini und die Translationsinvarianz des Integrals (Transformationsatz für  $\varphi: x \mapsto x+a$  gibt  $|\det D\varphi| = 1$ .) ergibt

$$\begin{aligned} \|c * d\|_p^p &= \int_K \left( \int_K |c(x-y)d(y)|d\text{vol}_y \right)^p d\text{vol}_x \leq \int_K \left( \int_K |c(x-y)d(y)|d\text{vol}_y \right)^p d\text{vol}_x \\ &\leq \|d\|_1^{\frac{p}{p'}} \int_K \left( \int_K |c(x-y)|^p |d(y)|d\text{vol}_y \right) d\text{vol}_x \\ &\leq \|d\|_1^{\frac{p}{p'}} \int_K \left( \int_K |c(x-y)|^p d\text{vol}_x \right) |d(y)|d\text{vol}_y \\ &\leq \|d\|_1^{\frac{p}{p'}+1=p} \|c\|_p^p. \end{aligned}$$

**Vorl. 16** Für  $p = 1$  haben wir für  $c, d \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$

$$\|c * d\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} c(x-y)d(y)d\text{vol}_y \right| d\text{vol}_x \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |c(x-y)d(y)| d\text{vol}_y d\text{vol}_x$$

Fubini+Trans.inv  $\|c\|_1 \|d\|_1$ .

Für  $p = \infty$  folgt direkt

$$f * g(x) \int_K |f(x-y)g(y)|d\text{vol}_y \leq \int_K |g(y)|d\text{vol}_y \|f(x-\cdot)\|_\infty = \|g\|_1 \|f\|_\infty$$

und damit

$$\|f * g\|_\infty \leq \|g\|_1 \|f\|_\infty. \quad \square$$

**Lemma 2.2.4.** Sei  $f, f_i \in L^p$ ,  $p \in [1, \infty]$  und  $g, g_i \in L^1$ . Dann ist

$$(i) \quad g * f = f * g$$

(ii) Aus  $f_i \rightarrow f$  in  $L^p$  und  $g_i \rightarrow g$  in  $L^1$  folgt  $g_i * f_i \rightarrow g * f$  in  $L^p$ .

*Beweis.* (i) Folgt aus dem Transformationssatz mit  $\varphi(y \in \mathbb{R}^n) = x - y \in \mathbb{R}^n$ .

(ii) Da die Faltung bilinear ist, folgt dies direkt mit

$$\|g_i * f_i - g * f\|_p \leq \|(g_i - g) * f_i\|_p + \|g(f_i - f)\|_p$$

und der Youngschen Ungleichung.  $\square$

**Satz 2.2.5** (Approximation von Funktionen). Sei  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty)$ . Sei  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Für  $\varepsilon > 0$  ist  $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi(\frac{x}{\varepsilon}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Dann konvergiert  $\varphi_\varepsilon * f$  in  $L^p$  gegen  $I(\varphi)f$ .

Gilt  $I(\varphi) = 1$ , wird  $\varphi_\varepsilon$  approximative Einheit genannt.

*Beweis.* Es ist  $\varphi_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $I(\varphi_\varepsilon) = I(\varphi)$  dank Transformationssatz angewendet auf  $x \mapsto \frac{x}{\varepsilon}$  und damit ist  $\varphi_\varepsilon * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon * f(x) - I(\varphi)f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) \varphi_\varepsilon(y) d\text{vol}_y \\ &\stackrel{z=\frac{y}{\varepsilon}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-\varepsilon z) - f(x)) \varphi(z) d\text{vol}_z \\ &\stackrel{t_\varepsilon(x)=x-\varepsilon z}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ t_{\varepsilon z}(x) - f(x)) \varphi(z) d\text{vol}_z. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon * f - I(\varphi)f\|_p &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ t_{\varepsilon z}(x) - f(x)) \varphi(z) d\text{vol}_z \right|^p d\text{vol}_x \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f \circ t_{\varepsilon z}(x) - f(x)| |\varphi(z)|^{\frac{1}{p}} |\varphi(z)|^{\frac{p-1}{p}} d\text{vol}_z \right)^p d\text{vol}_x \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \|\varphi\|_1^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f \circ t_{\varepsilon z}(x) - f(x)|^p |\varphi(z)| d\text{vol}_z \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p d\text{vol}_x \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\varphi\|_1^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f \circ t_{\varepsilon z}(x) - f(x)|^p |\varphi(z)| d\text{vol}_z d\text{vol}_x \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \|\varphi\|_1^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \|f \circ t_{\varepsilon z} - f\|_p^p |\varphi(z)| d\text{vol}_z \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

Es ist  $\|f \circ t_{\varepsilon z} - f\|_p |\varphi(z)| \rightarrow 0$  f.ü. nach ÜA26.ii und nach Dreiecksungleichung und Translationsinvarianz der Integration ist  $\|f \circ t_{\varepsilon z} - f\|_p^p |\varphi(z)| \leq 2^p \|f\|_p^p |\varphi| \in L^1$ . Damit folgt aus dem Satz zur majorisierten Konvergenz

$$\|\varphi_\varepsilon * f - I(\varphi)f\|_p \rightarrow 0$$

für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . □

**Beispiel 2.2.6.** Der *Gaußsche Kern*  $k(x) := (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}$  erfüllt  $\int_{\mathbb{R}^n} k(x) d\text{vol}_x = 1$  (s.u.) und damit  $k_\varepsilon$  eine approximative Einheit.

$\int_{\mathbb{R}^n} k(x) d\text{vol}_x = 1$  haben wir für  $n = 1$  schon mehrfach nachgerechnet und für  $n > 1$  kann man dies mittels ÜA35.i, partieller Integration und den Fall  $n = 1$  nachrechnen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} k(x) d\text{vol}_x &\stackrel{\text{ÜA35}}{=} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{r^2}{4}} r^{n-1} dr d\text{vol}_{S^{n-1}} \\ &= (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \text{vol } S^{n-1} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4}} r^{n-1} dr = 1 \end{aligned}$$

wobei man im letzten Schritt benutzt, dass  $\text{vol } S^{n-1} \stackrel{[3, \text{Bsp. 2.4.24}]}{=} n \text{vol } B_1(0) \stackrel{\text{ÜA20}}{=} \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$  gilt.

Kommen wir nun zu Aussagen zur Differenzierbarkeit der Faltung:

**Definition 2.2.7.** Es sei für  $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k} \sup_x \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x) \right|$$

und

$$C_b^k(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^k(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{C^k} < \infty\}^*.$$

Hier benutzen wir die Multiindex-Notation, vgl. [3, S. 22]:  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ . Je nach Gebiet der Mathematik wird mit  $C^k$  schon direkt  $C_b^k$  gemeint und nicht nur  $k$ -mal stetig differenzierbar.<sup>†</sup>

**Satz 2.2.8** (Glättung). Sei  $\varphi \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$  und  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist  $\varphi * g \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} (\varphi * g) = \left( \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \varphi \right) * g$$

für alle  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| \leq k$ .

---

\*  $\|\cdot\|_{C^0} = \|\cdot\|_\infty$   
<sup>†</sup>  $C_b^k$  ist keine Standardnotation.

*Beweis.*  $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(\varphi * g) = \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\varphi\right) * g$  folgt direkt aus der Differentiation von Parameterintegralen, Satz 1.6.3, da  $|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\varphi(x - \cdot)g(\cdot)| \leq C|g(\cdot)| \in L^1$  für alle  $x$  ist. Dass die Ableitungen alle beschränkt sind und damit  $\varphi * g \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$ , folgt direkt mit Satz 2.2.3 für  $p = \infty$ .  $\square$

Kommt eine approximative Einheit von einem  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , so wird  $\varphi_\varepsilon$  auch *glättender Kern* genannt.

**Beispiel 2.2.9.** Sei

$$\varphi(x) := \begin{cases} ae^{-\frac{1}{|x|^2-1}} & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit  $a$  derart, dass  $I(\varphi) = a$  ist. Dann ist  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  und damit  $\varphi_\varepsilon$  ein glättender Kern.

**Lemma 2.2.10.**  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  ist dicht in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  für  $p \in [1, \infty)$ .

*Beweis.* Da  $C_c^0(\mathbb{R}^n)$  dicht in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  es, reicht es jedes  $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$  in  $L^p$  durch glatte kompakt getragene Funktionen zu approximieren. Sei dazu  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $I(\varphi) = 1$ . Dann ist  $\varphi_\varepsilon$  ein glättender Kern und nach letztem Satz ist  $\varphi_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Da sowohl  $f$  als auch  $\varphi$  kompakt getragen sind, ist auch  $\varphi_\varepsilon * f$  kompakt getragen. Außerdem gilt nach Satz 2.2.5  $\varphi_\varepsilon * f \rightarrow f$  in  $L^p$ .  $\square$

### Wo tauchen Faltungen z.B. auf?

Mehr dazu in weiterführenden Vorlesungen...

**Beispiel 2.2.11.** (Wahrscheinlichkeitstheorie) Eine Funktion  $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\rho \geq 0$  mit  $\|\rho\|_1 = 1$  kann als *Wahrscheinlichkeitsdichte* aufgefasst werden. D.h. sie modelliert eine Zufallsvariable\*, für die die Wahrscheinlichkeit Werte in  $[a, b]$  anzunehmen gleich  $\int_a^b \rho(x) dx$  ist. Beispiele wären

- (i) Gleichverteilung auf  $[a, b]$  (= keine Präferenz für das Eintreten eines Wertes aus diesem Intervall):  $\rho = \frac{1}{b-a}\chi_{[a,b]}$
- (ii) Exponentialverteilung:  $\rho(x) = \lambda e^{-\lambda x}\chi_{[0,\infty)}(x)$  (wird z.B. verwendet, um Lebensdauer von Atomen bei radioaktiven Zerfall zu beschreiben oder die Zeit zum nächsten Telefonanruf...)
- (iii) (Gaußsche) Normalverteilung:  $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  (beschreibt z.B. öfter die zufällige Streuung von Messwerten oder die Brownsche Bewegung von Molekülen)

Die Konstanten  $\mu$ ,  $\sigma$  haben eine Bedeutung, die allgemein für Zufallsvariablen definiert sind:  $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx$  ist der Erwartungswert (= der Wert, den die Zufallsvariable im Mittel annimmt = Schwerpunkt der Wahrscheinlichkeitsdichte) und

---

\*Die Definition einer Zufallsvariable ist eigentlich etwas allgemeiner. Eine Zufallsvariable muss nicht von einer Dichte kommen. Aber die relevanten tun es.

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \rho(x) dx$  (ein Maß für die Streuung der Wahrscheinlichkeitsdichte um ihren Schwerpunkt).

Seien nun  $\rho_A$  und  $\rho_B$  Wahrscheinlichkeitsdichten, so dass die zugehörigen Zufallsvariablen  $A$  und  $B$  unabhängig sind, d.h. dass die beiden Zufallsereignisse sich nicht gegenseitig beeinflussen. Dann ist Wahrscheinlichkeit, dass die Summe beider Zufallsvariablen in  $[a, b]$  liegt, gleich

$$\begin{aligned} \int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x+y \leq b\}} \rho_A(x) \rho_B(y) d\text{vol}_{\mathbb{R}^2} &\stackrel{\bar{x}=x+y}{=} \int_a^b \int_{\mathbb{R}} \rho_A(\bar{x}-y) \rho_B(y) dy d\bar{x} \\ &= \int_a^b (\rho_A * \rho_B)(\bar{x}) d\bar{x}. \end{aligned}$$

Also ist  $\rho_A * \rho_B$  Wahrscheinlichkeitsdichte von  $A + B$ . (Insbesondere gilt wieder  $\|\rho_A * \rho_B\|_1 = 1$  – ÜA34.i)

Das kann man nun iterativ auch mit mehreren Wahrscheinlichkeitsdichten fortführen und da die Addition auf den Werten assoziativ ist, erwarten wir

$$(\rho_A * \rho_B) * \rho_C = \rho_A * (\rho_B * \rho_C)$$

und das stimmt allgemein für Faltungen, vgl. ÜA34.ii.

Die Gaußsche Normalverteilung kommt sehr häufig vor, z.B. bei der Beschreibung von Streuung von Messwerten. Das ist zu einem gewissen Punkt gerechtfertigt: Bei einem vernünftigen Experiment führt man die Messungen nicht nur einmal sondern oft genug durch (was immer das heißt) und bestimmt dann den Mittelwert.

Selbst jede einzelne Messung irgendeiner Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho$ , ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Summe der Ergebnisse von  $n$  solchen durchgeführten Messungen  $\rho^{*n} := \underbrace{\rho * \dots * \rho}_{n\text{-mal}}$  (Da wir annehmen, dass sich die einzelnen Messungen ge-

genseitig nicht beeinflussen – die Zufallsvariablen zu den einzelnen Messungen also unabhängig sind.) Eine Version des zentralen Grenzwertsatzes sagt nun, dass  $\int_a^b \sqrt{n\sigma^2} \rho^{*n} \left( (x + n\mu) \sqrt{n\sigma^2} \right) dx \rightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert, was sagt, dass die Summe von  $n$ -Zufallsvariablen mit Dichte  $\rho$  nach geeigneter Standardisierung mit dem  $\mu$  und  $\sigma^2 \neq 0$  von  $\rho$  gegen die Gaußsche Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 konvergiert, vgl. auch ÜA37.

**Vorl. 17 Beispiel 2.2.12.** (PDE=Partielle Differentialgleichungen) Lösungen von einigen geeigneten partiellen Differentialgleichungen können als Faltung mit sogenannten *Integrkernen* geschrieben werden, z.B:

Sei  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Wir suchen eine Funktion  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\Delta u = f.$$

$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  war der Laplace-Operator, vgl. [3, Def. 1.4.1].

Eine Lösung ist hier

$$u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y)f(y)d\text{vol}_y$$

für

$$G(x) := \begin{cases} \frac{|x|^{2-n}}{(2-n)\text{vol } S^{n-1}} & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x| & n = 2 \end{cases}$$

das *Newton-Potential*. Die Lösung ist nicht eindeutig, da  $u + c$  für eine Konstante  $c$  auch eine Lösung ist. Darum soll es hier aber nicht gehen. Wir wollen uns hier auch nicht überlegen, wie man auf diese Lösung kommt, sondern erst mal nur sehen, dass es überhaupt eine Lösung ist (jedenfalls vollständig für  $n = 2$  bzw.  $n = 3$ ):

$u$  ist wohldefiniert: Es ist  $|G(x)| \leq C|x|^{2-n}$  nahe  $x = 0$ . Damit folgt mit ÜA35(ii), dass  $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und damit  $G * f \in L^1$  ist.

Man kann direkt nachrechnen, dass  $\Delta G(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt. Man mag versucht sein, vielleicht die Ableitungen und damit den Laplaceoperator direkt unter das Integral zu ziehen und zu hoffen, dass die Null dort nichts ausmacht. Aber dann wäre  $\Delta u = 0$  und das erhoffen wir uns gerade nicht.  $\Delta G$  verhält sich auf ganz  $\mathbb{R}^n$  wie eine Distribution (= verallgemeinerte Funktion) – nämlich die Delta-Distribution  $\delta$  (und die hat genau die Eigenschaft, dass  $(\delta * f)(x) = f(x)$  ist). Die Delta-Distribution kann man sich als die Folge einer geeigneten approximativen Einheit vorstellen und so die Aussage  $\Delta u = f$  durch Approximationen beweisen.

Da wir hier aber einfach nur  $\mathbb{R}^n$  betrachten, kann man das auch einfach direkt nachrechnen:

Da Faltung kommutativ ist, gilt

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(y)f(x-y)d\text{vol}_y.$$

Das hat den Vorteil, dass nur  $f$  von  $x$  abhängt und im Gegensatz zu  $G$  zweimal stetig differenzierbar ist. Damit gilt nach Satz 1.6.3 der Differentiation von Parameterintegralen:

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(y)(\Delta f)(x-y)d\text{vol}_y.$$

Da wir durch eine Verschiebung von  $u$  und  $f$  ein gegebenes  $x$  immer in den Nullpunkt verschieben können, reicht es

$$\Delta u(0) = \int_{\mathbb{R}^n} G(y)(\Delta f)(-y)d\text{vol}_y = \int_{\mathbb{R}^n} G(-y)(\Delta f)(y)d\text{vol}_y.$$

nachzurechnen.

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

Berechnen wir den Laplace nun in Polarkoordinaten (für  $n = 2$ , s. [3, Bsp. 1.7.15]) bzw. in Kugelkoordinaten (für  $n = 3$ , s. [3, S. 91]), dann gilt

$$\begin{aligned} n = 2: \quad \Delta f &\stackrel{[3, \text{S.107/ÜA16}]}{=} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r^2} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\ n = 3: \quad \Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r^2} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right) \end{aligned}$$

Allgemeiner gilt:  $\Delta f = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{n-1} \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{n-1}} f$ , wobei  $\Delta_{S^{n-1}}$  nur noch von der Sphäre  $S^{n-1}$  abhängt und kein  $r$  mehr enthält.

Zusammen mit ÜA35.i haben wir, da  $G$  nur von der radialen Richtung abhängt:

$$\Delta u(0) = \int_0^\infty G(r) r^{n-1} \int_{S^{n-1}} \left( \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{n-1} \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{n-1}} f \right) (rz) \, \text{dvol}_z \, dr$$

(Hier ist  $z \in S^{n-1}$ .) Setzt man  $F(r) = \int_{S^{n-1}} f(rz) \, \text{dvol}_z$ , dann ist  $F$  in der Null durch  $\text{vol } S^{n-1} f(0)$  stetig fortsetzbar. Da  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , ist  $F(r) = 0$  für  $r$  groß genug. Außerdem ist  $\frac{\partial F}{\partial r}(0) = 0$ : Das kann man auf verschiedenen Arten sehen – wir benutzen hier ein Symmetrieargument. Wir benutzen die Definition von  $F$  nicht nur für  $r \geq 0$  sondern für  $r \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $F \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  und es gilt  $F(-r) = F(r)$ . Damit ist  $F$  gerade und alle ungeraden Ableitungen verschwinden in der Null.

Benutzt man wieder die Differentiation von Parameterintegralen hat man

$$\Delta u(0) = \int_0^\infty G(r) r^{n-1} \left( \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{n-1} \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \int_{S^{n-1}} \Delta_{S^{n-1}} f(rz) \, \text{dvol}_z \right) dr$$

Für jede Funktion  $g: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $\int_{S^{n-1}} \Delta_{S^{n-1}} g(z) \, \text{dvol}_z = 0$ , was wir hier nur für  $n = 2$  und  $n = 3$  nachrechnen (Wir haben ja auch  $\Delta_{S^{n-1}}$  nur dafür bestimmt.):

$$\begin{aligned} n = 2: \quad & \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} g(\varphi) \, d\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} g(\varphi) \Big|_0^{2\pi} \stackrel{\text{Period.}}{=} 0 \\ n = 3: \quad & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right) d\theta d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \Delta u(0) &= \int_0^\infty G(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{n-1} \frac{\partial F}{\partial r} \right) dr \\ &= \left( G(r) r^{n-1} \frac{\partial F}{\partial r} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial F}{\partial r} dr \right) \\ &= \left( G(r) r^{n-1} \frac{\partial F}{\partial r} \Big|_0^\infty - \frac{\partial G}{\partial r} r^{n-1} F \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial G}{\partial r} r^{n-1} \right) F dr \right) \quad (2.1) \end{aligned}$$

Da  $F$  für  $r$  groß genug konstant Null ist, sind die oberen Grenzen bei  $\infty$  beide Null. Die untere Grenze des ersten Summanden verschwindet auch (man benutzt  $\frac{\partial F}{\partial r}(0) = 0$ ) und der zweite Term liefert  $f(0)$ .

Das letzte Integral ist gleich Null, da gilt:

$$n = 2 : \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial(\ln r)}{\partial r} r \right) F dr = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} (1) F dr = 0$$

$$n \geq 3 : \frac{1}{2-n} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial r^{2-n}}{\partial r} r^{n-1} \right) F dr = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} (1) F dr = 0.$$

Also haben wir insgesamt  $\Delta u(0) = f(0)$  nachgerechnet.

Das ist hier nur eine Beispielrechnung, das geht auch allgemeiner. Z.B. muss  $f$  nicht glatt (wir haben hier zweimal stetig differenzierbar benötigt) oder kompakt getragen sein. Aber man braucht gewisse Abfallbedingungen an  $f$  im Unendlichen, damit die Werte an den oberen Grenzen in (2.1) verschwinden. Wenn man zusätzlich noch fordert, dass die Lösung  $u$  auch im Unendlichen verschwinden muss, ist die Lösung sogar eindeutig, nämlich die oben gegebene.

### 2.3 Fouriertransformationen

Bei den Fourierreihen haben wir periodische Funktionen (Periode  $2\pi$ ) in eine (unendliche) Summe von einfachen periodischen Funktionen (Periode  $\frac{2\pi}{k}$  mit  $k \in \mathbb{N}$ ) zerlegt. Wir wollen, dass nun verallgemeinern und eine Funktion in einfache periodische Funktionen zerlegen, aber beliebige Perioden/Frequenzen zulassen.

Der Anteil einer Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  der  $\frac{2\pi}{k}$ -periodisch ist, ist ähnlich wie bei Fourierreihen:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx.$$

Allerdings wird bei Fourierreihen auf eine Periode normiert (es wird nur über eine Periode integriert, sonst würde das Integral auch gar nicht endlich.), wegen hier über ganz  $\mathbb{R}$  integriert wird. Ist  $f$  nun auf  $\mathbb{R}^n$ , kann man nun für jede Koordinatenrichtung  $x_i$  nach dem Anteil fragen, der  $\frac{2\pi}{\xi_i}$ -periodisch und erhält (wenn man alle Koordinatenrichtungen gleichzeitig betrachtet) für  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx.$$

Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Dann erfüllt  $h_\xi: x \in \mathbb{R}^n \mapsto e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x)$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , dass  $|h_\xi(x)| \leq |f(x)|$  gilt. Damit ist  $h_\xi \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  nach Folgerung 1.4.6.

**Definition 2.3.1.** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Die Abbildung  $\hat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) d\text{vol}_x$$

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

heißt *Fouriertransformierte* von  $f$ . Die Abbildung  $\mathcal{F}$ , die  $f$  ihre Fouriertransformierte  $\hat{f}$  zuordnet, heißt *Fouriertransformation*.

Wegen Stetigkeit von Parameterintegralen ist  $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , vgl auch Beispiel 1.6.5. Es gilt

$$\|\hat{f}\|_{C^0} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) d\text{vol}_x \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|f\|_1$$

Also ist  $\hat{f} \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

### Beispiel 2.3.2.

(i) Sei  $f(x) = e^{-x} \chi_{[0, \infty)}(x)$ . Dann ist

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-x-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i\xi}$$

(ii) Sei  $f(x) = \chi_{[-1, 1]}(x)$ . Dann ist für  $\xi \neq 0$

$$\sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) = \int_{-1}^1 e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{-i\xi} e^{-ix\xi} \Big|_{-1}^1 = \frac{i}{\xi} (e^{-i\xi} - e^{i\xi}) = 2 \frac{\sin \xi}{\xi}.$$

Für  $\xi = 0$  ist  $\hat{f}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ .

(iii) Sei  $f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ . Dann ist in einer Dimension

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2-ix\xi} dx \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \frac{(-ix\xi)^k}{k!} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\xi^{2k}}{(2k)!} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} x^{2k} dx \end{aligned}$$

Das (\*) richtig ist, wissen wir mit ÜA19, sobald wir wissen, dass die rechte Seite endlich ist. Es gilt nach partieller Integration:

$$m_k := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} x^{2k} dx = \int_{\mathbb{R}} (xe^{-x^2/2}) x^{2k-1} dx = (2k-1)m_{k-1}$$

Mit  $m_0 = \sqrt{2\pi}$  folgt  $m_k = \sqrt{2\pi} \prod_{j=0}^{k-1} (2j+1)$ . Zusammen mit

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\xi^{2k}}{(2k)!} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} x^{2k} dx &= \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\xi^{2k} \prod_{j=0}^{k-1} (2j+1)}{(2k)!} \\ &= \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\xi^{2k}}{2^k k!} = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \end{aligned}$$

### 2.3 Fouriertransformationen

In mehreren Dimensionen kann das Integral mit Fubini in eindimensionale Integrale obiger Form zerlegt werden und wir erhalten in Dimension  $n$ :

$$\hat{f}(\xi) = \prod_{k=1}^n e^{-\frac{\xi_k^2}{2}} = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}.$$

**Lemma 2.3.3.** Seien  $f_i, f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  mit  $f_i \rightarrow f$  in  $L^1$ . Dann folgt  $\hat{f}_i \rightarrow \hat{f}$  in  $C^0$ .\*

*Beweis.*  $(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\hat{f}(\xi) - \hat{f}_i(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f_i(x)) e^{-i\langle x, \xi \rangle} d\text{vol}_x \right| \leq \|f - f_i\|_1 \quad \square$

**Satz 2.3.4.** Seien  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  mit Fouriertransformierte  $F$  bzw.  $G$ . Dann gilt:

Vorl. 18

	Funktion	Fouriertransformierte
linear ( $a, b \in \mathbb{C}$ )	$af(x) + bg(x)$	$aF(\xi) + bG(\xi)$
Skalierung ( $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ )	$f(cx)$	$\frac{1}{ c ^n} F\left(\frac{\xi}{c}\right)$
Verschiebung ( $d \in \mathbb{R}^n$ )	$f(x - d)$	$e^{-i\langle d, \xi \rangle} F(\xi)$
Differentiation (für $f \in C^k, \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f \in L^1$ )	$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x)$	$i^{ \alpha } \xi^\alpha F(\xi)$
Multiplikation (für $x^\alpha f(x) \in L^1$ )	$x^\alpha f(x)$	$i^{ \alpha } \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} F(\xi)$
Faltung	$(f * g)(x)$	$(2\pi)^{\frac{n}{2}} F(\xi)G(\xi)$

*Beweis.* Linearität folgt aus Linearität der Integration. Skalierung und Verschiebung folgt direkt mit dem Transformationssatz.

Für die Regel zur Differentiation: Da  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  dicht in  $L^1$  ist nach Lemma 2.2.10, reicht es wegen letztem Lemma die Regel für  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  nachzurechnen. Sei zunächst  $|\alpha| = 1$  mit Fubini und partieller Integration in der Variablen bzgl. der differenziert wird (o.B.d.A. sei das die erste Koordinate):

\*Das bedeutet: Die Fouriertransformation  $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ist stetig. (Da in metrischen Räumen nach [3, Lem. 1.1.4] Stetigkeit gleich Folgenstetigkeit ist.)

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_1 f(x)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_1} e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx_1 d\text{vol}_{(x_2, \dots, x_n)} \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} i\xi_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx_1 d\text{vol}_{(x_2, \dots, x_n)} = i\xi_1 F(\xi) \end{aligned}$$

Höhere Ableitungen gehen analog bzw. per Induktion.

Für die Produkte berechnen wir  $x_1 \hat{f}(x)$  – das allgemeiner  $x^\alpha$  geht analog:

$$\begin{aligned} \widehat{x_1 f(x)}(\xi) &= i \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\partial}{\partial \xi_1} e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx_1 d\text{vol}_{(x_2, \dots, x_n)} \\ &= i \frac{\partial}{\partial \xi_1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx_1 d\text{vol}_{(x_2, \dots, x_n)} = i \frac{\partial}{\partial \xi_1} F(\xi) \end{aligned}$$

Zur Faltung: Sind  $f, g \in L^1$ , dann ist auch  $f * g \in L^1$  und wir haben

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) d\text{vol}_y d\text{vol}_x &\stackrel{\bar{x}=x-y}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y+\bar{x}, \xi \rangle} f(\bar{x})g(y) d\text{vol}_y d\text{vol}_{\bar{x}} \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} (2\pi)^n G(\xi)F(\xi). \end{aligned}$$

□

Um Fouriertransformationen in Rechnungen anzuwenden, brauchen wir auch eine inverse Fouriertransformation, um zu den eigentlichen Funktionen zurück zukommen. Dazu benötigen wir noch

**Satz 2.3.5** (Fourier Integralsatz). *Seien  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Dann sind  $\hat{f}g, f\hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}g d\text{vol} = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g} d\text{vol}.$$

*Beweis.* Da  $\hat{f}$  stetig und beschränkt ist und  $g$  in  $L^1$  ist, ist  $\hat{f}g \in L^1$  nach Folgerung 1.4.6. Analog  $f\hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Außerdem ist  $e^{-i\langle x, y \rangle} f(x)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$  nach ÜA? und damit auch  $e^{-i\langle x, y \rangle} f(x)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ .

Damit folgt mit Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}g d\text{vol} &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} f(x)g(y) d\text{vol}_x d\text{vol}_y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, y \rangle} f(x)g(y) d\text{vol}_y d\text{vol}_x = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g} d\text{vol}. \end{aligned}$$

□

Für  $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  sei

$$\check{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\text{vol}_x.$$

Dann heißt  $\check{f}$  die *inverse Fouriertransformation* (s. folgenden Satz) und es gilt  $\check{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$ .

**Satz 2.3.6.** *Seien  $f$  und ihre Fouriertransformierte in  $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Dann ist  $\check{\check{f}} = f$  in  $L^1$ .*

$\hat{f}$  ist nicht zwingend in  $L^1$ , siehe Beispiel 2.3.2.i+ii.

Bevor wir diesen Satz beweisen brauchen wir:

**Lemma 2.3.7.** *Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Dann konvergiert*

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle y, x \rangle} \hat{f}(x) e^{-\epsilon^2 |x|^2} d\text{vol}_x$$

in  $L^1$  gegen  $f$ .

*Beweis.* Sei  $k_\epsilon$  die approximative Einheit zu  $k(x) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}$ . Dann gilt  $k_\epsilon(x) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \epsilon^{-n} e^{-\frac{|x|^2}{4\epsilon^2}}$ . Aus den Rechenregeln für Fouriertransformationen (Skalierung mit  $c = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}$  in der Gaußfunktion, Beispiel 2.3.2.iii) folgt dann  $k_\epsilon(x) = \mathcal{F}((2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\epsilon^2 |x|^2})$  und damit  $k_\epsilon(y-x) = k_\epsilon(x-y) = \mathcal{F}((2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{i\langle y, x \rangle} e^{-\epsilon^2 |x|^2})$ . Mit dem Fourier Integralsatz haben wir somit

$$\begin{aligned} (k_\epsilon * f)(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} k_\epsilon(y-x) f(x) d\text{vol}_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{i\langle y, x \rangle} e^{-\epsilon^2 |x|^2} \hat{f}(x) d\text{vol}_x. \end{aligned}$$

Aus Satz 2.2.5 folgt nun die Behauptung. □

*Beweis von Satz 2.3.6.* Ist  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , dann folgt die Behauptung aus dem letzten Lemma und dem Satz zur majorisierten Konvergenz, dass

$$f(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle y, x \rangle} \hat{f}(x) e^{-\epsilon^2 |x|^2} d\text{vol}_x = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle y, x \rangle} \hat{f}(x) d\text{vol}_x = \check{\check{f}}(y).$$

□

Dieser 'Trick' des Einfügen einer approximativen Einheit ist oft sehr nützlich. Wenn man es direkt probiert und

$$\check{\check{f}}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle y, \xi \rangle} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) d\text{vol}_x \right) d\text{vol}_\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle y-x, \xi \rangle} f(x) d\text{vol}_x d\text{vol}_\xi$$

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

hat man das Problem, dass der Integrand nicht in  $L^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$  ist und man nicht einfach Fubini machen kann – das Integral  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle y-x, \xi \rangle} d\text{vol}_\xi$  existiert auch gar nicht.

Ist  $\hat{f}$  nicht in  $L^1$ , kann es trotzdem sein, dass das Integral für  $\check{f}$  wieder  $f$  ergibt – dann aber nicht als Lebesgue-Integral. Z.B. für  $f = \chi_{[-1,1]}$  war  $\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin x}{x}$ . Hier kann man als uneigentliches Riemann-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{ix\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{ix\xi} d\xi$$

berechnen und erhält f.ü.  $f$  zurück, ÜA39.

### 2.3.1 Schwartz-Raum

**Vorl. 19** Wir werden eine Teilmenge von  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  definieren, die oft sehr hilfreich ist und auf der sich z.B. auch die Fouriertransformation besonders nett verhält und in verschiedenen Kontexten öfter verwendet werden. Wir werden sie vor allem nutzen, um den Satz von Riemann-Lebesgue zu zeigen, der sagt, dass die Fouriertransformierte einer  $L^1$ -Funktion im Unendlichen gegen Null geht.

**Definition 2.3.8.** Eine Funktion  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  heißt *schnell abfallend*, falls es für alle  $k, m \in \mathbb{N}$  Konstanten  $c_{k,m}$ , so dass für alle  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| \leq m$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$(1 + |x|^2)^k \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x) \right| \leq c_{k,m}.$$

Die Menge aller schnell abfallenden Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$  heißt *Schwartz-Raum* und bezeichnen wir mit  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ .

D.h. eine Funktion ist schnell abfallend, wenn alle Ableitungen im Unendlichen schneller abfallen als  $x^{-k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Insbesondere ist  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Dies ist eine echte Inklusion, da  $f(x) = e^{-|x|^2}$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ist, aber nicht in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ .

Es gibt verschiedene äquivalente Definitionen von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , vgl. z.B. QQ31 und den Beweis von Lemma 2.3.12.

Als nächstes setzen wir für alle  $k, m \in \mathbb{N}$

$$q_{k,m}(f) := \max_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x) \right|.$$

Damit ist

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid q_{k,m}(f) < \infty \forall k, m \in \mathbb{N}\}.$$

Da  $q_{0,m}(f) = \max_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x) \right|$  und damit äquivalent zur  $C^k$ -Norm aus Definition 2.2.7 ist, folgt  $\mathcal{S} \subset C_b^m(\mathbb{R}^n)$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ .

Man kann direkt sehen, dass  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ein Vektorraum ist und alle  $q_{k,m}$  jeweils eine Norm auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ist. Wir wollen aber eine Metrik auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , die 'alle diese Normen vereint'.

Ein Standardvorgehen aus einer Folge  $d_k$  von Metriken auf einem gemeinsamen Raum eine neue Metrik  $d$  zu bauen, so dass Konvergenz in  $d$  die Konvergenz bzgl. aller  $d_k$  impliziert und im geeigneten Sinne auch umgekehrt:

**Lemma 2.3.9.** *Sei  $X$  eine Menge und  $(d_k)_k$  eine Folge von Metriken auf  $X$ . Dann ist*

$$d(x, y) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{d_k(x, y)}{1 + d_k(x, y)}$$

eine Metrik auf  $X$ .

Eine Folge  $x_\ell \in X$  konvergiert bzgl.  $d$  genau dann, wenn  $(x_\ell)_\ell$  bzgl. aller  $d_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , gegen das gleiche  $x \in X$  konvergiert.

Kommen die  $d_k$  alle von einer Norm, dann kommt dieses  $d$  nicht mehr von einer Norm, da wir die positive Homogenität verlieren.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass  $d$  eine Metrik ist: Es ist  $d(x, y) \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$ , und damit ist  $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$  wohldefiniert. Es ist  $d(x, y) \geq 0$  für alle  $x, y \in X$  und aus  $d(x, y) = 0$  folgt  $d_k(x, y) = 0$  für alle  $k$  und damit insbesondere  $x = y$ . Symmetrie folgt aus der Symmetrie der einzelnen  $d_k$ . Es bleibt die Dreiecksungleichung:

$$d(x, y) + d(y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \left( \frac{d_k(x, y)}{1 + d_k(x, y)} + \frac{d_k(y, z)}{1 + d_k(y, z)} \right)$$

Das kann man 'brute force' unter Verwendung der Dreiecksungleichung für  $d_k$  nachrechnen oder man benutzt, dass  $h: s \mapsto \frac{s}{1+s}$  monoton steigend ist: Setzt man  $r = d_k(x, y)$  und  $s = d_k(y, z)$ . Dann ist  $t = d_k(x, z) \leq r + s$  und wir haben

$$h(t) \leq h(r + s) = \frac{r}{1 + r + s} + \frac{s}{1 + r + s} \leq h(r) + h(s).$$

Sei nun  $x_\ell \rightarrow x$  bzgl.  $d$ . Da alle Summanden in der Definition von  $d$  positiv sind, folgt  $x_\ell \rightarrow x$  bzgl.  $d_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

Sei anders herum  $(x_\ell)_\ell$  bzgl. aller  $d_k$  gegen  $x \in X$  konvergent. Sei  $\epsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{d_k(x_\ell, x)}{1 + d_k(x_\ell, x)} \leq \sum_{k=N}^{\infty} 2^{-k} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Andererseits folgt aus  $x_\ell \rightarrow x$  bzgl. aller  $d_k$ , dass es ein  $M \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $d_k(x_\ell, x) < \frac{\epsilon}{4}$  für alle  $k \leq N^*$  und alle  $\ell > M$  gilt. Damit ist (wir verwenden wieder, dass  $s \mapsto \frac{s}{1+s}$

---

\*Hier haben wir die Grenzwertdefinition für alle  $k \leq N$  einzeln verwendet und erhalten erst einmal ein  $j_k$  für jedes  $k$ . Das  $j$  hier ist das Maximum aller dieser  $j_k$  für  $k \leq N$ . Daran sieht man auch den Nutzen des  $N$  – damit wir das Maximum nur über endlich viele  $k$  nehmen.

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

monoton steigend ist)

$$d(x_\ell, x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{d_k(x_\ell, x)}{1 + d_k(x_\ell, x)} \leq \sum_{k=0}^N 2^{-k} \frac{d_k(x_\ell, x)}{1 + d_k(x_\ell, x)} + \frac{\epsilon}{2} \leq 2 \frac{\frac{\epsilon}{4}}{1 + \frac{\epsilon}{4}} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \quad \square$$

Verwenden wir die obige Konstruktion für unsere  $q_{k,m}$  erhalten wir auf dem Schwartzraum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  die Metrik\*

$$d_{\mathcal{S}}(f, g) := \sum_{k,m} 2^{-(k+m)} \frac{q_{k,m}(f-g)}{1 + q_{k,m}(f-g)}.$$

**Lemma 2.3.10.**

(i)  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ist dicht in  $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), d_{\mathcal{S}})$ .

(ii)  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ist dicht in  $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})^\dagger$  für  $p \in [1, \infty)$ .

(iii)  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ist dicht in  $(C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ , wobei

$$C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) := \{f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}^\ddagger$$

*Beweis.* (i) Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Sei  $\eta: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  glatt mit  $\eta(x) = 1$  für  $|x| \leq 1$  und  $\eta(x) = 0$  für  $|x| > 2$ . Wir setzen  $f_j(x) = f(x)\eta(\frac{x}{j})$ . Dann ist  $f_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Wir wollen zeigen, dass  $d_{\mathcal{S}}(f_j, f) \rightarrow 0$  gilt: Es ist  $f_j(x) - f(x) = f(x)(\eta(\frac{x}{j}) - 1)$  und ist damit gleich Null für  $|x| < j$ . Für  $|x| \leq j$  gilt nach der Leibnizregel für alle  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| = m$ :

$$\begin{aligned} |\partial_\alpha(f_j - f)(x)| &= \left| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f(x) \partial^{\alpha-\beta} (1 - \eta)\left(\frac{x}{j}\right) j^{-|\alpha-\beta|} \right| \leq c \max_{\beta \leq \alpha} |\partial^\beta f(x)| \\ &\leq c q_{k+1,m}(f) (1 + |x|^2)^{-\frac{k+1}{2}} \end{aligned}$$

und damit

$$q_{k,m}(f - f_j) = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{|x| \geq j} (1 + |x|^2)^{\frac{k}{2}} |\partial_\alpha(f_j - f)(x)| \leq \frac{c}{j} q_{k+1,m}(f).$$

(ii) Wir müssen zeigen, dass  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  überhaupt eine Teilmenge von  $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ist. Dann folgt die Behauptung direkt mit  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  und Lemma 2.2.10.

\*Da die Reihe wegen der positiven Summanden sogar absolut konvergiert, ist die Reihenfolge der Summation egal.

†Wenn wir nur  $L^p$  sagen, meinen wir immer den Banachraum  $(L^p, \|\cdot\|_p)$ .

‡ $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$  bedeutet: Für alle Folgen  $x_\ell \in \mathbb{R}^n$  mit  $|x_\ell| \rightarrow \infty$  folgt  $f(x) \rightarrow 0$

Es ist

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p (1 + |x|^2)^{\frac{(n+1)p}{2}} (1 + |x|^2)^{-\frac{(n+1)p}{2}} \, \text{dvol} \\ &\leq q_{\frac{(n+1)p}{2},0}(f)^p \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-\frac{(n+1)p}{2}} \, \text{dvol} \\ &\stackrel{\text{ÜA35(i)}}{\leq} \text{vol } S^{n-1} q_{n+1,0}(f)^p \int_0^\infty r^{n-1} (1 + r^2)^{-\frac{(n+1)p}{2}} \, dr \leq c(n,p) q_{n+1,0}(f)^p \end{aligned}$$

für eine Konstante  $c(n,p) > 0$ .

(iii) Wegen  $|f(x)| \leq q_{1,0}(f)(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$  ist der Schwartz-Raum eine Teilmenge von  $C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Wir überlegen uns als nächstes, dass  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  in  $(C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$  dicht ist, dann folgt der Rest, da  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \subset C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ist: Sei nun  $f \in C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Sei  $\eta: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  glatt mit  $\eta(x) = 1$  für  $|x| \leq 1$  und  $\eta(x) = 0$  für  $|x| > 2$ . Dann sind  $f_R(x) := \eta(\frac{|x|}{R})f(x)$  stetig und kompakt getragen mit  $f_R \rightarrow f$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ . Das zeigt, dass die stetigen kompakt getragenen Funktionen dicht in  $(C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$  sind. Es bleibt zu zeigen, dass die jede stetige kompakt getragene Funktion durch Elemente in  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  approximiert werden kann. Sei nun  $f$  stetig und kompakt getragen. Sei  $\varphi_\epsilon$  ein glättender Kern. Dann ist  $f_\epsilon := \varphi_\epsilon * f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Nach ÜA42 konvergiert  $f_\epsilon \rightarrow f$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ .  $\square$

Über den Raum  $C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  halten wir noch kurz fest:

**Lemma 2.3.11.**  $C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ist in  $(C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$  abgeschlossen und damit ist insbesondere  $(C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$  selbst wieder Banachraum.

*Beweis.* (Für die analogen Folgenräume haben wir uns das in ÜA8 überlegt.) Konvergiere  $f_k \in C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$  gegen  $f \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Um zu zeigen, dass  $f \in C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ist. Sei  $x_\ell$  eine Folge in  $\mathbb{R}^n$  mit  $|x_\ell| \rightarrow \infty$  und  $\epsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $\sup |f - f_k| < \frac{\epsilon}{2}$  gilt. Für dieses  $k_0$  gibt es ein  $\ell_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|f_{k_0}(x_\ell)| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $\ell > \ell_0$ . Damit folgt für alle  $\ell > \ell_0$

$$|f(x_\ell)| \leq |f(x_\ell) - f_{k_0}(x_\ell)| + |f_{k_0}(x_\ell)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Also ist  $C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  in  $(C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$  abgeschlossen. Jeder abgeschlossene Untervektorraum eines Banachraumes ist selbst wieder ein Banachraum: Da ein Untervektorraum eines normierten Vektorraums ist es wieder ein normierter Raum (bzgl. der gleichen Norm). Jede Cauchyfolge in diesem Untervektorraum ist insbesondere eine Cauchyfolge und damit konvergiert im Banachraum. Da der Untervektorraum aber abgeschlossen ist, muss dieser Grenzwert selbst aus dem Untervektorraum kommen.  $\square$

**Lemma 2.3.12.**

(i) Ist  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ , dann ist  $\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (x^\alpha f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ .

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

(ii) Ist  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , dann ist  $\hat{f} \in \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})}$ .

*Beweis.* Mit der Leibnizregel erhalten wir Konstanten  $c, C > 0$  mit

$$c \max_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (x^\alpha f(x)) \right| \leq q_{k,m}(f) \leq c \max_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f(x) \right|$$

Daraus folgt direkt (i).

(ii) Es ist  $\xi^\beta \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \hat{f} = i^{-|\alpha+\beta|} \widehat{\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (x^\alpha f)}$  nach Satz 2.3.4. Da  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ist, folgt mit (i), dass die Fouriertransformation von  $\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (x^\alpha f)$  wirklich existiert und damit insbesondere beschränkt ist. Also ist  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ .  $\square$

Damit ist  $\mathcal{S}$  insbesondere ein geeigneter Untervektorraum von  $L^1$  auf dem sowohl die Fouriertransformation als auch ihre inverse definiert und die Fouriertransformation nicht aus diesem Raum herausführt.

**Satz 2.3.13** (Satz von Riemann-Lebesgue). *Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Dann ist  $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ .*

*Beweis.* Sei nun  $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Nach Lemma 2.3.10.ii gibt es eine Folge  $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  mit  $f_k \rightarrow f$  in  $L^1$ . Nach Lemma 2.3.3 ist die Fouriertransformation eine stetige Abbildung von  $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  nach  $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Somit konvergiert  $\hat{f}_k \rightarrow \hat{f}$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ . Nach Lemma 2.3.10 ist  $\hat{f}_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \subset C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Nun ist  $C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$  abgeschlossen nach Lemma 2.3.11. Also ist  $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ .  $\square$

### 2.3.2 Erweiterung auf $L^2$

Man kann die Definition der Fouriertransformation auf andere Räume von Funktionen erweitern. Hier schauen wir uns als ein Beispiel die Definition auf  $L^2$  an. Da wird dann  $\frac{\sin x}{x}$  reinpassen, für welche wir zumindest gesehen haben, dass deren inverse Fouriertransformierte zumindest als uneigentliches Riemann-Integral existiert (ÜA39).

Um die Fouriertransformation auf  $L^2$  zu erhalten, schauen wir uns diese erst einmal auf  $L^1 \cap L^2$  an. Dort greift noch unsere ursprüngliche Definition.

**Lemma 2.3.14.** *Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Dann ist  $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  mit  $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ .*

*Beweis.*  $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$  folgt aus dem Satz 2.3.13 von Riemann-Lebesgue. Es ist

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} d\text{vol}_x \right|^2 d\text{vol}_\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{f(y)} e^{-i\langle x-y, \xi \rangle} d\text{vol}_x d\text{vol}_y d\text{vol}_\xi. \end{aligned}$$

Da der Integrand nicht in  $L^1$  von  $\mathbb{R}^{3n}$  liegt, benutzen wir den reskalierten Gaußkern  $k(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$  und den Satz zur monotonen Konvergenz, um doch Fubini anwenden zu können:

$$\begin{aligned}
 \|\hat{f}\|_2^2 &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} d\text{vol}_x \right|^2 k(\epsilon\xi) d\text{vol}_\xi \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{f(y)} e^{-i\langle x-y, \xi \rangle} k(\epsilon\xi) d\text{vol}_x d\text{vol}_y d\text{vol}_\xi \\
 &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} k(\epsilon\xi) e^{-i\langle x-y, \xi \rangle} d\text{vol}_\xi f(x) \overline{f(y)} d\text{vol}_x d\text{vol}_y \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} k(\epsilon\xi) e^{-i\langle \frac{x-y}{\epsilon}, \epsilon\xi \rangle} \epsilon^{-n} d\text{vol}_{\epsilon\xi} f(x) \overline{f(y)} d\text{vol}_x d\text{vol}_y \\
 &\stackrel{\text{Bsp. 2.3.2(iii)}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} k_\epsilon(x-y) f(x) \overline{f(y)} d\text{vol}_x d\text{vol}_y \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\overline{f * k_\epsilon})(x) d\text{vol}_x
 \end{aligned}$$

Es ist  $\|k\|_{L^1} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$ , vgl. Beispiel 2.2.6. Nach Satz 2.2.5 konvergiert  $\overline{f * k_\epsilon}$  dann in  $L^2$  gegen  $(2\pi)^{\frac{n}{2}} \overline{f}$  und damit  $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\overline{f * k_\epsilon})(x) d\text{vol}_x$  gegen  $\|f\|_2^2$ , da

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\overline{f * k_\epsilon})(x) d\text{vol}_x - \|f\|_2^2 \right| \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (\overline{f * k_\epsilon})(x) - \overline{f(x)} \right) d\text{vol}_x \right| \\
 &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_2 \left\| \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (\overline{f * k_\epsilon})(x) - \overline{f(x)} \right\|_2
 \end{aligned}$$

ist. □

Die Menge  $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ist dicht in  $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , da für  $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  nach Lemma 1.8.6 die Funktion  $\chi_{B_R(0)} f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  für alle  $R$  ist und  $\chi_{B_R(0)} f \rightarrow f$  für  $R \rightarrow \infty$  in  $L^2$  ist.

Mit dem letzten Lemma kann man die Fouriertransformation auf alle Elemente in  $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  erweitern:

**Satz 2.3.15.** *Es gibt eindeutige stetige Abbildungen  $\mathcal{F}, \mathcal{F}^* : L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , welche auf  $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  mit der Fouriertransformation bzw. der inversen Fouriertransformation übereinstimmen.*

**Vorl. 21**

Für diese Abbildungen gilt dann für alle  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

- (i) die Plancherel-Identität  $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|\mathcal{F}^*(f)\|_2$ .
- (ii)  $(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g))_{L^2} = (f, g)_{L^2} = (\mathcal{F}^*(f), \mathcal{F}^*(g))_{L^2}$
- (iii)  $(\mathcal{F}(f), g)_{L^2} = (f, \mathcal{F}^*(g))_{L^2}$

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

$$(iv) \mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^*\mathcal{F} = \text{Id}_{L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})}$$

*Beweis.* Da  $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  dicht in  $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ist, können wir  $\mathcal{F}$  für  $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  einfach als stetige Fortsetzung definieren – also als den  $L^2$ -Grenzwert von  $\mathcal{F}(f_i)$  für eine Folge  $f_i \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  mit  $f_i \rightarrow f$  in  $L^2$ . Existenz des Grenzwerts und Unabhängigkeit von der gewählten Folge  $f_i$  folgt direkt aus letztem Lemma. Damit überlebt auch die Plancherel-Identität – (i). Analog überlebt auch die Linearität der (inversen) Fouriertransformation.

(ii) folgt aus der Plancherel-Identität, der Linearität von  $\mathcal{F}^{(*)}$  und der Polarisationsformel\* für das komplexe  $L^2$ -Skalarprodukt

$$4(f, g)_{L^2} = \|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2 + i\|f + ig\|_2^2 - i\|f - ig\|_2^2.$$

(iii) Für  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ist dies der Fourier-Integralsatz, da dann  $(\hat{f}, g)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\bar{g}d\text{vol} = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g}d\text{vol} = \int_{\mathbb{R}^n} f\bar{\check{g}} = (f, \check{g})_{L^2}$  ist.

Für allgemeines  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  folgt es dann mit Approximation und Hölder, ÜA43.

(iv) Aus (ii) und (iii) folgt

$$(\mathcal{F}^*\mathcal{F}(f), g)_{L^2} = (\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g))_{L^2} = (f, g)_{L^2}$$

für alle  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  – also  $(\mathcal{F}^*\mathcal{F}(f) - f, g)_{L^2} = 0$ . Wählen wir  $g = \mathcal{F}^*\mathcal{F}(f) - f$  erhalten wir  $\mathcal{F}^*\mathcal{F}(f) = f$  in  $L^2$ . Die zweite Gleichheit geht analog.  $\square$

Insbesondere ist somit die Fouriertransformation auf ganz  $L^2$  definiert und dort auch invertierbar.

## 2.4 Diskrete Versionen

Wir wollen uns Diskretisierung der Operationen dieses Kapitels anschauen, da diese Operationen so numerisch angewendet werden, und dann an einigen Beispielen Anwendungen kennenlernen.

### 2.4.1 Diskrete Fourierreihe und Transformation

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -periodisch und in  $L^2$ . Dann ist

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \hat{f}(k) e^{ikx} \quad \text{mit} \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Versuchen wir mal ad-hoc zu diskretisieren: Wir betrachten die Funktion  $f$  nur durch ihre Werte an  $x_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}$  mit  $\ell = 0, 1, \dots, N-1$  gegeben – also  $y_\ell = f(x_\ell)$ .

Diskretisieren wir ad-hoc das Integral zur Berechnung der Fourierkoeffizienten durch  $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{2\pi}{N} y_\ell e^{-ikx_\ell} = \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{\sqrt{2\pi}}{N} y_\ell e^{-ik \frac{2\pi\ell}{N}}$ . Dann sehen wir schon, dass

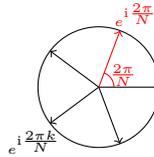
\*Die reelle Version hatten wir uns mal in ÜA24 überlegt.

$\hat{f}(k) = \hat{f}(k+N)$  ist – im Gegensatz zur nicht diskretisierten Version, wo  $(\hat{f}(k))_k \in \ell_2(\mathbb{Z})$  ist und damit abfällt. Deshalb kann Einsetzen der diskretisierten Version der  $\hat{f}(k)$  in die alte Formel der Fourierreihe noch nicht einmal konvergieren geschweige denn das  $f$  uns wiedergeben.

Aber es ist

$$\sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} y_m e^{-ik \frac{2\pi m}{N}} e^{ikx_\ell}}_{\hat{f}(k) \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \text{ von oben}} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} y_m e^{i(\ell-m) \frac{2\pi k}{N}} = Ny_\ell$$

was bis auf einen Faktor  $\frac{1}{N}$  der ad-hoc Diskretisierung der Fourierreihendarstellung entspricht. Die letzte Gleichheit folgt, da für eine  $n$ -te Einheitswurzel (= Lösung zu  $\omega^n = 1$ ) mit  $\omega \neq 1$  immer  $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$  gilt. Dies folgt aus  $0 = \omega^n - 1 = (\omega - 1) \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ . Wir verwenden dies hier für  $\omega = e^{i(\ell-m) \frac{2\pi}{N}}$ , was eine  $N$ -te Einheitswurzel ist, die nur für  $\ell = m$  gleich eins ist.



Damit haben wir nachgerechnet:

**Lemma 2.4.1** (Diskrete Fourierreihe). Sei  $y_\ell \in \mathbb{C}$ ,  $\ell = 0, \dots, N - 1$ . Für  $\hat{y}_k = \sum_{\ell=0}^{N-1} y_\ell e^{-ik \frac{2\pi \ell}{N}}$  ist

$$y_\ell = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{y}_k e^{i \frac{2\pi k}{N} \ell}$$

Die Abbildung endlich Folge  $(y_\ell)_\ell$  auf die Fourierkoeffizienten  $(\hat{y}_\ell)_\ell$  und zurück sind nicht ganz symmetrisch, da bei der Rücktransformation ein  $\frac{1}{N}$  steht. Das könnte man beheben, in dem man bei beiden Abbildungen ein  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  ähnlich wie wir es bei der Fourierreihe gemacht haben. Wir diskretisieren hier allerdings vor allem, um numerisch was ausrechnen zu können und da wollen wir nicht noch extra eine Wurzel berechnen müssen (Aber wäre auch nicht so schlimm, da  $N$  in Anwendungen i.A. konstant ist und dann müsste man es nur einmal ausrechnen).

Es ist  $\widehat{\hat{y}_k} = \widehat{y_{N-k}}$  und

$$\sum_{k=0}^{N-1} |y_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{y}_k|^2,$$

ÜA45 (das ist das diskrete Analog zu  $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$  für Fouriertransformationen bzw.  $\|f\|_2 = \|(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}\|_2$  für Fourierreihen).

**Lemma 2.4.2.** Sei  $f$   $2\pi$ -periodisch und auf  $[0, 2\pi]$  Riemann-integrierbar. Sei  $y_\ell^N = f(\frac{2\pi \ell}{N})$  und  $\hat{y}_\ell^N$  die zugehörigen diskreten Fourierkoeffizienten. Dann ist  $\hat{y}_\ell^N \rightarrow \frac{N}{2\pi} \hat{f}(\ell)$  für  $N \rightarrow \infty$ .

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

*Beweis.* Folgt direkt aus der Definition des Riemannintegrals mit

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi\ell}{N}\right) e^{-ik\frac{2\pi\ell}{N}} \rightarrow \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx} dx = \hat{f}(k).$$

□

Kommen wir nun zur Diskretisierung der Fouriertransformation - erst einmal in einer Dimension. Dann ist die Fouriertransformierte einer Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  in  $L^1$  gleich

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx.$$

Nehmen wir an, dass  $f$  Träger in  $[-a, a]$  (das ist ok, da reale Signale, sowieso nur aus endlich vielen Messwerten bestehen) und  $f$  darüber Riemann-integrierbar ist, dann können wir als Riemannsumme an den Stützstellen  $x_\ell = \frac{a}{N}\ell$  mit  $\ell = -N, \dots, 0, 1, \dots, N-1$  die Fouriertransformierte durch

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-N}^{N-1} \frac{a}{N} f(x_\ell) e^{-ix_\ell \xi}$$

annähern. Auswerten an diskreten Stellen  $\xi_k = k$  mit  $k = -N, \dots, 0, 1, \dots, N-1$  liefert

$$\sum_{\ell=-N}^{N-1} \frac{a}{\sqrt{2\pi N}} f(x_\ell) e^{-i\frac{a}{N}k\ell}.$$

Bis auf, dass der Ausgangsdefinitionsbereich nun  $[-a, a]$  statt  $[0, 2\pi]$  ist das genau die Formel der Diskretisierung der Fourierreihe.

Deshalb nennt man die Formeln aus Lemma 2.4.1, die aus einer endlichen Folgen  $y_\ell \in \mathbb{C}$  der Länge  $N$  ( $\ell = 0, \dots, N-1$ ) die endliche Folge  $\hat{y}_k = \sum_{\ell=0}^{N-1} y_\ell e^{-ik\frac{2\pi\ell}{N}}$  der Länge  $N$  als *Diskrete Fouriertransformation (DFT)* und die Rücktransformation  $y_\ell = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{y}_k e^{i\frac{2\pi k\ell}{N}}$  als *Inverse Fouriertransformation (IDFT)*.

Wenn man mit reellen Daten zu tun hat, will man oft nicht extra zu komplexen Daten übergehen und dann die komplexe Fouriertransformation nehmen. Da kann man auf den Real-Teil der FFT übergehen, da diese (zumindest für gerade Funktionen) dann alle Informationen enthält, oder direkt eine Diskretisierung des Realteils der Fouriertransformationen nehmen – *Diskrete Kosinustransformation (DCT)*.

**Beispiel 2.4.3.** Sei  $f(t) = 5 + 2 \sin t + 3 \cos(2t)$  für  $t = [0, 2\pi]$ . Wir diskretisieren mit  $N = 4$ . Dann ist  $y_\ell = f\left(\frac{2\pi\ell}{4}\right)$  und damit

$$\hat{y}_\ell = \sum_{k=0}^3 y_k e^{-i\frac{\pi k\ell}{2}} = \sum_{k=0}^3 y_k (-i)^{k\ell}$$

– also:

k	0	1	2	3
$y_k$	8	4	8	0
$\hat{y}_k$	20	-4i	12	4i

**Können wir direkt von den  $\hat{y}_k$  ausgehend wieder etwas über  $f$  aussagen?**

(Das folgende ist am Ende einfach die inverse Transformation - aber wir analysieren das einmal schrittweise.)  $\hat{y}_0 = 20$  entspricht (modulo Division mit  $N$ ) dem konstanten Anteil in  $f(t)$ , also Frequenz Null ( $20/N = 5$ ). Es ist  $\hat{y}_1 = \overline{\hat{y}_3} = -4i$ . Das kommt von der Sinuskomponente mit Frequenz 1 und Amplitude  $\frac{|\hat{y}_1|+|\hat{y}_3|}{N} = 2$  - also der  $2 \sin t$  Summand. Da  $\hat{y}_1$  rein imaginär ist, gibt es mit Frequenz 1 keinen Kosinusanteil. Bleibt noch  $\hat{y}_2 = 12$ . Das gehört zu  $k = 2$  und da es rein reell ist, kommt hier nur der Kosinusanteil vor mit Amplitude  $\frac{\hat{y}_2}{N} = 3$  - also  $3 \cos(2t)$ .

Die obige Diskussion ist unter der Annahme, dass die Frequenzen, die in (der Fourierreihe von)  $f$  auftauchen nicht zu groß sind. Hätte das  $f$  von oben, noch den Zusatzterm  $3 \sin(4t)$ , so würde sich  $y_\ell$  nicht ändern. Oder in dieser Diskretisierung mit  $N = 4$  könnten wir z.B.  $5 + 2 \sin t + 3 \cos(2t)$  nicht von  $5 + \sin t + 3 \cos(2t) + \sin(3t)$  unterscheiden - vgl. auch Aliasing im nächsten Abschnitt.

Ist jedoch  $f = \sin \frac{t}{2}$ , dann ist die Frequenz zwar nicht zu groß, wir haben also nicht das 'Aliasing'-Problem von oben. Aber die Frequenz ist nun eine, die nicht genau in den diskreten Frequenzen enthalten ist, die durch  $N$  und  $\Delta t = \text{Intervalllänge}/N$  bestimmt ist - also hier  $\frac{\pi \ell}{4}$  für  $\ell = 0, \dots, 3$ . Hier wäre nun

k	0	1	2	3
$y_k$	0	$1/\sqrt{2}$	1	$-1/\sqrt{2}$
$\hat{y}_k$	$\sqrt{2} + 1 \sim 2.4$	-1	$1 - \sqrt{2} \sim 0.6$	-1

**Leaking/Windowing und Aliasing**

Durch Diskretisieren und Abschneiden können ungewollte Effekte bei der DFT auftauchen:

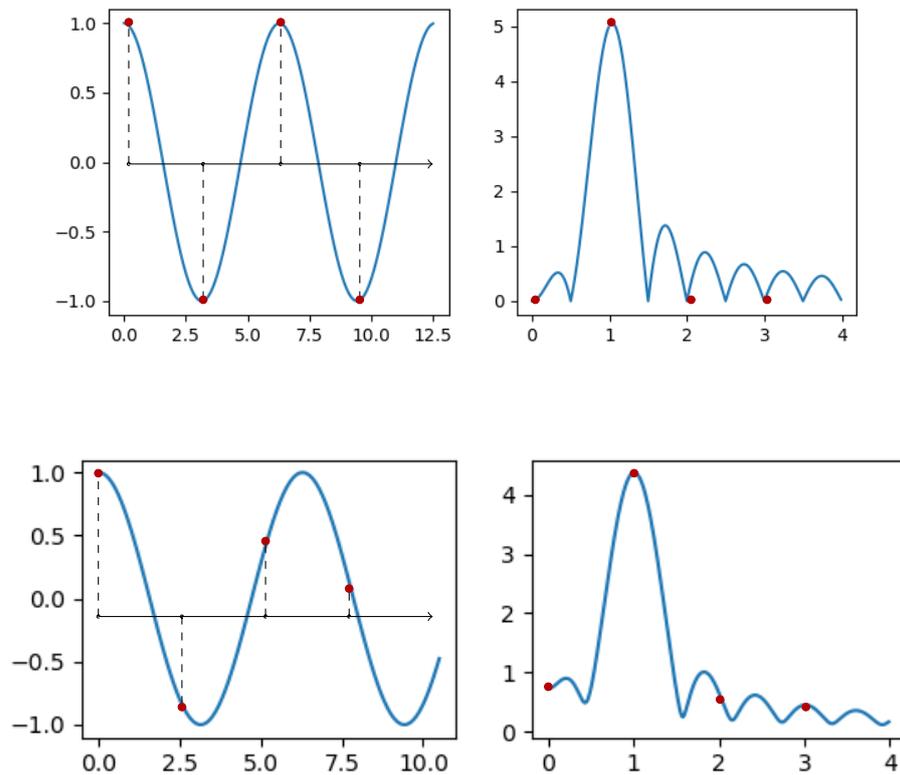
Einen haben wir oben schon im letzten Beispiel gesehen - *Aliasing*: Die Länge/Zeit  $\Delta t$  zwischen zwei Diskretisierungspunkten (*sample interval*) bestimmt, bis zu welcher Frequenz das Ausgangssignal aus der Diskretisierung höchstens wieder konstruiert werden kann. Das ist die *Nyquist-Frequenz*  $f_{Ny} = \frac{1}{2\Delta t}$ . Wenn man doch ein Sample hat, dessen sample rate ( $=1/\Delta t$ ) zu klein ist, also dessen Signal Anteile hat mit Frequenz höher als die Nyquist-Frequenz, wird dieser bei der DFT in Anteile mit kleineren Frequenzen 'übersetzt'. Das nennt man Aliasing.

Die Anzahl  $N$  der Diskretisierungspunkte hingegen bestimmt die Abstände zwischen Frequenzen, welche aufgelöst werden können:  $\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$ . Das Produkt  $N\Delta t$  nennt man *sampling period*.

Durch Diskretisieren und Abschneiden können noch weitere ungewollte Effekte bei der DFT auftauchen - der *Leck-Effekt/Leakage-Effekt*:

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

Einen Leakage-Effekt ('spectral leakage') haben wir auch schon im letzten Beispiel beschrieben. Dort passiert dieser Effekt, wenn die Frequenz im Ausgangssignal zwischen zwei der Frequenzen der DFT liegen. Ein analoger Leakage-Effekt kann auch auftreten, wenn es zwar eine Frequenz im Signal ist, die in der DFT vorkommt. Das kann daher kommen, dass das Ausgangssignal irgendwo abgeschnitten wird. Ist das Ausgangssignal  $\sin t$ , dann würden wir als Frequenz  $k = 1$  (als echte physikalische Frequenz  $\frac{1}{2\pi}$ , aber wir lassen die  $2\pi$  hier immer weg) erwarten. Doch wenn wir das Signal nur auf einem endlichen Intervall anschauen (z.B.  $[0, 4\pi]$  im unteren Bild oben links) ist schon die (nicht diskretisierte) Fouriertransformation nicht nur ein einzelner Peak bei  $k = 1$ , sondern die blaue Kurve im Bild oben rechts (das ist der Absolutbetrag der Fouriertransformation). In der DFT mit  $N = 4$  und  $\Delta t = \frac{4\pi}{N} = \pi$  würde nun aus der Folge der roten Punkte links die Folge der roten Punkte rechts werden und wir würden wieder nur einen Anteil bei  $k = 1$  sehen. Das liegt aber daran, dass wir zufällig das endliche Intervall mit einer Länge gewählt haben, die ein Vielfaches der Periode ist. Wählt man eine Länge bei der das nicht so ist, tritt wieder ein Lecken auf andere Frequenzen auf, siehe die unteren beiden Bilder. Das ist der Sinus mit gleicher Periode nur ist die Länge des Signals kein Vielfaches der Periode.



Leakage-Effekte wird man nicht total verhindern können, das Signal wird in der Realität immer nur eine endliche Länge haben. Aber man kann den Effekt etwas abmildern, wenn man nicht hart mit einer charakteristischen Funktion ein endliches Stück rauslöst (entspricht der Multiplikation mit einem Rechtecksignal), sondern mit anderen kompakt getragenen Signalen multipliziert. Dies nennt man *windowing*. Es werden verschiedene solcher *Fensterfunktionen* verwendet\*. Da die Fouriertransformation eines Produkts (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) gleich dem Produkt der einzelnen Fouriertransformationen, lässt sich der Effekt einer Fensterfunktion auf die DFT auch leicht bestimmen.

### DFT in mehreren Dimensionen

Hat man eine Funktion  $f: [0, 2\pi]^n \rightarrow \mathbb{R}$ , so kann man auch in alle  $n$ -Richtungen jeweils eine DFT durchführen (ähnlich wie bei der Fourierreihe in mehreren Dimensionen). Der wichtige Fall in den Anwendungen ist vor allen Dingen  $n = 2$ , da dies bei Bildbearbeitung relevant. Dann würde man  $f$  mit einer Matrix  $y_{mj} = f(\frac{2\pi m}{N}, \frac{aj}{N})$  und erhält dann

$$\hat{y}_{mj} = \sum_{k,\ell=0}^{N-1} y_{k\ell} e^{-i\frac{2\pi}{N}(km+\ell j)}.$$

### FFT – Fast Fourier Transform

Schauen wir noch einmal auf die Diskrete Fouriertransformation. Gegeben eine Folge  $y_\ell$  der Länge  $N$ , berechnen wir  $\hat{y}_k = \sum_{\ell=0}^{N-1} y_\ell e^{-i\frac{2\pi}{N}k\ell}$ . Wir können dies auch in einer Matrixschreibweise darstellen. Sei  $y = (y_0, \dots, y_{N-1})^T$ ,  $\hat{y} = (\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_{N-1})^T$ ,  $\omega_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$

$$F = (\omega_N^{-jk})_{j,k=0}^{N-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N^{-1} & \dots & \omega_N^{-(N-1)} \\ 1 & \omega_N^{-2} & \dots & \omega_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{-(N-1)} & \dots & \omega_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $\hat{y} = Fy$  und rechnet man diese Matrixmultiplikation stumpf nach, benötigt man  $N^2$  Multiplikationen und  $N(N+1)$  Additionen. Der Rechenaufwand würde also wie  $O(N^2)$  gehen (Das hier ist die *Groß-O-Notation*, die ist leicht verschieden von der Klein-o-Notation aus [2, Abschnitt 4.3.3]: Es ist  $f(x) = O(g(x))$ , falls es ein  $M > 0$  und ein  $x_0$  gibt mit  $|f(x)| \leq M|g(x)|$  für alle  $x \geq x_0$ . Die Groß-O-Notation wird in der Informatik in der Komplexitätstheorie, der Analyse des Rechen-/Zeitaufwandes von Algorithmen, verwendet.)

Die Idee ist nun durch geeignetes Gruppieren den Rechenaufwand zu reduzieren.

\*<https://de.wikipedia.org/wiki/Fensterfunktion>

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

Schauen wir uns als Beispiel  $N = 4$  an, da ist

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{und } \hat{y} = Fy = \begin{pmatrix} (y_0 + y_2) + (y_1 + y_3) \\ (y_0 - y_2) - i(y_1 - y_3) \\ (y_0 + y_2) - (y_1 + y_3) \\ (y_0 - y_2) + i(y_1 - y_3) \end{pmatrix}$$

Wir können also erst 4 Additionen ausführen ( $y_0 \pm y_2, y_1 \pm y_3$ ), dann zweimal mit  $i$  multiplizieren und am Ende noch 4 Additionen ausführen. Das sind 10 Operationen statt vorher  $N^2 + N(N + 1) = 36$ .

Eine solche Reduktion rekursiv ausgeführt ist die grundlegende Idee der FFT. Dieser Algorithmus wurde von Cooley und Tukey in der 60er beschrieben. Dazu habe  $N$  die Form  $2^m$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ . Für ein Polynom  $p$  seien  $p_g$  und  $p_u$  Polynome, so dass  $p(x) = p_g(x^2) + xp_u(x^2)$ . D.h.  $p_g(x^2)$  wäre der gerade Anteil von  $p(x)$  und  $xp_u(x^2)$  der ungerade Anteil. Für  $p(\omega_N) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-k}$  wäre für  $j = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$

$$\begin{aligned} \hat{y}_j &= p_g(\omega_N^{-2j}) + \omega_N^{-j} p_u(\omega_N^{-2j}) = p_g(\omega_{\frac{N}{2}}^{-j}) + \omega_{\frac{N}{2}}^{-j} p_u(\omega_{\frac{N}{2}}^{-j}) \\ \hat{y}_{\frac{N}{2}+j} &= p_g(\omega_N^{2(\frac{N}{2}+j)}) + \omega_N^{\frac{N}{2}+j} p_u(\omega_N^{2(\frac{N}{2}+j)}) = p_g(\omega_{\frac{N}{2}}^{-j}) - \omega_{\frac{N}{2}}^{-j} p_u(\omega_{\frac{N}{2}}^{-j}) \end{aligned}$$

(hierbei haben wir in der Matrixmultiplikation  $Fy$  die geraden Anteile (alle ungeraden Spalten) und die ungeraden Anteile (alle geraden Spalten) separiert).

Diese Formeln sagen uns: Zur Berechnung der DFT vom Vektor  $y = (y_0, \dots, y_{N-1})^T$  der Länge  $N$  können wir auch die DFT von zwei Vektoren  $y_g = (y_0, y_2, \dots, y_{N-2})^T$  und  $y_e = (y_1, y_3, \dots, y_{N-1})^T$  berechnen und brauchen am Ende noch  $N$  Multiplikation und  $N$  Additionen. Allerdings war  $N$  ja eine Zweierpotenz, d.h. wir können diese Reduktion auch bei der Berechnung der DFT von  $y_g$  und  $y_u$  anwenden und so weiter. Das macht FFT und dabei reduziert sich der Rechenaufwand zu  $O(N \log_2 N)$ , vgl. ÜA47.

### 2.4.2 Diskrete Faltung

**Vorl. 22** Analog kann man auch die Faltung

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) \, d\text{vol}_y$$

diskretisieren. Gehen wir analog wie bei der Fouriertransformation vor erhalten wir in einer Dimension ( $n = 1$ ) für die Faltung zweier endlicher Faltung  $f_i$  und  $g_j$ , jeweils der Länge  $N$ :

$$h_i = \sum_{j=0}^{N-1} f_{i-j}g_j \quad \text{für } i = 0, \dots, N-1$$

Der Rechenaufwand für die direkte Berechnung ist hier auch  $O(N^2)$ . Aber FFT kann hier wieder den Rechenaufwand reduzieren: Es gilt wie im kontinuierlichen Fall: DFT

einer Faltung ist das punktweise Produkt der einzelnen DFTS, vgl. ÜA46. D.h. wir müssen zwei Fouriertransformationen berechnen, deren koordinatenweises Produkt und dann eine inverse Fouriertransformation. Mit Hilfe der FFT hat das nun den Rechenaufwand  $O(3N \log_2 N + N) = O(N \log_2 N)$ .

### 2.4.3 Anwendungen

Es gibt viele Anwendungen der Fouriertransformationen (DFT/FFT). Z.B digitale Signalverarbeitung (Kompressionsalgorithmen, Verstärken/Unterdrücken von Noise oder Hintergrundgeräuschen), Spektralanalyse... Wir wollen uns hier ansehen, an einigen Bildbeispielen die Wirkung von Fouriertransformationen ansehen:

In der Bildbe- und -verarbeitung wird auch oft mit FFTs und diskreten Faltungen gearbeitet. Das Bild ist in Pixeln gegeben, jedem Pixel ist eine Farbe zugeordnet. I.A. ist jedem Pixel drei Werte zugeordnet: ein Rotwert (R), ein Grünwert (G) und ein Blauwert (B) – RGB. Dann kann man alle Operationen pro Farbe einzeln machen. Um uns hier das Leben leichter zu machen, schauen wir uns nur graue Bilder an. Jedes Pixel hat einen ganzzahligen Wert zwischen 0=schwarz und 255=weiß.

Oft wird vor anwenden der FFT, die Skala der  $y$ -Werte verschoben, um sie symmetrische zu machen. Dann ist im Original also immer  $-122$  nun schwarz und  $122$  nun weiß – der Wert 0 entspricht nun einem grau.

Da wir für die FFT (bis auf eine Ausnahme weiter unten) sowieso immer nur den Absolutbetrag plotten – bleiben wir dort bei der Konvention: 0 ist schwarz. Ansonsten sind die FFT die hier abgebildet werden oft nicht die lineare Abbildung  $(0, max)$  auf die Grauskala  $(0, 255)$ , sondern manchmal habe ich andere monotone Funktionen verwendet, damit die Helligkeitsunterschiede besser sichtbar werden und wir nach dem Runden auf ganze Zahlen z.B. nicht nur noch schwarz sehen. Ich gehe auf die genaue Wahl hier nicht weiter ein.

In Abbildung 2.3 schauen wir uns erst einmal die FFT einer einfachen Welle an, in Abbildung 2.7 das ganze noch mal mit Leakage-Effekt. Dann sehen wir in Abbildung 2.4 und 2.4 den Einfluss von Abschneidefunktionen, der uns auch zeigt, dass man Geraden/Geradenstücke/Horizonte im Original durch Ursprungsgeraden in der FFT identifizieren kann, vgl. auch Abbildung 2.5.

Insgesamt treten bei der FFT und IFFT zwar Rundungseffekte auf, doch i.A. ist dies für das bloße Auge nicht zu sehen, vgl. Abbildung 2.8, abgesehen von Leakage-Effekten, die man durch blurring (Mitteln/Falten) aber verringern kann.

---

\* $\text{sinc}(y) = \frac{\sin y}{y}$

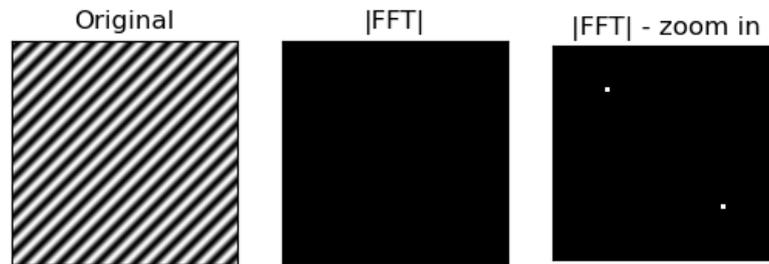


Abbildung 2.3: Links ist das Bild von  $f_1(x) = 2 \cos(i\frac{2\pi}{N}\langle k, x \rangle) = e^{i\frac{2\pi}{N}\langle k, x \rangle} + e^{-i\frac{2\pi}{N}\langle k, x \rangle}$  für  $k = (k_1, -k_1)$  mit  $k_1 \in \{0, 1, \dots, N\}$ ,  $N = 1024$  und  $x = (x_1, x_2)^T$ . In der Mitte ist Absolutbetrag der FFT. So sieht es erst einmal aus, als ob diese vollständig schwarz ist und damit gleich Null ist (oder zumindest klein genug ist, um für die Farbausgabe auf Null gerundet zu werden. Um mehr zu sehen, gibt es rechts ein rein gezoomtes Bild. Die FFT ist überall Null nur in zwei Punkten  $(k_1, -k_1)$  und  $(-k_1, k_1)$  ungleich Null. Das entspricht genau, was man der DFT-Darstellung von  $f_1$  ablesen kann. Bei allen weiteren FFT-Bildern wird ab sofort immer eine geeignete Zoom-Stufe gezeigt.

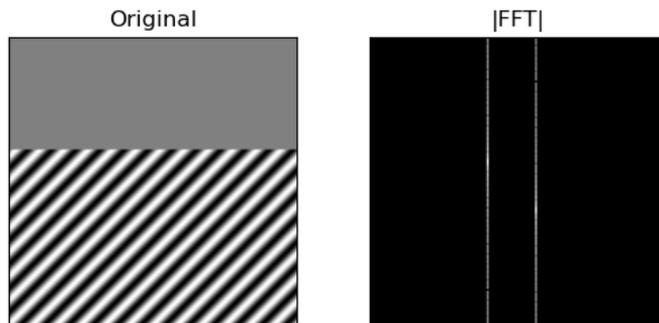


Abbildung 2.4: Hier ist das Original  $f_2(x) = f_1(x)\chi_{\{0 \leq x_2 \leq a\}}$  für  $f_1$  wie in der letzten Abbildung und ein  $a \in [0, N]$  (Grau entsprach in den Originalbildern dem Wert 0). Da die Fouriertransformierte eines Produkts modulo Konstante die Faltung der einzelnen Fouriertransformierten ist (s. ÜA 47 für die diskrete Version), erwarten wir als FFT hier die Faltung der Fouriertransformierten des ersten Bildes mit der von  $\chi_{\{0 \leq x_2 \leq a\}}$ , welches modulo Konstante und Konstante die diskretisierte sinc-Funktion\* in  $x_2$ -Richtung ist. Bei der Faltung wird damit die FFT von  $f_1$  in  $x_2$ -Richtung 'ausgeschmiert'. Ausgeschmiert ist nicht ganz das richtige Wort, da wegen der sinc-Funktion, die Helligkeit nicht monoton abnimmt. An dem maximalen Wert der FFT in einem der hellen Linien (kommt vom Maximum der sinc-Funktion im Ursprung) sieht man noch, wo die FFT von  $f_1$  die zwei hellen Pixel hatte.

Woran sieht man das  $a$ ? Also die Höhe dessen, wo abgeschnitten wurde. In den Konstanten bei der sinc-Funktion und damit nur an den genauen Beträgen der Real- und Imaginärteils der FFT. In unserem Bild sieht man das also schlecht bis gar nicht.

Das zeigt uns aber schon, dass Ursprungsgeraden in der FFT zu Geraden/Geradenstücke (z.B. einem Horizont) im Original gehören werden. Der Anstieg der Geraden in der FFT ist dabei immer senkrecht zur Geraden im Original, da der Wellenvektor  $k$  in  $e^{i\langle k, x \rangle}$  immer senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle  $e^{i\langle k, x \rangle}$  ist (vgl. letzte und folgende Abbildung).

## 2 Fourierreihen und Fouriertransformationen

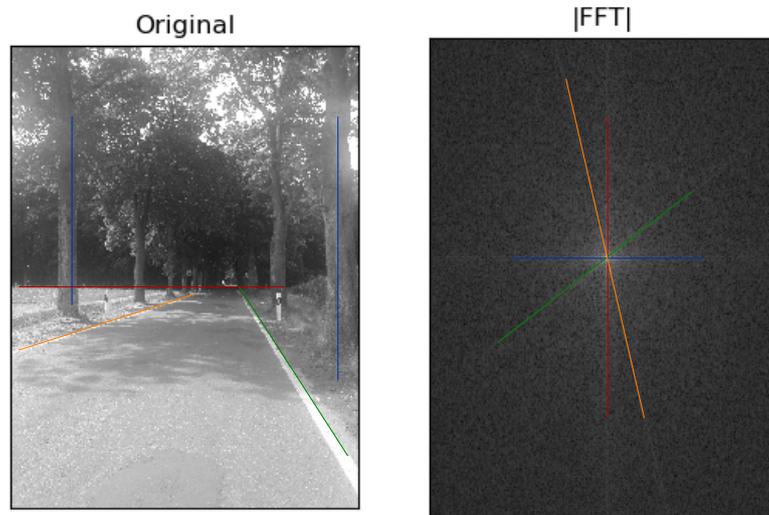


Abbildung 2.5: Mit geeigneter Zoom-Stufe und monotonen Abbildung  $|FFT|$ -Wert zu Farbwert sieht man hier in der FFT von dem Allee-Bild einige Geraden, welche zu Geraden/Geradenstücken im Original gehören.

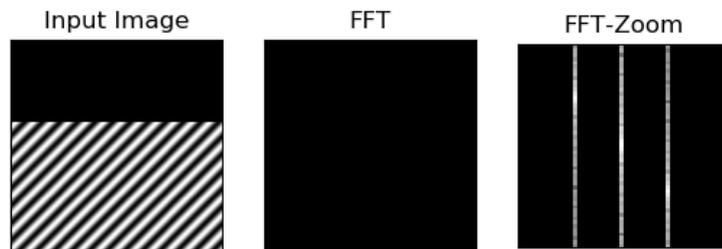


Abbildung 2.6: Nun ändern wir das Original in Abbildung 2.4 ab und setzen den oberen Teil auf Schwarz, also  $f_2(x) = f_1(x)\chi_{\{0 \leq x_2 \leq a\}} + A\chi_{\{a \leq x_2 \leq N\}}$  mit  $A = -122$  dem verschobenem Farbwert für schwarz. Dann ist wegen Linearität die FFT nun die FFT aus Abbildung 2.4 plus der von  $A\chi_{\{a \leq x_2 \leq N\}}$ . Das  $A$  gibt uns in der FFT einen Punkt im Ursprung der FFT von  $\chi_{\{a \leq x_2 \leq N\}}$  gefaltet, also wieder in  $x_2$ -Richtung 'ausgeschmiert'.

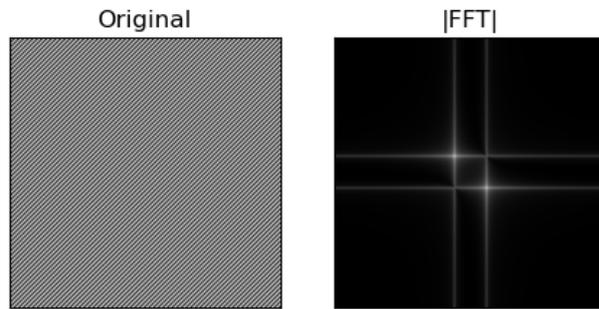


Abbildung 2.7: Die Welle in Abbildung 2.3 wurde extra so gewählt, dass der Wellenvektor nur ganze Zahlen enthält zwischen  $-(N-1)$  und  $N-1$  enthält und damit direkt die diskretisierten Frequenzen. Betrachten wir eine Welle bei der das nicht so ist, erwarten wir wieder leakage. Das sieht man auch im rechten Bild. Die beiden hellsten Punkte werden den Wellenvektoren  $(k_1, k_2)$  entsprechen, die dem echten Wellenvektor des Bildes am nächsten ist. Damit man solche Leakage-Effekt nicht mit echten Strukturen im Original verwechselt, kann man blurren (falten mit einem kompakt-getragenen Kern, s. unten), was diesen Effekt dann etwas ausschmiert.

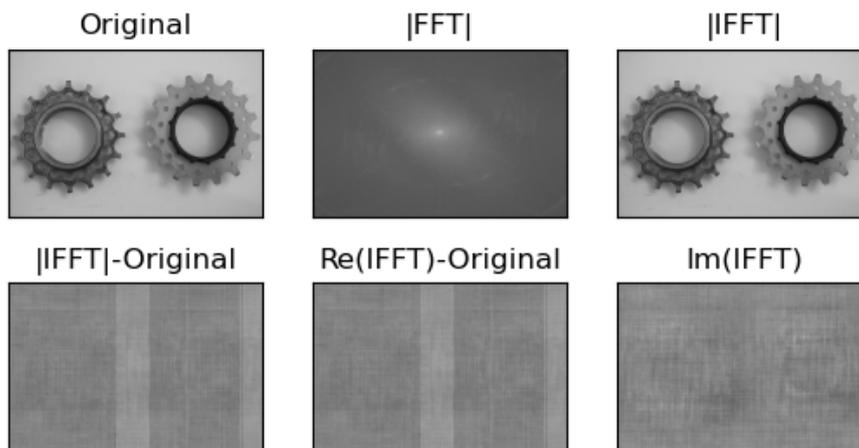


Abbildung 2.8: Die inverse DFT ist wie der Name suggeriert eigentlich invers zur DFT. In echten Rechnungen treten allerdings Diskretisierungs- und Rundungseffekte auf. Für das bloße Auge sehen die Ritzel im Originalbild und in der IFFT genau gleich aus. Lässt man allerdings sich mal die Differenz zum Originalbild oder den Imaginärteil der IFFT plotten, sieht man das diese Bilder nicht einheitlich grau sind (also konstant Null sind).

2 *Fourierreihen und Fouriertransformationen*

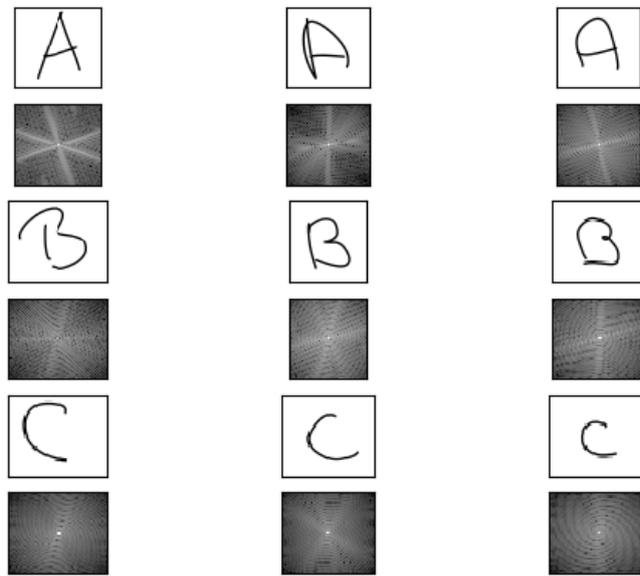


Abbildung 2.9: Verschieden geschriebene Buchstaben haben in der FFT doch sehr ähnliche Charakteristika.

# 3 Maßtheorie

## 3.1 Von $L^1(\mathbb{R}^n)$ zum Lebesgue-Maß

Bevor wir zu den allgemeinen Definitionen und Konstruktionen kommen, wollen wir sehen, wie wir aus  $L^1(\mathbb{R}^n)$  ein Maß definieren können und welche Eigenschaften dieses hat.

Vorl. 23

**Definition 3.1.1.** Sei  $K$  ein Quader. Eine Teilmenge  $S \subset K$  heißt *Lebesgue-messbar*, falls es  $\chi_S \in L^1(K)$  ist. Dann setzen wir

$$\lambda_K^n(S) := I(\chi_S).$$

Eine Teilmenge  $S \subset \mathbb{R}^n$  heißt *Lebesgue-messbar*, falls  $S \cap Q$  für alle Quader  $Q \subset \mathbb{R}^n$  *Lebesgue-messbar* ist. Dann setzen wir

$$\lambda^n(S) := \lim_{a \rightarrow \infty} \lambda_{Q_a}^n(S \cap Q_a) \in [0, \infty]$$

und nennen  $\lambda^n(S)$  das *Lebesgue-Maß* von  $S$ . Die Menge der Lebesgue-messbaren Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  bezeichnen wir mit  $\Lambda^n$ .

Ist  $S$  Teilmenge eines Quaders, dann ist sie als Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  Lebesgue-messbar genau dann, wenn sie als Teilmenge dieses Quaders Lebesgue-messbar ist. Ist  $S \subset \mathbb{R}^n$  Lebesgue-messbar, dann ist  $\lambda_{Q_a}^n(S \cap Q_a)$  in  $a$  monoton steigend. Damit existiert der (ggf. uneigentliche) Grenzwert für  $a \rightarrow \infty$ . Z.B. ist  $S = \mathbb{R}^n$  Lebesgue-messbar mit  $\lambda^n(\mathbb{R}^n) = \infty$ .

Sammeln wir erste Lebesgue-Maße von Mengen:

### Lemma 3.1.2.

- (i) Ist  $S \subset \mathbb{R}^n$  vernachlässigbar, dann ist  $\chi_S = 0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und  $\lambda^n(S) = 0$ . Solche Mengen heißen Lebesgue-Nullmengen.
- (ii) Jede offene Teilmenge  $S \subset \mathbb{R}^n$  ist Lebesgue-messbar mit  $\lambda^n(S) = \text{vol } S$ .
- (iii) Ist  $S \subset \mathbb{R}^n$  Lebesgue-messbar, dann ist

$$\lambda^n(S) = \inf \{ \text{vol } G \mid S \subset G, G \text{ ist offen} \}.$$

- (iv) Sind  $S, T \subset \mathbb{R}^n$  Lebesgue-messbar, dann auch  $S \cap T$ .
- (v) Ist  $S \subset \mathbb{R}^n$  Lebesgue-messbar, dann auch  $\mathbb{R}^n \setminus S$ .

### 3 Maßtheorie

*Beweis.* (i) Da  $S$  vernachlässigbar ist, ist  $\chi_S(x) = 0$  f.ü. und damit  $\chi_S = 0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und  $\lambda^n(S) = 0$ .

(ii) Sei  $S$  Teilmenge eines Quaders. Aus Beispiel 1.3.7 folgt  $\chi_S \in L^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $I(\chi_S) \leq \text{vol } S$  und mit Seite 23  $\lambda^n(S) = I(\chi_S) = \text{vol } S$ . Für  $S \subset \mathbb{R}^n$  ggf. unbeschränkt folgt analog wie in Beispiel 1.3.7 und Seite 1.3.5  $I(\chi_{S \cap [-a, a]^n}) = \text{vol } S \cap [-a, a]^n$ . Mit Lemma 1.2.4.ii folgt  $I(\chi_{S \cap [-a, a]^n}) \rightarrow \text{vol } S$  für  $a \rightarrow \infty$ . Damit folgt aus dem Satz monotoner Konvergenz  $\chi_{S \cap [-a, a]^n} \rightarrow \chi_S$  in  $L^1$  und damit die Behauptung.

(iii) Für  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $S \subset G$  gilt  $\chi_S \leq \chi_G$  und damit  $\lambda^n(S) \leq \text{vol } G$ .

Nach Lemmata 1.3.9 und 1.3.10 gibt es ein  $c \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ , so dass es für jedes  $\epsilon > 0$  eine offene Menge  $B_\epsilon$  mit  $\text{vol } B_\epsilon < \epsilon$  und  $|c(x) - \chi_S(x)| < \epsilon$  für alle  $x \notin B_\epsilon$  und  $\|c - \chi_S\|_1 < \epsilon$ . Damit ist insbesondere  $I(c) \leq I(\chi_S) + \|c - \chi_S\|_1 \leq I(\chi_S) + \epsilon = \lambda^n(S) + \epsilon$ .

O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $c \geq 0$  ist (da  $\chi_S \geq 0$  ist). Sei

$$H_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid c(x) > 1 - \epsilon\}.$$

Wegen Lemma 1.2.6 ist  $\text{vol } H_\epsilon \leq \frac{I(c)}{1 - \epsilon}$ . Wegen der Wahl von  $c$  ist  $c(x) > 1 - \epsilon$  für  $x \in S \setminus B_\epsilon$  und damit  $S \subset H_\epsilon \cup B_\epsilon$ . Damit ist  $H_\epsilon \cup B_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$  offen und zusammen mit

$$\text{vol } H_\epsilon \cup B_\epsilon \leq \text{vol } H_\epsilon + \text{vol } B_\epsilon < \frac{I(c)}{1 - \epsilon} + \epsilon \leq \frac{\lambda^n(S) + \epsilon}{1 - \epsilon} + \epsilon$$

erhalten wir  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{vol } H_\epsilon \cup B_\epsilon \leq \lambda^n(S)$ . Damit folgt die Behauptung, da  $H_\epsilon \cup B_\epsilon$  ein Beispiel einer Menge  $G$  in dem Infimum ist.

(iv) Sind  $S, T \subset Q$  für einen Quader  $Q$ , dann bedeutet Lebesgue-messbar, dass  $\chi_S, \chi_T \in L^1(Q)$  ist. Dann ist auch  $\chi_{S \cap T} = \chi_S \chi_T \in L^1(Q)$  nach Satz 1.3.27 und damit  $S \cap T$  messbar.

Wenden wir dies nun auf  $S \cap [-a, a]^n$  und  $T \cap [-a, a]^n$  an, erhalten wir die Behauptung.

(v) Ist  $S$  Lebesgue-messbar, dann ist  $\chi_{S \cap [-a, a]^n} \in L^1([-a, a]^n)$  und somit ist dann  $\chi_{[-a, a]^n \setminus S} = 1 - \chi_{S \cap [-a, a]^n} \in L^1([-a, a]^n)$ . Also  $\mathbb{R}^n \setminus S$  Lebesgue-messbar.  $\square$

#### Satz 3.1.3.

(i) Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < a\}$  Lebesgue-messbar.

(ii) Für  $A_i \in \Lambda^n$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , gilt  $\cup_{i=0}^\infty A_i \in \Lambda^n$ .

(iii) Für die Abbildung

$$\lambda^n: \Lambda^n \rightarrow [0, \infty]$$

gilt  $\lambda^n(\emptyset) = 0$  und

$$\lambda^n(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \lambda^n(A_i)$$

für alle  $A_i \in \Lambda^n$ , die paarweise disjunkt sind.

### 3.1 Von $L^1(\mathbb{R}^n)$ zum Lebesgue-Maß

Zu (i):  $L^1$  besteht aus Äquivalenzklassen. D.h. hier muss die Behauptung wieder so gelesen werden: Für jede Realisierung  $f(x)$  von  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  ist die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < a\}$  Lebesgue-messbar. Da verschiedene Realisierung nur f.ü. übereinstimmen müssen, hängt diese Menge aber von der gewählten Realisierung ab, aber die Differenz ist immer eine Lebesgue-Nullmenge. Damit folgt mit (iii), dass das Lebesgue-Maß von  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < a\}$  nicht von der Wahl der Realisierung abhängt.

*Beweis.* (i) Wir müssen zeigen, dass  $S_c = \{x \in [-c, c]^n \mid f(x) < a\}$  für alle  $c > 0$  Lebesgue-messbar ist. Dazu sei  $c > 0$  fest, und wir betrachten  $f_c = f|_{[-c, c]^n} \in L^1([-c, c]^n)$ . Es reicht dann jeweils die Aussage für  $a = 0$  zu zeigen, da auch  $f_c - a \in L^1([-c, c]^n)$  ist.

Sei  $\varphi_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\varphi_k(s) := \begin{cases} 1 & s \leq -\frac{1}{k} \\ -ks & -\frac{1}{k} < s < 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist  $\varphi_k$  Lipschitz mit  $\varphi_k(0) = 0$  und wir können das Lipschitzkalkül, Satz 1.3.15, verwenden. Damit ist  $g_k := \varphi_k(f_c) \in L^1([-c, c]^n)$  mit  $g_k \leq g_{k+1} \leq 1$ . Damit folgt aus dem Satz zur monotonen Konvergenz, dass  $g(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x)$  f.ü. in  $L^1([-c, c]^n)$  ist. Nach Definition der  $\varphi_k$  ist  $g(x) = \chi_{S_c}$  f.ü. und damit folgt, dass  $S_c$  Lebesgue-messbar ist.

(ii) Es reicht (analog zu oben) die Aussage für den Fall zu zeigen, wo alle  $A_i$  Teilmenge eines Quaders  $Q$  sind.

Für endlich viele  $A_i \neq \emptyset$ , folgt die Aussage direkt, da  $\cup_{i=0}^k A_i = \mathbb{R}^n \setminus (\cap_{i=0}^k (\mathbb{R}^n \setminus A_i))$  nach letztem Lemma Lebesgue-messbar ist. Damit ist  $B_i = A_i \setminus (\cup_{j=0}^{i-1} A_j)$  auch Lebesgue-messbar und die  $B_i$  sind paarweise disjunkt mit  $\cup_{i=1}^k \chi_{A_i} = \cup_{i=1}^k \chi_{B_i}$ . Damit ist  $\chi_{\cup_{i=1}^k A_i} = \sum_{i=0}^k \chi_{B_i}$ . Betrachten wir nun  $\chi^k := \chi_{\cup_{i=0}^k A_i}$ . Dann ist nach den letzten Überlegungen  $\chi^k \in L^1(Q)$  für alle  $k$ . Außerdem ist  $\chi^k \leq \chi^{k+1} \leq 1 \in L^1(Q)$  und  $\chi^k \rightarrow \chi_{\cup_{i=0}^{\infty} A_i}$  punktweise für  $k \rightarrow \infty$ . Somit folgt nach dem Satz zur monotonen Konvergenz, dass  $\chi_{\cup_{i=0}^{\infty} A_i} \in L^1(Q)$  ist mit  $\|\chi_{\cup_{i=0}^{\infty} A_i}\|_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\chi^k\|_1$ .

(iii)  $\lambda^n(\emptyset) = 0$  folgt direkt, da  $\chi_{\emptyset} = 0$  ist. Für die bleibende Aussage benutzen wir den Beweis von (ii). Sind die  $A_i$  alle paarweise disjunkt, ist  $\|\chi^k\|_1 = \sum_{i=0}^k \lambda^n(A_i)$  und damit folgt die Behauptung.  $\square$

**Folgerung 3.1.4.** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und  $a < b$ . Dann sind  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq b\}$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq f(x) < b\}$  und  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq f(x) \leq b\}$  Lebesgue-messbar.

*Beweis.* Ist  $f$  in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , dann auch  $-f$ . Damit ist nach (i) des letzten Satzes die Menge  $\{-f(x) < -b\} = \{f(x) > b\}$  und nach Lemma 3.1.2.v ihr Komplement  $\{f(x) \leq b\}$  auch Lebesgue-messbar. Wegen  $\{a \leq f(x) < b\} = \{f(x) < b\} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \{-f(x) \leq -a\})$  ist diese Menge nach Lemma 3.1.2 auch Lebesgue-messbar (ähnlich folgt dies für die dritte Menge).  $\square$

## 3.2 Grundbegriffe der Maßtheorie

Viele der Eigenschaften, die wir für das Lebesgue-Maß schon gesehen haben, wurden in allgemeinerem Kontext zu Funktionen zusammengefasst:

**Definition 3.2.1.** Sei  $\Omega$  eine Menge. Eine Teilmenge  $\mathcal{A}$  der Potenzmenge  $\mathcal{P}(\Omega)$  heißt  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ , falls

- (i)  $\Omega \in \mathcal{A}$
- (ii) Aus  $A \in \mathcal{A}$  folgt  $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ .
- (iii) Für  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , folgt  $\cup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ .

Ist  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ , nennt man  $(\Omega, \mathcal{A})$  einen *messbarer Raum* und jedes  $A \subset \Omega$  heißt  $\mathcal{A}$ -messbar.

Aus der Definition folgt direkt mit den Rechenregeln\* für  $\cup$  und  $\cap$  für eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$ :  $\emptyset \in \mathcal{A}$ . Sind  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , dann sind  $A_i \setminus A_j$ ,  $\cup_{i=0}^n A_i$ ,  $\cap_{i=0}^n A_i$ ,  $\cap_{i=0}^{\infty} A_i$  auch in  $\mathcal{A}$ .

**Beispiel 3.2.2.**

- (i) Die Menge  $\Lambda^n$  der Lebesgue-messbaren Teilmengen von  $\Omega = \mathbb{R}^n$  ist eine  $\sigma$ -Algebra nach Lemma 3.1.2.v und Satz 3.1.3.ii.
- (ii) Ist  $\Omega$  eine Menge, dann ist  $\mathcal{P}(\Omega)$  selbst eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$  (offensichtlich die größte). Die kleinste  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$  ist  $\{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ .

Wir wissen noch nicht, ob  $\Lambda^n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  eine echte Teilmenge oder nicht doch die ganze Potenzmenge ist. Dazu kommen wir später.

- (iii) (Durchschnitt von  $\sigma$ -Algebren) Seien  $\mathcal{A}_i$   $\sigma$ -Algebren über eine Menge  $\Omega$  für  $i \in I$ , wobei die Indexmenge  $I$  auch überabzählbar sein kann. Dann ist

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid A \in \mathcal{A}_i \forall i \in I\}$$

selbst wieder eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$  (folgt direkt aus der Definition).

- (iv) Sei  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ . Dann ist

$$\sigma(\mathcal{B}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra über } \Omega \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \}$$

eine  $\sigma$ -Algebra, die *von  $\mathcal{B}$ -erzeugte  $\sigma$ -Algebra*:

Da  $\mathcal{P}(\Omega)$  selbst  $\sigma$ -Algebra ist, gibt es mindestens ein Element auf der rechten Seite und damit ist  $\sigma(\mathcal{B})$  nicht-leer. Damit ist nach dem letzten Beispiel dies wirklich eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ .

Es gilt außerdem nach Konstruktion:

---

\*Z.B. ist  $A_i \setminus A_j = \mathbb{R}^n \setminus ((\mathbb{R}^n \setminus A_i) \cup A_j)$

- $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{B})$ .
- $\sigma(\mathcal{B})$  ist die kleinste  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ , die  $\mathcal{B}$  enthält.

(v) (Borel- $\sigma$ -Algebra) Sei  $\mathcal{O}$  die Menge aller offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ . Dann nennt man  $\sigma(\mathcal{O})$  die Borel- $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^n$ . Es gilt  $\sigma(\mathcal{O}) \subset \Lambda^n$ , da  $\mathcal{O} \subset \Lambda^n$  nach Lemma 3.1.2.ii ist.

Allgemeiner: Sei  $(\Omega, \mathcal{T})$  eine *Topologie*, d.h.  $\emptyset, \Omega \in \mathcal{T}$  und endliche Durchschnitte sowie beliebige Vereinigungen von Elementen in  $\mathcal{T}$  sind wieder in  $\mathcal{T}$ . Da die offenen Mengen im  $\mathbb{R}^n$  diese Eigenschaften erfüllen, nennt man die Elemente in  $\mathcal{T}$ , dann auch die offenen Mengen in dieser Topologie und  $\sigma(\mathcal{T})$  die zugehörige Borel- $\sigma$ -Algebra.

(vi) Sei  $f: \Omega \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $Y$ . Dann ist

$$f^{-1}(\mathcal{A}) := \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{A}\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ :

- Wegen  $\Omega = f^{-1}(Y)$  und  $Y \in \mathcal{A}$  ist  $\Omega \in f^{-1}(\mathcal{A})$ .
- Sei  $C \in f^{-1}(\mathcal{A})$ . Dann ist  $C = f^{-1}(B)$  für ein  $B \in \mathcal{A}$  und damit  $\Omega \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B) \in f^{-1}(\mathcal{A})$ .
- Seien  $C_i = f^{-1}(B_i)$  für  $B_i \in \mathcal{A}$ . Dann ist  $\cup_i C_i = \cup_i f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\cup_i B_i) \in f^{-1}(\mathcal{A})$ .

Für den Spezialfall  $\Omega \subset Y$  und  $f$  die Inklusionsabbildung, nennt man  $f^{-1}(\mathcal{A})$  die *von  $\mathcal{A}$  auf  $\Omega$  induzierte  $\sigma$ -Algebra*.

**Definition 3.2.3.** Sei  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  eine  $\sigma$ -Algebra. Dann heißt  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  *Maß auf  $\mathcal{A}$* , falls

Vorl. 24

- $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- ( $\sigma$ -Additivität) für  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , paarweise disjunkt gilt

$$\mu(\cup_{i=0}^{\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i).$$

Hierbei wird für den Fall, dass  $\mu(A_i) = \infty$  für ein  $i$  ist, die rechte Summe direkt als  $\infty$  verstanden.

Das Tripel  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  nennt man *Maßraum*.

Eine Menge  $A \subset \mathcal{A}$  mit  $\mu(A)$  heißt  $\mu$ -Nullmenge. Das Maß heißt

- *endlich*, wenn  $\mu(\Omega) < \infty$  ist. Im Fall  $\mu(\Omega) = 1$  heißt  $\mu$  *Wahrscheinlichkeitsmaß*.
- $\sigma$ -*endlich*, falls es eine Folge  $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{A}$  mit  $\mu(\Omega_i) < \infty$  für alle  $i$  und  $\cup_i \Omega_i = \Omega$  gibt.

### 3 Maßtheorie

- *vollständig*, falls jede Teilmenge einer  $\mu$ -Nullmenge selbst wieder in  $\mathcal{A}$  ist.

Maße auf  $\mathcal{P}(\Omega)$  sind automatisch vollständig.

**Lemma 3.2.4.** *Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum.*

(i) *Sei  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{A}$ . Dann gilt*

$$\mu(\cup_{i=0}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i).$$

(ii) *Ist  $\mu$  vollständig, dann ist jede Teilmenge insbesondere selbst wieder eine  $\mu$ -Nullmenge.*

*Beweis.* (i) Wir definieren  $B_i = A_i \setminus (\cup_{j=0}^{i-1} A_j)$ . Dann ist  $B_i \in \mathcal{A}$  und die  $B_i$  sind paarweise disjunkt mit  $A_i \subset B_i$ . Aus der  $\sigma$ -Additivität des Maßes folgt  $\mu(A_i) = \mu(B_i) + \mu(B_i \setminus A_i) \geq \mu(B_i)$  und damit

$$\mu(\cup_{i=0}^{\infty} A_i) = \mu(\cup_{i=0}^{\infty} B_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i).$$

(ii) Seien  $A \subset B$  beides in  $\mathcal{A}$  und  $\mu(B) = 0$ . Dann ist  $B \setminus A \in \mathcal{A}$  und aus der  $\sigma$ -Additivität folgt  $0 = \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$  und damit  $\mu(A) = \mu(B \setminus A) = 0$ .  $\square$

**Beispiel 3.2.5.**

- (i) (Lebesgue-Maß) Das Lebesgue-Maß ist im Sinne der letzten Definition ein Maß nach Satz 3.1.3.ii und Lemma 3.1.2.i. Es ist  $\sigma$ -endlich (wähle  $\Omega_i = [-i, i]^n$ ) und vollständig, da jede Teilmenge einer vernachlässigbaren Menge selbst wieder vernachlässigbar ist. Das Lebesgue-Maß ist nicht endlich.
- (ii) (Zähl-Maß) Sei  $\Omega$  eine Menge. Dann ist  $\mu(A) := |A|$  (= Anzahl der Elemente in  $\Omega$ ) ein Maß auf  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Das Maß ist vollständig, da  $\mu$  nur für  $A = \emptyset$  den Wert Null annimmt. Falls  $\Omega$  eine endliche Menge ist, ist  $\mu$  endlich. Ansonsten ist  $\mu$   $\sigma$ -endlich genau dann, wenn  $\Omega$  abzählbar ist: Das sieht man, da die  $\Omega_i$  endliche Menge sein müssen und damit  $\Omega$  abzählbar ist [2, Satz 3.10.3]. Andersherum erhält man die  $\Omega_i$  durch Wahl einer Abzählung.

Nimmt man den Würfelwurf als Beispiel, dann ist  $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel eine Zahl in einer Teilmenge  $A \subset \Omega$  anzeigt ist  $\frac{|A|}{6}$ . Wie haben also als Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu: \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  ein normalisiertes Zählmaß.

(iii) (Dirac-Maß) Sei  $\Omega$  eine Menge und  $x \in \Omega$ . Dann ist

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

- (iv) Die Summe von Maßen auf einer gemeinsamen  $\sigma$ -Algebra ist wieder ein Maß auf dieser  $\sigma$ -Algebra.
- (v) (Bedingte Wahrscheinlichkeit) Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein *Wahrscheinlichkeitsraum* (=Maßraum, wobei  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist) und  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(A) \neq 0$ . Dann definiert

$$\mu_A(B) := \mu(B|A) := \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}$$

wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{A}$ .

Die Interpretation ist wie folgt:  $\mu(B)$  selbst gibt an, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Ereignis, also der Wert einer gegebenen Zufallsvariablen, in der Menge  $B$  liegt.  $\mu_A$  ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis in  $B$  liegt, wenn man schon weiß, dass es auf alle Fälle in  $A$  liegt.

Schauen wir als Beispiel wieder auf den Würfel. Die Wahrscheinlichkeit, dass wir ein Element der Menge  $B = \{4, 5\}$  gewürfelt haben unter der Bedingung, dass wir schon wissen, dass das Ergebnis kleiner gleich 4 ist (also in  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  liegt, ist  $\frac{1}{4} = \frac{\mu(A \cap B) = \mu(\{4\}) = 1}{\mu(A) = 4}$ .

- (vi) Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $Y \subset \Omega$  mit  $Y \in \mathcal{A}$ . Sei  $\mathcal{A}|_Y$  die von  $\mathcal{A}$  auf  $Y$  induzierte  $\sigma$ -Algebra. Für alle  $A \in \mathcal{A}|_Y$  gibt es ein  $B \in \mathcal{A}$  mit  $A = B \cap Y$ . Damit ist  $\mathcal{A}|_Y \subset \mathcal{A}$ . Dann ist

$$\mu|_Y(A) = \mu(A).$$

ein Maß auf  $\mathcal{A}|_Y$ . Ist  $\mu$  endlich/ $\sigma$ -endlich/vollständig, dann auch  $\mu|_Y$ .

**Satz 3.2.6** (Vervollständigung von Maßen). *Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Dann gibt es eine kleinste  $\sigma$ -Algebra  $\bar{\mathcal{A}}$  und ein vollständiges Maß  $\bar{\mu}$  auf  $\bar{\mathcal{A}}$ , so dass  $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$  ist und  $\bar{\mu}$  auf  $\mathcal{A}$  mit  $\mu$  übereinstimmt.*

Wir nennen  $\bar{\mu}$  die Vervollständigung von  $\mu$ .

*Beweis.* Wir setzen  $\bar{\mathcal{A}} = \{N \cup A \mid A \in \mathcal{A}, N \text{ ist Teilmenge einer } \mu\text{-Nullmenge}\}$  und  $\bar{\mu}(N \cup A) = \mu(A)$  für alle  $A \in \mathcal{A}$  und  $N$  Teilmenge einer  $\mu$ -Nullmenge. Dann gilt:

- $\bar{\mathcal{A}}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra: Abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen  $\cup_i (N_i \cup A_i) = \cup_i A_i \cup \cup_i N_i$  folgt, da  $\cup_i N_i$  wieder eine Teilmenge einer  $\mu$ -Nullmenge ist nach der  $\sigma$ -Additivität von Maßen.  $\Omega \in \bar{\mathcal{A}}$  folgt, da  $\Omega \in \mathcal{A}$ . Es bleibt die Komplementeigenschaft: Sei  $N$  Teilmenge einer  $\mu$ -Nullmenge  $B$  und  $A \in \mathcal{A}$ . Dann ist  $\Omega \setminus (N \cup A) = (\Omega \setminus (A \cup B)) \cup B \setminus N$ . Wegen  $\Omega \setminus (A \cup B) \in \mathcal{A}$  und  $B \setminus N \subset B$  folgt,  $\Omega \setminus (N \cup A) \in \bar{\mathcal{A}}$ .
- $\bar{\mu}$  ist ein wohldefiniertes vollständiges Maß. Vollständig und Maß sieht man direkt. Für Wohldefiniertheit sei  $A \cup N = B \cup M$  für  $A, B \in \mathcal{A}$  und  $N, M$  Teilmengen von  $\mu$ -Nullmengen  $C$  bzw.  $D$ . Dann ist  $B \subset B \cup M = A \cup N \subset A \cup C \cup D$ . Also ist  $\mu(B) \leq \mu(A \cup C \cup D) = \mu(A)$ . Die andere Inklusion folgt analog.

### 3 Maßtheorie

Nach Konstruktion ist  $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$  und  $\bar{\mu}$  stimmt auf  $\mathcal{A}$  mit  $\mu$  überein. Unser  $\bar{\mathcal{A}}$  ist auch das kleinstmögliche, da für die Vollständigkeit des Maßes die  $\sigma$ -Algebra alle Teilmengen von  $\mu$ -Nullmengen und damit auch deren Vereinigung mit Elementen von  $\mathcal{A}$  enthalten muss.  $\square$

**Satz 3.2.7** ('Stetigkeit' für Maße). Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge  $\mathcal{A}$ . Dann folgt

(i) aus  $A_0 \subset \dots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \dots$ , dass  $\mu(\cup_i A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$  ist.

(ii) aus  $A_0 \supset \dots \supset A_i \supset A_{i+1} \supset \dots$  mit  $\mu(A_0) < \infty$ , dass  $\mu(\cap_i A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$  ist.

*Beweis.* (i) Sei  $B_i := A_i \setminus A_{i-1}$  für  $i \geq 1$  und  $B_0 = A_0$ . Dann sind die  $B_i$  paarweise disjunkt mit  $\cup_{j=0}^i B_j = A_i$ . Damit gilt

$$\mu(\cup_{i=0}^{\infty} A_i) = \mu(\cup_{i=0}^{\infty} B_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\cup_{i=0}^k B_i = A_k).$$

(ii) Wir können (i) auf  $B_i = A_0 \setminus A_i$  anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} \mu(\cap_{i=0}^{\infty} A_i) &= \mu(A_0) - \mu(A_0 \setminus \cap_{i=0}^{\infty} A_i) = \mu(A_0) - \mu(\cup_{i=0}^{\infty} B_i) \\ &= \mu(A_0) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k) = \mu(A_0) - \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu(A_0) - \mu(A_k)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k). \end{aligned} \quad \square$$

Im letzten Beweis haben wir wirklich benutzt, dass  $\mu(A_0) < \infty$ , weil sonst  $\mu(A_0) - \mu(A_0) = \infty - \infty$  nicht definiert wäre. Die Aussage (ii) gilt für  $\mu(A_0) = \infty$  i.A. auch nicht: Sei  $\Omega = \mathbb{N}$  mit dem Zählmaß,  $A_k = \{k, k+1, \dots\}$ . Dann ist  $\cap_i A_i = \emptyset$  und  $\mu(A_i) = \infty$  für alle  $i$ .

## 3.3 Konstruktion von Maßen

Wir wollen in diesem Abschnitt eine Möglichkeit kennenlernen sich Maße zu konstruieren. Der grobe Ablauf ist folgender:

1. Konstruktion eines *äußeren Maßes*  $\mu$  auf  $\Omega$  (i.A. weniger als ein Maß nach Definition 3.3.1) ausgehend von einer gegebenen Funktion auf einer Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ .
2. Definition der  $\mu$ -messbaren Mengen (wird eine  $\sigma$ -Algebra sein)
3.  $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$  gibt dann ein vollständiges Maß.

Beginnen wir mit der Definition eines äußeren Maßes.

**Definition 3.3.1.** Eine Abbildung  $\mu: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  mit

### 3.3 Konstruktion von Maßen

- $\mu(\emptyset) = 0$  und
- $\mu(A) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$  für alle  $A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \subset \Omega$

heißt *äußeres Maß auf  $\Omega$* .

Insbesondere gibt die zweite Eigenschaft die Monotonie von  $\mu$ , also  $\mu(A) \leq \mu(B)$  für  $A \subset B$ .

Jedes Maß aus  $\mathcal{P}(\Omega)$  ist insbesondere ein äußeres Maß.

**Satz 3.3.2** (Konstruktion eines äußeren Maßes). *Sei  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  mit  $\emptyset \in \mathcal{B}$ . Sei  $\lambda: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  eine Abbildung mit  $\lambda(\emptyset) = 0$ . Dann ist  $\mu: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  definiert durch*

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(B_i) \mid B_i \in \mathcal{B}, A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i \right\}^*.$$

ein *äußeres Maß auf  $\Omega$* .

*Beweis.*  $\mu(\emptyset) = 0$ , man wählt alle  $A_i = \emptyset$ .

Sei nun  $A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ . Für  $\mu(A) = \infty$  wäre  $A$  nicht wie in der Definition von  $\mu$  gefordert überdeckbar und damit auch nicht  $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ . Sei also nun  $\mu(A) < \infty$ .

Sei  $\epsilon > 0$ . Dann gibt es für alle  $i$  eine Folge  $B_{i,k} \in \mathcal{B}$  mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda(B_{i,k}) < \mu(A_i) + 2^{-i}\epsilon.$$

Dann ist  $A \subset \bigcup_{i,k} B_{i,k}$  und damit

$$\mu(A) \leq \sum_{i,k=0}^{\infty} \lambda(B_{i,k}) \leq \sum_{i=0}^{\infty} (\mu(A_i) + 2^{-i}\epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) + 2\epsilon.$$

Im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  folgt  $\mu(A) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$ . □

**Definition 3.3.3.** Sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $\Omega$ . Dann ist

$$\mathcal{M}(\mu) := \{A \subset \Omega \mid \forall S \subset \Omega: \mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)\}$$

die Menge der  $\mu$ -messbaren Mengen.

Es ist direkt  $\mathcal{M}(\mu) = \{A \subset \Omega \mid \forall S \subset \Omega: \mu(S) \geq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)\}$ , da  $\mu$  ein äußeres Maß ist und damit  $\mu(S) \leq \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)$  automatisch gilt.

**Satz 3.3.4.** *Sei  $\mu$  ein äußeres Maß auf  $\Omega$ . Dann ist  $\mathcal{M}(\mu)$  ist eine  $\sigma$ -Algebra und  $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$  ist ein vollständiges Maß.*

\*Hierbei ist  $\inf \emptyset = \infty$ . Das ist mit der normalen Definition von  $\inf$  kompatibel:  $\infty$  ist das größte Element in  $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  mit der offensichtlichen Ordnung, so dass jedes Element der Menge  $\emptyset$  (gibt halt keine) nicht kleiner ist.

### 3 Maßtheorie

**Vorl. 25** *Beweis.*  $\Omega \in \mathcal{M}(\mu)$ , da  $\mu(S) = \mu(S \cap \Omega = S) + \mu(S \setminus \Omega = \emptyset)$  für alle  $S \subset \Omega$  gilt. Für  $A \in \mathcal{M}(\mu)$  gilt

$$\mu(S \cap (\Omega \setminus A)) + \mu(S \setminus (\Omega \setminus A)) = \mu(S \setminus A) + \mu(S \cap A) = \mu(S)$$

und damit  $\Omega \setminus A \in \mathcal{M}(\mu)$ .

Nun wollen wir sehen, dass  $\mu$   $\sigma$ -additiv ist: Seien  $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\mu(S := A_1 \cup A_2) = \mu(S \cap A_2 = A_2) + \mu(S \setminus A_2 = A_1).$$

Per Induktion erhält man so die analoge Aussage für endlich viele dieser  $A_i$ . Für die gesamte Folge gilt nun

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \mu(A_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{i=0}^k A_i\right) \stackrel{\text{Monotonie}}{\leq} \mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right).$$

Die umgekehrte Ungleichung gilt, da  $\mu$  ein äußeres Maß ist.

Es bleibt die letzte Eigenschaft einer  $\sigma$ -Algebra zu zeigen: Sei dazu  $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

Zunächst zeigen wir  $\bigcap_{i=0}^k A_i, \bigcup_{i=0}^k A_i \in \mathcal{M}(\mu)$ : Es reicht  $k = 1$  zu betrachten, der Rest folgt dann induktiv. Aus

$$\begin{aligned} & \mu(S \setminus (A_0 \cap A_1)) + \mu(S \cap A_0 \cap A_1) \\ & \stackrel{A_0 \in \mathcal{M}(\mu)}{=} \mu(S \setminus (A_0 \cap A_1)) \cap A_0 + \mu((S \setminus (A_0 \cap A_1)) \setminus A_0) + \mu(S \cap A_0 \cap A_1) \\ & = \mu((S \cap A_0) \setminus A_1) + \mu(S \setminus A_0) + \mu(S \cap A_0 \cap A_1) \\ & \stackrel{A_1 \in \mathcal{M}(\mu)}{=} \mu(S \cap A_0) + \mu(S \setminus A_0) \\ & \stackrel{A_0 \in \mathcal{M}(\mu)}{=} \mu(S) \end{aligned}$$

folgt  $A_0 \cap A_1 \in \mathcal{M}(\mu)$ . Wegen  $A_0 \cup A_1 = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B))$  ist damit auch  $A_0 \cup A_1 \in \mathcal{M}(\mu)$ .

O.B.d.A. können wir annehmen, dass diese Mengen paarweise disjunkt sind (sonst können wir zu  $A_i \setminus (\bigcup_{j=0}^{i-1} A_j)$  übergehen, ohne dass sich  $\bigcup_i A_i$  ändert.)

Dann gilt  $\mu(S \cap \bigcup_{i=0}^k A_i) = \sum_{i=0}^k \mu(S \cap A_i)$ : Für  $k = 0$  ist es klar. Der Rest folgt induktiv mit

$$\begin{aligned} & \mu\left(S \cap \bigcup_{i=0}^k A_i\right) \stackrel{A_k \in \mathcal{M}(\mu)}{=} \mu\left((S \cap \bigcup_{i=0}^k A_i) \cap A_k\right) + \mu\left((S \cap \bigcup_{i=0}^k A_i) \setminus A_k\right) \\ & = \mu(S \cap A_k) + \mu\left(S \cap \bigcup_{i=0}^{k-1} A_i\right) \stackrel{\text{Ind.vor}}{=} \sum_{i=0}^k \mu(S \cap A_i). \end{aligned}$$

Damit ist mit  $\cup_{i=0}^k A_i \in \mathcal{M}(\mu)$

$$\mu(S) = \mu(S \cap \bigcup_{i=0}^k A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i=0}^k A_i) = \sum_{i=0}^k \mu(S \cap A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i=0}^k A_i).$$

Mit  $k \rightarrow \infty$ , der Monotonie und  $\sigma$ -Subadditivität erhalten wir

$$\mu(S) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(S \cap A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) \geq \mu(S \cap (\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i)) + \mu(S \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i)$$

und somit  $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}(\mu)$ .

Damit müssen wir nun nur noch die Vollständigkeit des Maßes zeigen: Das folgt direkt mit nächstem Lemma.  $\square$

**Lemma 3.3.5.** Sei  $A \subset \Omega$  mit äußerem Maß Null. Dann ist  $A \in \mathcal{M}(\mu)$ .

*Beweis.* Sei  $S \subset \Omega$ . Wegen Monotonie von  $\mu$  ist  $\mu(S \cap A) \leq \mu(A) = 0$ , also  $\mu(S \cap A) = 0$  und damit  $\mu(S) \geq \mu(S \setminus A) = \mu(S \setminus A) + \mu(S \cap A)$ .  $\square$

**Beispiel 3.3.6.** Sei  $\Omega = \{1, 2, 3\}$  und  $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}\}$  mit  $\lambda(\{1\}) = 1$  und  $\lambda(\{2, 3\}) = 2$ . Dann ist das zugehörige äußere Maß gleich

$$\mu(A \subset \Omega) = \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ 1 & A = \{1\} \\ 2 & A \in \{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\} \\ 3 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das selbst ist kein Maß, da  $\mu(\{2\}) + \mu(\{3\}) \neq \mu(\{2, 3\})$  ist. Die Menge der  $\mu$ -messbaren Mengen ist  $\mathcal{M}(\mu) = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ .

**Satz 3.3.7** (Carathéodory-Fortsetzung). Sei  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  mit  $\emptyset \in \mathcal{B}$  stabil unter  $\cup$  und  $\setminus$  (Man sagt auch  $\mathcal{B}$  ist ein Ring\* über  $\Omega$ ). Sei  $\lambda: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  eine  $\sigma$ -additive Abbildung mit  $\lambda(\emptyset) = 0$  (Man nennt  $\lambda$  dann auch Prämaß auf  $\Omega$ ). Dann gilt für  $\mathcal{M}(\mu)$  und  $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$  der obigen Konstruktion:

- (i)  $\mu|_{\mathcal{B}} = \lambda$
- (ii)  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}(\mu)$ .
- (iii) ( $\mu$  ist reguläres äußeres Maß) Zu jedem  $A \subset \Omega$  gibt es ein  $B \in \sigma(\mathcal{B})$  mit  $A \subset B$  und  $\mu(A) = \mu(B)$ .
- (iv) Ist  $\lambda$  zusätzlich  $\sigma$ -endlich, dann ist  $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$  die Vervollständigung von  $\mu|_{\sigma(\mathcal{B})}$ . Insbesondere ist die Fortsetzung von  $\lambda$  zu einem vollständigen Maß auf  $\mathcal{M}(\mu)$  eindeutig.

---

\*Versieht man  $\mathcal{P}(\Omega)$  mit den Operation  $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  (symmetrische Differenz) als Addition und mit der Operation  $\cap$  als Multiplikation, dann ist  $\mathcal{P}(\Omega)$  ein kommutativer Ring mit Null  $\emptyset$  und Eins  $\Omega$ . Ein Ring  $\mathcal{B}$  in dem Sinne hier ist dann ein Unterring (im Sinne der Algebra) von  $(\mathcal{P}(\Omega), \Delta, \cap)$ .

### 3 Maßtheorie

*Beweis.* (i) Sei  $A \subset \mathcal{B}$ . Die Ungleichung  $\mu(A) \leq \lambda(A)$  folgt direkt aus der Definition von  $\mu$ . Für die umgekehrte Ungleichung seien  $A, A_i \in \mathcal{B}$  mit  $A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ . Wenn wir zeigen können, dass dann  $\lambda(A) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(A_i)$  gilt, folgt diese Ungleichung. Dazu definieren wir  $B_i := (A_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} A_j) \cap A$ . Diese Mengen sind nun paarweise disjunkt und wieder in  $\mathcal{B}$  (da  $\mathcal{B}$  ein Ring über  $\Omega$  ist und damit mit  $A, B \in \mathcal{B}$  auch  $A \cap B = (A \cup B) \Delta (A \Delta B) \in \mathcal{B}$  ist.). Dann folgt, da  $\lambda$   $\sigma$ -additiv ist:

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(B_i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(A_i).$$

(ii) Wir müssen zeigen, dass jedes  $A \in \mathcal{B}$   $\mu$ -messbar ist:

Sei dazu  $S \subset \Omega$ . Für  $\mu(S) = \infty$  muss wegen der  $\sigma$ -Subadditivität des äußeren Maßes  $\mu$  auch min. einer der Werte  $\mu(S \setminus A)$  und  $\mu(S \cap A)$  unendlich sein und damit würde für solche  $S$  die gewünschte Gleichheit gelten.

Sei also nun  $\mu(S) < \infty$ . Nach Definition des äußeren Maßes  $\mu$  gibt es  $A_{i,k} \in \mathcal{B}$  derart, dass  $S \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_{i,k}$  und  $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda(A_{i,k}) \leq \mu(S) + k^{-1}$  gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned} \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) &\stackrel{\text{Def } \mu}{\leq} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(A_{i,k} \cap A) + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(A_{i,k} \setminus A) \\ &\stackrel{\lambda \text{ Prämaß}}{\leq} \sum_{i=0}^k \lambda(A_{i,k}) \leq \mu(S) + k^{-1}. \end{aligned}$$

Mit  $k \rightarrow \infty$  folgt dann  $A \in \mathcal{M}(\mu)$ .

(iii) Für  $\mu(A) = \infty$  kann man einfach  $B = \Omega$  wählen. Sei nun  $\mu(A) < \infty$ . Dann gibt es nach Definition von  $\mu$  Mengen  $A_{ik} \in \mathcal{B}$  mit

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_{ik}) \stackrel{(i)}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(A_{ik}) \leq \mu(A) + k^{-1}.$$

Wir setzen  $B := \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{\infty} A_{ik} \in \sigma(\mathcal{B})$  und  $A \subset B$ . Dann folgt mit der  $\sigma$ -Subadditivität von  $\mu$ :

$$\mu(A) \leq \mu(B) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_{ik}) \leq \mu(A) + k^{-1}$$

und damit  $\mu(A) = \mu(B)$ .

(iv) Sei  $\bar{\mu}: \overline{\sigma(\mathcal{B})} \rightarrow [0, \infty]$  die Vervollständigung von  $\mu|_{\sigma(\mathcal{B})}$  wie in Satz 3.2.6. Wir müssen zeigen, dass  $\mathcal{M}(\mu) = \overline{\sigma(\mathcal{B})}$  ist. Die Inklusion  $\supset$  ist klar, da  $\mathcal{M}(\mu)$  nach (ii)  $\mathcal{B}$  und somit  $\sigma(\mathcal{B})$  enthält. Es bleibt also die andere Inklusion.

Sei  $A \in \mathcal{M}(\mu)$ . Dann gibt es nach (iii)  $B \in \sigma(\mathcal{B})$  mit  $A \subset B$  und  $\mu(A) = \mu(B)$ , sowie angewandt auf  $B \setminus A$  ein  $C \in \sigma(\mathcal{B})$  mit  $B \setminus A \subset C$  und  $\mu(B \setminus A) = \mu(C)$ .

Verwenden wir nun, dass  $A \in \mathcal{M}(\mu)$  ist, haben wir (mit  $S = B$  in der Definition von  $\mathcal{M}(\mu)$ ):

$$\mu(C) = \mu(B \setminus A = S \setminus B) = \mu(S = B) - \mu(S \cap A = A) = 0.$$

Also ist  $A = (B \setminus C) \cup (A \cap C)$  mit  $B \setminus C \in \sigma(\mathcal{B})$  und  $A \cap C$  Teilmenge der  $\mu$ -Nullmenge  $C$ . Also ist  $A \in \sigma(\mathcal{B})$ .  $\square$

**Beispiel 3.3.8.** Seien  $\mathcal{B}$  die Menge aller achsenparallelen linksoffenen Quader in  $\mathbb{R}^n$  (d.h.  $(a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n] \in \mathbb{R}^n$ )<sup>\*</sup> zuzüglich  $\emptyset$  und  $\lambda: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ ,  $Q \mapsto \text{vol } Q$ . Sei  $\tilde{\lambda}^n$  das äußere Maß nach obiger Konstruktion. Wir werden später sehen, dass  $\mathcal{M}(\tilde{\lambda}^n)$  die Lebesgue- $\sigma$ -Algebra und  $\widehat{\lambda}^n|_{\mathcal{M}(\mu)}$  das Lebesgue-Maß ist, bis dahin bezeichnen wir  $\widetilde{\Lambda}^n := \mathcal{M}(\tilde{\lambda}^n)$  und  $\tilde{\lambda}^n := \mu|_{\mathcal{M}(\tilde{\lambda}^n)}$ . Nach Satz 3.3.4 ist  $\widehat{\lambda}^n$  zumindest ein vollständiges Maß.

Vorl. 26

Man kann direkt nachprüfen, dass  $\tilde{\lambda}^n|_{\mathcal{B}} = \lambda$  und  $\mathcal{B} \subset \widetilde{\Lambda}^n$  gilt.

Eigentlich würden wir gerne insgesamt den letzten Satz anwenden, doch ist  $\mathcal{B}$  erst mal kein Ring. Doch wir können hier  $\mathcal{B}$  durch rekursive Zunahme aller Vereinigungen bzw. Differenz zweier Elemente zu einem Ring  $\tilde{\mathcal{B}}$  machen. Jedes Element in  $\tilde{\mathcal{B}}$  ist dann die endliche Vereinigung von paarweise disjunkten (deshalb auch das 'linksoffen') Elementen in  $\mathcal{B}$ . Wir definieren dann  $\tilde{\lambda}: \tilde{\mathcal{B}} \rightarrow [0, \infty]$  für ein  $A \in \tilde{\mathcal{B}}$  als die Summe der Volumina der Quader in der erwähnten Zerlegung. Man kann direkt sehen, dass  $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^n|_{\tilde{\mathcal{B}}}$  ist. Damit ist das aus  $\tilde{\lambda}$  konstruierte Maß gleich dem von  $\lambda$  – also gleich  $\widehat{\lambda}^n$ . Der letzte Satz gibt somit auch, dass  $\widehat{\lambda}^n$  die Vervollständigung von  $\tilde{\lambda}|_{\sigma(\tilde{\mathcal{B}})}$ .

**Lemma 3.3.9.** Sei  $\mathcal{Q}^n$  die Menge der achsenparallelen linksoffenen Quader im  $\mathbb{R}^n$  (wie im letzten Beispiel) Dann gilt  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{Q}^n)$ .

*Beweis.* Es ist  $(a, b] = \bigcap_{i=0}^{\infty} (a, b + i^{-1}]$ . Analog kann man jedes  $Q \in \mathcal{Q}^n$  als abzählbaren Schnitt offener Quader darstellen. Damit ist  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \supset \sigma(\mathcal{Q}^n)$ .

Andererseits lässt sich jede offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  als abzählbare Vereinigung linksoffener Quader darstellen:

$$U = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup \{Q_{k,m} := 2^{-k}(m + [0, 1]^n \mid m \in \mathbb{Z}, Q_{k,m} \subset U\}.$$

$\square$

**Folgerung 3.3.10.**

- (i) Alle Borelmengen (=Elemente in  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ) sind  $\widehat{\lambda}^n$ -messbar.
- (ii) Für jedes  $A \subset \mathbb{R}^n$  gibt es eine Borelmenge  $B$  mit  $A \subset B$  und  $\tilde{\lambda}^n(A) = \widehat{\lambda}^n(B)$ .
- (iii) Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann  $\widehat{\lambda}^n$ -messbar, wenn es eine Borelmenge  $B \subset A$  mit  $\tilde{\lambda}^n(A \setminus B) = 0$  gibt. Dabei kann  $B$  als abzählbare Vereinigung offener Mengen gewählt werden.

---

\*Hier ist es egal, ob linksoffener oder abgeschlossener Quader, macht nur unten die Konstruktion des Ringes leichter.

### 3 Maßtheorie

(iv) Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann  $\widehat{\lambda}^n$ -messbar, wenn es eine Borelmenge  $B \supset A$  mit  $\widetilde{\lambda}^n(B \setminus A) = 0$  gibt. Dabei kann  $B$  als abzählbarer Durchschnitt abgeschlossener Mengen gewählt werden.

*Beweis.* (i) Da  $\mathcal{M}(\widetilde{\lambda}^n)$  eine  $\sigma$ -Algebra ist und nach letztem Beispiel  $\mathcal{Q}^n$  enthält, folgt die Behauptung mit letztem Lemma.

(ii) Dies folgt aus der Regularität des äußeren Maßes  $\widetilde{\lambda}^n$  nach Satz 3.3.7 und letztem Beispiel.

(iii) Aus  $A$   $\widetilde{\lambda}^n$ -messbar, folgt die Existenz von  $B$  aus (i)-(ii). Das  $B$  als abzählbare Vereinigung offener Mengen gewählt werden kann, folgt aus der Konstruktion von  $B$  im Beweis von Satz 3.3.7.iii.

Existiere nun zu einem  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine Borelmenge  $B \subset A$  mit  $\widetilde{\lambda}^n(A \setminus B) = 0$ . Nach Lemma 3.3.5 ist  $A \setminus B$   $\widehat{\lambda}^n$ -messbar und damit auch  $A = B \cup A \setminus B$ .

(iv) Folgt aus (iii) angewendet auf die jeweiligen Komplemente. □

**Folgerung 3.3.11.**  $\widehat{\lambda}^n$  ist die Vervollständigung von  $\widehat{\lambda}^n|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ .

*Beweis.* Folgt direkt aus der Konstruktion der Vervollständigung und (iii) der letzten Folgerung. □

## 3.4 Messbare Funktionen

Wir kommen nun zum Begriff der messbaren Funktionen zwischen messbaren Räumen. Das werden die sein, die wir im nächsten Abschnitt bei geeignetem Wertebereich bzgl. eines Maßes auf dem Definitionsbereich integrieren werden.

**Definition 3.4.1.** Seien  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , messbare Räume. Eine Abbildung  $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  heißt  $\mathcal{A}_1$ - $\mathcal{A}_2$ -messbar, falls  $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1$ .

Wenn die  $\sigma$ -Algebren aus dem Kontext klar sind, sagt man kurz auch nur *messbar*.

**Beispiel 3.4.2.**

(i) Konstante Abbildungen zwischen messbaren Räumen sind automatisch messbar:

Der Wert der konstanten Abbildung sei  $x \in \Omega_2$ . Sei  $A \in \mathcal{A}_2$ . Dann ist  $f^{-1}(A) = \emptyset$ , falls  $x \notin A$ , und sonst  $f^{-1}(A) = \Omega_1$ .

(ii) Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum,  $\Omega_2 = \mathbb{R}$  mit  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  (die Borel- $\sigma$ -Algebra). Dann ist  $\chi_A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann  $\mathcal{A}_1$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar, wenn  $A \in \mathcal{A}_1$  ist.

(iii) Seien  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , messbaren Räume. Sei  $f_i: \Omega_i \rightarrow \Omega_{i+1}$   $\mathcal{A}_i$ - $\mathcal{A}_{i+1}$ -messbar für  $i = 1, 2$ . Dann ist  $f_2 \circ f_1$   $\mathcal{A}_1$ - $\mathcal{A}_3$ -messbar:

Folgt mit  $(f_2 \circ f_1)^{-1}(A_3) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(A_3))$ .

**Lemma 3.4.3** (Messbarkeitskriterium). *Seien  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , messbare Räume. Sei  $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  und  $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_2$ . Dann gilt:*

(i)  $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$

(ii) *Aus  $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}_1$  folgt, dass  $f$   $\mathcal{A}_1$ - $\sigma(\mathcal{E})$ -messbar ist.*

*Beweis.* (i) Da  $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$  nach Beispiel 3.2.2.vi selbst wieder eine  $\sigma$ -Algebra ist und  $f^{-1}(\mathcal{E})$  enthält, ist  $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \supset \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$ . Für die reverse Inklusion betrachten wir

$$\mathcal{B} := \{A \subset \Omega_2 \mid f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\}.$$

Dann kann man direkt überprüfen, dass  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega_2$  mit  $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}$  ist. Also ist  $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{B}$  und damit  $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$ .

(ii) folgt direkt aus (i). □

**Beispiel 3.4.4.** Stetige Abbildungen  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sind  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) - \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ -messbar (*Borel-messbar*): Das folgt aus letztem Lemma und da für stetige Abbildungen Urbilder offener Mengen wieder offen sind. Damit ist  $f$  auch  $\widetilde{\Lambda}^n - \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ -messbar.

**Lemma 3.4.5.** *Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum. Dann ist  $f = (f_1, \dots, f_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  genau dann  $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -messbar, wenn die Koordinatenfunktionen  $f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  für  $i = 1, \dots, n$  alle  $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar sind.*

*Beweis.* Sei zunächst  $f$   $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -messbar: Die Projektion  $\text{pr}_j: \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}$  auf die  $j$ .te Koordinate ist stetig und damit nach letztem Beispiel Borel-messbar. Damit ist  $f_j = \text{pr}_j \circ f$   $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar.

Seien nun  $f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  für  $i = 1, \dots, n$  alle  $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar: Aus  $f^{-1}(\prod_{i=1}^n (a_i, b_i]) = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}((a_i, b_i])$ ,  $\sigma(\mathcal{Q}^k) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$  und Lemma 3.4.3 folgt so die Messbarkeit von  $f$ . □

Nennt man Abbildungen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  von einem messbaren Raum  $(\Omega, \mathcal{A})$  nach  $\mathbb{R}$  ( $\mathcal{A}$ -)messbar, bedeutet das, wenn nicht anders gesagt, dass man auf  $\mathbb{R}$  die Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  verwendet.

Um Fallunterscheidungen in Beweisen und Sätzen zu vermeiden, arbeitet man oft auch mit *numerischen Funktionen*  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Hierbei wird  $\overline{\mathbb{R}}$  mit der *Borel- $\sigma$ -Algebra*  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \sigma(\mathcal{C})$  versehen, wobei  $\mathcal{C} := \{U \subset \overline{\mathbb{R}} \mid U \cap \mathbb{R} \text{ offen und falls } \pm\infty \in U \text{ ist, gibt es ein } a \in \mathbb{R} \text{ mit } (a, \infty] \in \pm U\}$  die Menge der *offenen Teilmengen von  $\overline{\mathbb{R}}$*  ist. Damit ist insbesondere  $\{\infty\}, \{-\infty\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  und  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{U \subset \mathbb{R} \text{ offen}\} \cup \{\infty, -\infty\})$ .

Ist  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbar, dann auch  $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar.

Wir verwenden  $\overline{\mathbb{R}}$  mit den offensichtlichen Ordnungsrelationen  $\leq, \dots$ , die die auf  $\mathbb{R}$  sinnvoll fortsetzen (also  $a \leq \infty$  für alle  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  ...).

**Lemma 3.4.6.** *Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum,  $A \in \mathcal{A}$  und  $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i)  *$f$  ist  $\mathcal{A}$ -messbar (d.h.  $f\chi_A: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ist  $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbar).*

3 Maßtheorie

(ii)  $\{f \leq s\} \in \mathcal{A}$  für alle  $s \in \mathbb{R}$ .

(iii)  $\{f > s\} \in \mathcal{A}$  für alle  $s \in \mathbb{R}$ .

(iv)  $\{f \geq s\} \in \mathcal{A}$  für alle  $s \in \mathbb{R}$ .

(v)  $\{f < s\} \in \mathcal{A}$  für alle  $s \in \mathbb{R}$ .

(vi)  $f^{-1}(U), f^{-1}(\{\infty\}), f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$  für alle offenen Teilmengen  $U \subset \mathbb{R}$ .

**Vorl. 27** *Beweis.* Wegen  $\{f < s\} = A \setminus \{f \geq s\}$  und  $A \in \mathcal{A}$  sind (ii) und (iii) äquivalent ( analog (iv) und (v)). Wegen

$$\{f \leq s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < s + k^{-1}\}$$

folgt (ii) aus (v) und mit der analogen Identität für  $\geq$  und  $>$  (iv) aus (iii). Damit sind (ii) bis (v) äquivalent.

Die Äquivalenz von (i) und (vi) folgt aus  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{U \subset \mathbb{R} \text{ offen}\} \cup \{\infty, -\infty\})$  und Lemma 3.4.3.

Gilt (vi), dann folgt (iii) wegen  $\{f > s\} = f^{-1}((s, \infty)) \cup f^{-1}(\{\infty\})$ .

Gelte nun (ii) bis (v). Dann ist  $f^{-1}(a, b) = \{f > a\} \cap \{f < b\} \in \mathcal{A}$ . Da jede offene Menge  $U \subset \mathbb{R}$  eine abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen ist, ist damit  $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ . Außerdem ist  $f^{-1}(\{\infty\}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \{f > k\} \in \mathcal{A}$  und analog  $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$ .  $\square$

**Folgerung 3.4.7.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum,  $A \in \mathcal{A}$  und  $f_k: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mathcal{A}$ -messbar,  $k \in \mathbb{N}$ . Dann sind  $\inf_k f_k, \sup_k f_k, \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$  und  $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$  (jeweils als Funktionen von  $A$  nach  $\overline{\mathbb{R}}$  aufgefasst)  $\mathcal{A}$ -messbar.

*Beweis.* Folgt aus  $\{\inf_k f_k \geq s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f_k \geq s\}$  (analog für  $\sup_k f_k$ ) sowie aus  $\liminf_k f_k = \sup_k(\inf_{\ell \geq k} f_\ell)$  (analog für  $\limsup_k f_k$ ).  $\square$

**Folgerung 3.4.8.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum,  $A \in \mathcal{A}$  und  $f, g: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mathcal{A}$ -messbar. Dann ist  $\{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathcal{A}$ .

*Beweis.* Folgt aus  $\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cup \{g > q\}) \dots$   $\square$

Wir erweitern Addition, Betrag und Multiplikation auf  $\overline{\mathbb{R}}$  durch

$$\begin{aligned} a + (\pm\infty) &:= (\pm\infty) + a := \pm\infty \\ a - (\pm\infty) &:= -(\pm\infty) + a := \mp\infty \\ \infty + \infty &:= \infty & -\infty - \infty &:= -\infty \\ b(\pm\infty) &:= \pm\infty \\ |\pm\infty| &:= \infty \\ 0(\pm\infty) &:= (\pm\infty)0 := 0, & \infty - \infty &:= -\infty + \infty = 0. \end{aligned}$$

für  $a \in \mathbb{R}, b > 0$ . Die ersten vier Zeilen sind die natürliche Erweiterung dieser Rechenoperationen, da sie auch den Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte übereinstimmen.

**Lemma 3.4.9.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und  $f, g: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar und  $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ . Dann sind auch  $\alpha f + \beta g$ ,  $fg$ ,  $|f|$ ,  $\max\{f, g\}$  und  $\min\{f, g\}$  messbar.

*Beweis.* Die Messbarkeit von  $\max\{f, g\}$  und  $\min\{f, g\}$  folgt aus Folgerung 3.4.7 mit der Folge  $f_1, f_2, f_2, \dots$

Nun seien  $f, g$  zunächst reellwertig: Die Abbildung  $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto (f(x), g(x))^T$  ist nach Lemma 3.4.5  $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -messbar. Die Funktionen  $s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$  und  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$  sind stetig und damit Borel-messbar. Also ist  $f + g = s \circ h$  und  $fg = p \circ h$  messbar.

Seien nun  $f, g$   $\overline{\mathbb{R}}$ -wertig: Dann sind  $f_n, g_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $f_n := \max(-n, \min(f, n))$  sowie  $g_n := \max(-n, \min(g, n))$  reellwertig und messbar. Somit sind  $f_n + g_n$  und  $f_n g_n$  messbar und damit auch  $f + g = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n + g_n)$  und  $fg = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n g_n$ .

Damit sind  $\alpha f + \beta g$  und  $|f| = \max\{f, 0\} - \min\{f, 0\}$  messbar. □

**Definition 3.4.10.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $E(x)$  eine Aussage in Abhängigkeit von  $x \in \Omega$ . Dann gilt  $E$   $\mu$ -fast überall ( $\mu$ -f.ü.), falls  $E(x)$  außerhalb einer  $\mu$ -Nullteilmenge gilt.

**Lemma 3.4.11.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein vollständiger Maßraum. Sei  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar und  $g: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mit  $f = g$   $\mu$ -f.ü. Dann ist  $g$  ebenfalls messbar.

*Beweis.* Sei  $N \subset \Omega$  mit  $\mu(N) = 0$  und  $f = g$  auf  $\Omega \setminus N$ . Dann ist für  $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

$$f^{-1}(A) = \underbrace{g^{-1}(A) \setminus N}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{f^{-1}(A) \cap N}_{\mu\text{-Nullmenge, da vollst.}} \in \mathcal{A}. \quad \square$$

**Lemma 3.4.12.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein vollständiger Maßraum. Seien  $f_k: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar. Falls  $f_k$   $\mu$ -f.ü. punktweise gegen ein  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  konvergiert, dann ist  $f$  messbar.

*Beweis.* Sei  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$  für alle  $x \notin N$  für  $\mu(N) = 0$ . Dann ist  $g_k := f_k \chi_{\Omega \setminus N}$  als Produkt zweier messbarer Funktionen wieder messbar und damit nach Folgerung 3.4.7 auch  $g := f \chi_{\Omega \setminus N} = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$  messbar. Wegen  $f = g$   $\mu$ -f.ü. folgt aus letztem Lemma, dass  $f$  messbar ist. □

**Lemma 3.4.13.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$  ein messbarer Raum und  $f: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$   $\mathcal{A} - \tilde{\mathcal{A}}$ -messbar. Dann definiert

$$p(A \in \tilde{\mathcal{A}}) := \mu(f^{-1}(A))$$

ein Maß auf  $\tilde{\mathcal{A}}$  – das Bildmaß von  $\mu$  unter  $f$ .

*Beweis.* Die Messbarkeit von  $f$  braucht man, damit die rechte Seite überhaupt wohldefiniert ist. Dann folgt alles direkt mit  $f^{-1}(\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i) = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-1}(B_i)$  und da  $\mu$  selbst ein Maß ist. □

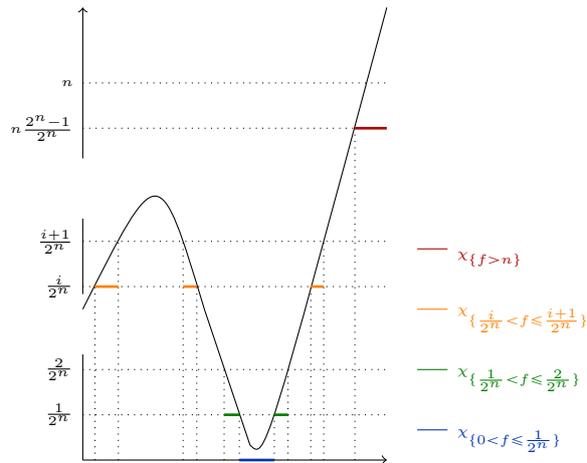


Abbildung 3.1: Das Lebesgue-Integral wird analog dem Riemann-Integral über Treppenfunktionen angenähert. Allerdings werden die Treppen nicht wie beim Riemann-Integral von Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch (äquidistante) Zerlegung von  $[a, b]$  erhalten, sondern durch eine Zerlegung des Wertebereichs. Dadurch sind die Mengen über die die einzelnen 'Stufen' definiert sind allgemeiner und es wird uns eine Verallgemeinerung des Mehrfachintegrals geben, wo jede 'Stufe' nur über einem Quader definiert war.

**Beispiel 3.4.14.** Zufallsvariablen  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum sind als  $(\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbare Abbildungen definiert. Die Wahrscheinlichkeit  $p(X \in A)$ , dass die Zufallsvariable  $X$  dann Werte in  $A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$  annimmt gleich  $\mu(X^{-1}(A))$ . Das  $p$  ist also das Bildmaß von  $\mu$  unter  $X$  und wird *Verteilung von  $X$*  genannt. Hat man einmal  $p$ , kann man für fast alle Belange den ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsraum einfach vergessen.

Nach obigen Überlegungen sind Summen von Zufallsvariablen auf dem gleichen messbaren Raum wieder Zufallsvariablen und für  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Borel-messbar ist auch  $f(X) := f \circ X$  wieder eine Zufallsvariable.

### 3.5 Integration über Maße

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine  $\mathcal{A}$ -messbare Abbildung mit  $f \geq 0$ .

Die Idee des Lebesgue-Integrals ist es nun eine Annäherung durch Summen wie beim Riemann-Integral zu machen. Allerdings stückelt man dieses Mal den Wertebereich und nicht den Definitionsbereich, vgl. Abbildung 3.1:

$$I_n := \sum_{i=1}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \mu \left( \left\{ \frac{i}{2^n} < f \leq \frac{i+1}{2^n} \right\} \right) + n\mu(\{f > n\})$$

Da  $f$  messbar ist, sind  $\{\frac{i}{n} < f \leq \frac{i+1}{n}\}$  und  $\{f > n\}$  alle aus  $\mathcal{A}$ .

**Definition 3.5.1.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f, g: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mathcal{A}$ -messbar mit  $f \geq 0$ . Dann heißt  $f$   $\mu$ -integrierbar, falls  $I_n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen ein Element in  $\mathbb{R}$  konvergiert. Den Grenzwert nennen wir  $(\mu-)$ Integral von  $f$  und schreiben dafür  $\int_{\Omega} f d\mu$ .

Wir nennen  $g$   $\mu$ -integrierbar, falls  $g_+ = \max\{g, 0\}$  und  $-g_- = -\min\{g, 0\}$   $\mu$ -integrierbar sind. Das  $(\mu-)$ Integral von  $g$ , ist dann definiert als  $\int_{\Omega} g d\mu := \int_{\Omega} g_+ d\mu - \int_{\Omega} (-g_-) d\mu$ .

Die Menge der  $\mu$ -integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}^1(\mu)$ .

Für  $f \geq 0$  messbar ist also alles, was für  $\mu$ -integrierbar schief gehen kann, dass  $I_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Je nach Literatur wird dann trotzdem  $\int_{\Omega} f d\mu = \infty$  geschrieben.

**Bemerkung 3.5.2.** Man kann sich recht schnell überlegen, dass das Integral einer Treppenfunktion (=endliche  $\overline{\mathbb{R}}$ -Linearkombination von Funktionen  $\chi_A$  mit  $A \in \mathcal{A}$ ) also  $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}$  mit  $\alpha_i \in \overline{\mathbb{R}}$  und  $A_i \in \mathcal{A}$  sich durch

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i)$$

berechnet.

In diesem Sinne kann man obiges  $I_n$  als Integral der Treppenfunktion

$$f_n := \sum_{i=1}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \chi_{\{\frac{i}{2^n} < f \leq \frac{i+1}{2^n}\}} + n \chi_{\{f > n\}}$$

interpretieren. Dann ist  $f_n$  eine monoton steigende Folge mit  $f_n \rightarrow f$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Lemma 3.5.3.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f, g: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$   $\mu$ -integrierbar. Sei  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

(i) (Linearität)  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  mit  $\int_{\Omega} (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu + \beta \int_{\Omega} g d\mu$ .

(ii) (Monotonie) Aus  $f \leq g$  folgt  $\int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu$ .

(iii) Sei  $f \geq 0$ . Dann ist  $\int_{\Omega} f d\mu = 0$  genau dann, wenn  $f = 0$   $\mu$ -f.ü. ist.

*Beweis.* (i)+(ii) folgt direkt aus Definition und dem Rechnen mit Grenzwerten.

(iii) Sei  $\int_{\Omega} f d\mu = 0$ : Wir setzen  $A_n = \{f > \frac{1}{n}\}$ . Dann ist  $\frac{1}{n} \chi_{A_n} \leq f$  und damit wegen der Monotonie des Integrals  $\mu(A_n) = 0$ . Es ist  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  und  $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{f > 0\}$ . Mit Satz 3.2.7 folgt somit  $\mu(\{f > 0\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$ .

### 3 Maßtheorie

Sei nun  $f = 0$  auf  $\Omega \setminus A$  für  $\mu(A) = 0$ . Dann ist  $f \leq \infty \chi_A$ . Es ist  $\infty \chi_A$   $\mu$ -integrierbar mit Integral 0, da nach Definition die zugehörigen Treppenfunktionen  $n \chi_A$  sind und alle Integral 0 haben.\* Wegen Monotonie ist somit  $\int_{\Omega} f d\mu = 0$ .  $\square$

**Folgerung 3.5.4.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Dann ist  $\mathcal{L}^1(\mu)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum<sup>†</sup> mit der Seminorm<sup>‡</sup>

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} := \int_{\Omega} |f| d\mu.$$

Wegen (iii) des letzten Lemmas ist die Seminorm aber keine Norm.

*Beweis.*  $\mathbb{R}$ -Vektorraum folgt aus letztem Lemma. Genauso die Dreiecksungleichung und die positive Homogenität.  $\square$

**Vorl. 28** Für das  $\mu$ -Integral gelten auch Sätze der monotonen Konvergenz und der majorisierten Konvergenz, die wir schon im ersten Kapitel gesehen haben:

**Satz 3.5.5** (Satz über monotone Konvergenz – Satz von Levi).<sup>§</sup> Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f_k: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mu$ -integrierbar mit  $f_k \leq f_{k+1}$  für alle  $k$ . Falls  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu$  in  $\mathbb{R}$  existiert, ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$   $\mu$ -integrierbar mit

$$\int_{\Omega} (\lim_{k \rightarrow \infty} f_k) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu.$$

In Kapitel 1 haben wir beim Beweis diesen Satzes schon die Vollständigkeit von  $L^1$  verwendet – hier wird es andersherum sein.

*Beweis.* Nach Folgerung 3.4.7 ist  $f := \lim f_k$  messbar. Wegen  $f_k \leq f$  und der Monotonie des Integrals folgt

$$\int_{\Omega} (\lim_{k \rightarrow \infty} f_k) d\mu \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu.$$

Sei nun  $u$  eine Treppenfunktion mit  $u \leq f$ ,  $\alpha > 1$  und  $A_k = \{\alpha f_k \geq u\}$ . Da  $(f_k)_k$  monoton ist, folgt  $A_k \subset A_{k+1}$  für alle  $k$  und  $u \chi_{A_k} \leq \alpha f_k$ . Damit ist  $\cup_k A_k = \{\alpha \lim_k f_k \geq u\} = \Omega$ . Setzen wir  $u_k := u \chi_{A_k}$ . Dann ist  $(u_k)_k$  eine monoton steigende Folge von Treppenfunktionen mit Grenzwert  $u$ . Dann gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_k d\mu = \int_{\Omega} u d\mu$  (Das überprüft man schnell zunächst auf  $u = \chi_A$  mit  $A \in \mathcal{A}$  und erhält den allgemeinen Fall mit Linearität.). Daraus folgt

\*Das erklärt die Wahl der Konvention  $\infty \cdot 0 = 0$ .

†Lemma 3.5.3.i stimmt auch (mit etwas längerem Beweis) für  $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ . Trotzdem wird  $\mathcal{L}^1(\mu)$  damit nicht zum  $\overline{\mathbb{R}}$ -Vektorraum – einfach, weil  $\overline{\mathbb{R}}$  kein Körper ist.

‡Eine *Seminorm/Halbnorm* ist eine Abbildung  $p: V \rightarrow [0, \infty)$  auf  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, die positiv homogen ist und die Dreiecksungleichung erfüllt. Ist sie zusätzlich noch positiv definit, dann wäre  $p$  sogar eine Norm.

§In der Literatur wird der Satz i.A. so formuliert, dass  $f_k$  nur messbar sein muss und die Existenz des Limes der Integrale wird auch weggelassen. Dann gilt die Gleichheit genauso, so lange man  $\infty$  zulässt. Sieht erst einmal allgemeiner aus, aber so bald da etwas  $\infty$  ist, ist die Sache sowieso offensichtlich. Ist also nicht wirklich eine Mehraussage.

$$\int_{\Omega} u d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u \chi_{A_k} d\mu \leq \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu$$

Da dies für alle Treppenfunktionen  $u$  mit  $u \leq f$  und alle  $\alpha > 1$  gilt, folgt, dass  $f$   $\mu$ -integrierbar ist mit

$$\int_{\Omega} (\lim_{k \rightarrow \infty} f_k) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu. \quad \square$$

Der Beweis zeigt insbesondere: Falls  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu = \infty$  ist, gilt auch  $\int_{\Omega} f d\mu = \infty$ .

**Satz 3.5.6** (Satz zur majorisierten Konvergenz – Satz von Lebesgue). *Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f_k, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$   $\mu$ -f.ü. Ferner sei  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\mu$ -integrierbar mit  $|f_k| \leq g$   $\mu$ -f.ü.. Dann sind  $f$  und  $f_k$  alle  $\mu$ -integrierbar und es gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_k - f| d\mu = 0$$

und damit auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$ .

Ist der Maßraum vollständig, dann muss man nicht fordern, dass  $f$  messbar ist, sondern es folgt mit Folgerung 3.4.7 und Lemma 3.4.11.

Der Beweis ist modulo Anpassungen sehr ähnlich zu dem in Kapitel 1, vgl. Satz 1.4.4.

*Beweis.* Nach Folgerung 3.4.7 ist  $f_n^{\max} := \sup_{k \geq n} f_k$  messbar. Es gilt  $-f_n^{\max} \leq -f_{n+1}^{\max}$  nach Konstruktion und  $-f_n^{\max} \leq -g$   $\mu$ -f.ü und damit  $\int_{\Omega} (-f_n) d\mu \leq \int_{\Omega} (-g) d\mu$ . Da  $f_n(x)$   $\mu$ -f.ü. gegen  $f$  konvergiert, gilt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{\max}(x) = f^{\max}(x) \quad \text{f.ü.}$$

Nach Satz 3.5.5 ist  $f^{\max}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{\max}(x)$   $\mu$ -integrierbar und damit auch  $f$   $\mu$ -integrierbar.

Analog können wir  $f_n^{\min} := \inf_{k \geq n} f_k$  definieren und erhalten  $f^{\min} := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{\min}$  ist  $\mu$ -integrierbar mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{\min}(x) = f^{\min}(x) \quad \mu - \text{f.ü.}$$

Somit gilt  $f^{\min}(x) = f^{\max}(x) = f(x)$   $\mu$ -f.ü.

Wegen  $f_n^{\min} \leq f_n \leq f_n^{\max}$  folgt,  $\int_{\Omega} (f_n^{\min} - f)_{\pm} d\mu \leq \int_{\Omega} (f_n - f)_{\pm} d\mu \leq \int_{\Omega} (f_n^{\max} - f)_{\pm} d\mu$  und mit Lemma 3.5.3 damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu = 0$   $\square$

Mit Konvergenzsätzen erhalten wir nun für das Integral zu einem Bildmaß:

**Satz 3.5.7.** *Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$  ein messbarer Raum und  $f: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$   $\mathcal{A} - \tilde{\mathcal{A}}$ -messbar und  $p = \mu \circ f^{-1}$ . Dann ist  $\varphi: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann  $p$ -integrierbar, wenn  $\varphi \circ f$   $\mu$ -integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_{\tilde{\Omega}} \varphi dp = \int_{\Omega} (\varphi \circ f) d\mu.$$

### 3 Maßtheorie

*Beweis.* Für  $\varphi = \chi_A$  mit  $A \in \tilde{\mathcal{A}}$  ist dies genau die Definition des Bildmaßes. Damit gilt die Aussage auch für Treppenfunktionen, da die Integration linear ist. Der Rest folgt mittels Definition des Integrals und dem Satz zur monotonen Konvergenz.  $\square$

**Beispiel 3.5.8.** Sei  $X$  eine  $\mu$ -integrierbare Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . Dann ist der *Erwartungswert von  $X$*  definiert als

$$E(X) := \int_{\Omega} X d\mu.$$

Sei  $p$  das Bildmaß von  $\mu$  unter  $X$ . Dann ist nach letztem Satz (mit  $\varphi = \text{id}$ )

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x dp.$$

Sei  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  mit  $p(B) \neq 0$  und  $p_B$  die bedingte Wahrscheinlichkeit zu  $p$  und  $B$ , vgl. Beispiel 3.2.5.iv. Dann ist der *bedingte Erwartungswert* \*

$$E(X|B) := \frac{E(X\chi_B)}{p(B)} = \frac{\int_B x dp}{p(B)} = \int_B x dp_B.$$

Die letzte Gleichheit gilt nicht nur für die Funktion  $f(x) = x$ , sondern allgemein für messbare  $f$ . Sieht man direkt für Treppenfunktionen und der Rest folgt mit Konvergenzsätzen.<sup>†</sup>

Man kann direkt überprüfen, dass  $\tilde{\mu}: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, B \mapsto E(X|B)$ , ein endliches Maß auf  $\mathbb{R}$  definiert.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie treten auch bedingte Erwartungswerte bzgl. einer anderen Zufallsvariablen oder einer  $\sigma$ -Algebra auf:

Der *bedingte Erwartungswert von  $X$  bzgl. einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$*  ist definiert als eine Abbildung  $Y := E(X|\mathcal{B}): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $\mathcal{B} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar ist und für die  $E(X\chi_B) = E(Y\chi_B)$  für jedes  $B \in \mathcal{B}$  (die Existenz und Eindeutigkeit (modulo  $\mu$ -f.ü.) müsste man sich natürlich noch überlegen).

Der *bedingte Erwartungswert von  $X$  bzgl. einer Zufallsvariablen  $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$*  ist definiert als:

$$E(X|Y) := E(X|\sigma(Y))$$

mit  $\sigma(Y) := Y^{-1}(\mathcal{A})$ .

**Definition 3.5.9.**

$$L^1(\mu) := \mathcal{L}^1(\mu) / \sim$$

mit  $f \sim g$  genau dann, wenn  $f = g$   $\mu$ -f.ü.<sup>‡</sup>

\*Wie im ersten Kapitel sei wieder  $\int_B x dp := \int_{\mathbb{R}} x \chi_B dp$

<sup>†</sup>Das ist eine generelle Beweismethode in der Maß-/Integrationstheorie und in der Stochastik.

<sup>‡</sup>Man überprüft direkt, dass dies eine Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{L}^1(\mu)$  definiert.

**Folgerung 3.5.10.** Auf  $L^1(\mu)$  definiert  $\|f\|_{L^1(\mu)} := \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$  eine Norm.

*Beweis.* Wohldefiniertheit und positiv definit folgt mit Lemma 3.5.3.iii. □

**Satz 3.5.11.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Dann ist  $L^1(\mu)$  ein Banachraum.\*

*Beweis.* Sei  $g_k \in L^1(\mu)$  eine Cauchyfolge. Dann gibt es jeweils  $\mu$ -integrierbare  $f_k : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mit  $g_k = [f_k]$ , so dass es für  $\epsilon > 0$  ein  $m \in \mathbb{N}$  gibt mit  $\int_{\Omega} |f_k - f_\ell| d\mu < \epsilon$  für alle  $k, \ell > m$ . Aus Lemma 1.3.9 erhalten wir eine schnell konvergente Teilfolge  $f_{i_k}$ . Es ist  $f_{i_{k+1}} = f_{i_1} + \sum_{j=1}^k (f_{i_{j+1}} - f_{i_j})$ . (Wir fahren nun analog zum Beweis von Lemma 1.3.10 fort) Wir setzen

$$F_\ell(x) := |f_{i_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\ell} |f_{i_k}(x) - f_{i_{k+1}}(x)|.$$

Dann ist  $0 \leq |f_{i_{\ell+1}}| \leq F_\ell$ ,  $F_\ell$  ist in  $\ell$  monoton steigend und es gilt nach Dreiecksungleichung

$$\|F_\ell\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \leq \|f_{i_1}\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \sum_{k=1}^{\ell} \|f_{i_k}(x) - f_{i_{k+1}}(x)\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \leq \|f_{i_1}\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + 1$$

Nach dem Satz 3.5.5 zur monotonen Konvergenz ist  $F := \lim_{\ell \rightarrow \infty} F_\ell = |f_{i_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{i_k}(x) - f_{i_{k+1}}(x)|$   $\mu$ -integrierbar und damit  $\mu$ -f.ü. endlich. Demnach ist  $f_{i_1} + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{i_{j+1}} - f_{i_j})$   $\mu$ -f.ü. absolut konvergent und damit existiert  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{i_k}$   $\mu$ -f.ü. Sei nun  $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{i_k}$  außerhalb einer  $\mu$ -Nullmenge und auf dieser Nullmenge gleich 0. Dann ist  $f$  messbar und nach dem Satz über dominierende Konvergenz folgt  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  mit  $\|f_{i_k} - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Mit der Dreiecksungleichung folgt dann

$$\|f_i - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \leq \|f_i - f_{i_k}\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} + \|f_{i_k} - f\|_{\mathcal{L}^1(\mu)}$$

dass schon  $f_i$  selbst in  $\mathcal{L}^1(\mu)$  gegen  $f$  konvergiert. □

**Bemerkung 3.5.12** (Das  $\mu$ -Integral als Riemann-Integral). Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar mit  $f \geq 0$ . Wir setzen

$$S_f(t) := \mu(\{f > t\}).$$

das ist wohldefiniert, da  $f$  messbar ist. Die Funktion  $S_f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$  ist monoton fallend. Falls  $\mu(\Omega) < \infty$  ist, bildet  $S_f$  sogar wieder nach  $[0, \infty)$  ab. Falls  $\mu(\{f > t\}) = \infty$  für ein  $t > 0$  ist, ist  $\int_{\Omega} f d\mu = \infty$ . Falls höchstens  $\mu(\{f > 0\}) = \infty$  ist, ist  $S_f$  auf kompakten Intervallen  $[\alpha, \beta] \subset (0, \infty)$  Riemann-integrierbar, da  $S_f$  monoton ist (Das haben wir in Analysis 1 nur erwähnt [2, S.137], einen Beweis findet man z.B. in [1, VI.3, p19]).

Dann ist

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_0^{\infty} \mu(\{f > t\}) dt,$$

dabei ist die rechte Seite als uneigentliches Riemann-Integral zu verstehen. (Das folgt direkt aus unserer Konstruktion von  $\int_{\Omega} f d\mu$ .)

\*Man kann auch wieder analog auch  $L^p(\mu) = \{f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar} \mid f^p \text{ ist } \mu\text{-integrierbar}\} / \sim$  für  $1 \leq p < \infty$  und erhält auch einen Banachraum (Beweis analog).

### 3.6 Vergleich von $L^1(\widehat{\lambda}^n)$ mit $L^1(\mathbb{R}^n)$

Wir wollen nun sehen, dass  $\widehat{\lambda}^n$  gleich dem Lebesgue-Maß  $\lambda^n$  aus Definition 3.1.1 ist und dass  $L^1(\lambda^n)$  als Banachraum gleich/isomorph zu  $L^1(\mathbb{R}^n)$  ist:

**Satz 3.6.1.**

(i)  $C_c^0(\mathbb{R}^n)$  liegt dicht in  $\mathcal{L}^1(\widehat{\lambda}^n)$ .

(ii) Für  $C_c^0(\mathbb{R}^n)$  gilt  $\|c\|_{\mathcal{L}^1(\widehat{\lambda}^n)} = I(|c|)$ .

*Beweis.* (i)  $C_c^0(\mathbb{R}^n)$  ist überhaupt eine Teilmenge von  $\mathcal{L}^1(\widehat{\lambda}^n)$ : Sei  $c \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist  $c$  messbar. O.B.d.A. sei  $c \geq 0$  (sonst Übergang zu  $c_{\pm} \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ ). Sei  $\alpha := \max c \in [0, \infty)$ . Dann ist  $f \leq \alpha \chi_{\{c \neq 0\}}$  und damit  $\mu$ -integrierbar.

Für die Dichtheit sei zunächst  $f \in \mathcal{L}^1(\widehat{\lambda}^n)$  der Form  $f = \chi_A$  mit  $A \in \widetilde{\Lambda}^n$ . Dann ist insbesondere  $\widehat{\lambda}^n(A) < \infty$ . Sei  $\epsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$ , so dass für  $B := A \cap [-k, k]^n$  gilt:  $\widehat{\lambda}^n(A) \leq \widehat{\lambda}^n(B) + \frac{\epsilon}{2}$  und damit  $\|\chi_A - \chi_B\|_{\mathcal{L}^1(\widehat{\lambda}^n)} \leq \frac{\epsilon}{2}$ . Nach der Konstruktion des äußeren Maßes und Folgerung 3.3.10 gibt es eine abgeschlossene Menge  $K$  und eine offene Menge  $K \subset B \subset U$  mit  $\widehat{\lambda}^n(U \setminus K) < \frac{\epsilon}{2}$ . Insbesondere ist  $K$  kompakt. Ist  $K = \emptyset$ , dann ist  $\|\chi_A - 0\|_{\mathcal{L}^1(\widehat{\lambda}^n)} < \epsilon$ . Sei also  $K \neq \emptyset$ . Dann ist  $\text{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U) > 0$  und damit ist

$$h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 - \min \left\{ 1, \frac{\text{dist}(x, K)}{\text{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus U)} \right\}$$

ein wohldefiniertes Element aus  $C_c^0(\mathbb{R}^n)$  mit  $h|_K = 1$  und  $h|_{\mathbb{R}^n \setminus U} = 0$ . Es gilt

$$\|\chi_A - h\|_{\mathcal{L}^1(\widehat{\lambda}^n)} \leq \|\chi_A - \chi_B\|_{\mathcal{L}^1(\widehat{\lambda}^n)} + \|\chi_U - \chi_K\|_{\mathcal{L}^1(\widehat{\lambda}^n)} < \epsilon.$$

Wegen Dreiecksungleichung ist damit jede Treppenfunktion durch Funktionen in  $C_c^0(\mathbb{R}^n)$  in  $\mathcal{L}^1(\widehat{\lambda}^n)$  approximierbar. Die Treppenfunktionen wiederum sind dicht in  $\mathcal{L}^1(\widehat{\lambda}^n)$  per Konstruktion.

(ii) Ein  $c \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$  kann punktweise durch die Approximation einer Untersumme wie in der Definition von Mehrfachintegralen [3, Abschnitt 2.4] dargestellt werden. Diese Approximationen sind dann Treppenfunktion  $c_k$  auf  $(\mathbb{R}^n, \widetilde{\Lambda}^n, \widehat{\lambda}^n)$ , da Quader in  $\mathbb{R}^n$   $\widehat{\lambda}^n$ -messbar sind (mit Maß gleich ihrem Volumen). Das Integral im Mehrfachintegralsinne stimmt dann mit dem Integral als Treppenfunktion auf  $(\mathbb{R}^n, \widetilde{\Lambda}^n, \widehat{\lambda}^n)$  überein. Da  $c_k$  monoton steigend ist und punktweise gegen  $c$  konvergiert, folgt  $\|c\|_{\mathcal{L}^1(\widehat{\lambda}^n)} = I(c)$ .  $\square$

Da  $L^1(\widehat{\lambda}^n)$  nach Satz 3.5.11 vollständig ist, folgt direkt

**Folgerung 3.6.2.**  $L^1(\widehat{\lambda}^n) = L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Dass die Maße  $\lambda^n$  und  $\widehat{\lambda}^n$  auch wirklich übereinstimmen, folge direkt aus der Definition 3.1.1 von  $\lambda^n$  und der Definition des  $\widehat{\lambda}^n$ -Integral auf charakteristischen Funktionen.

### 3.7 Gibt es nicht Lebesgue-messbare Mengen? – Das Auswahlaxiom

Kapitel 1	Kapitel 3
$A \subset \mathbb{R}^n$ ist vernachlässigbar	$\lambda^n(A) = 0$
f.ü.	$\lambda^n$ -f.ü.
$\exists$ Folge $f_k \in C^0(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k(x) \rightarrow f(x)$ f.ü.	$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\lambda^n - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar
$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist Realisierung eines Elementes von $L^1(\mathbb{R}^n)$	$f \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$

Für die Äquivalenz der Zeile mit der Messbarkeit folgt die eine Richtung aus Lemma 3.4.12 und Beispiel 3.4.4. Die andere Richtung folgt mit Folgerung 3.4.7 und Lemma 3.4.11.

## 3.7 Gibt es nicht Lebesgue-messbare Mengen? – Das Auswahlaxiom

Das Auswahlaxiom ist ein Axiom der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre (ZFC). Schon dass man überhaupt als Ausgangspunkt mit Axiomen über Mengen einsteigt, ist eine Wahl. Eine Wahl, die fast überall in der Mathematik verbreitet ist, aber eine Wahl. Die neueren Beweisassistenten, wie z.B. LEAN\* benutzen aber z.B. nicht Mengen sondern Typentheorie als Grundlage.

Aber auch innerhalb der Axiomatik mit Mengen trifft man verschiedene Wahlen. Macht man nur 'ZF'† ist das Auswahlaxiom erst einmal nicht dabei. Nimmt man es mit dazu heißt es 'ZFC'. Was sagt das Auswahlaxiom?

Sei  $A$  eine Menge von nichtleeren Mengen. Dann gibt es eine Auswahlfunktion für  $A$ , d.h. jedem Element  $X \in A$  wird genau ein Element von  $X$  zugeordnet.

Klingt harmlos – das liegt daran, dass man sich in erster Linie nicht so schlimme Mengen für  $A$  vorstellt. Aber nimmt man das Auswahlaxiom an, kann man sehr seltsame Sachen zeigen, z.B. Banach-Tarski:

Es gibt eine disjunkte Zerlegung von  $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$  in endlich viele Teilmengen, die anders wieder zusammengesetzt zwei Kopien von  $B_1(0)$ .

\*[https://en.wikipedia.org/wiki/Lean\\_\(proof\\_assistant\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Lean_(proof_assistant))

†[https://en.wikipedia.org/wiki/Zermelo%E2%80%93Fraenkel\\_set\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Zermelo%E2%80%93Fraenkel_set_theory)

### 3 Maßtheorie

Würde man ja eigentlich sagen, ist offensichtlich falsch...

Auch für Zornsche Lemma braucht man das Auswahlaxiom - genauer gesagt, es ist äquivalent zur Annahme des Auswahlaxioms\*.

Will man nun die Frage beantworten, ob es überhaupt nicht-Lebesgue-messbare Mengen gibt, dann kann man dies nur mit ZF nicht entscheiden:

Nimmt man das Auswahlaxiom an, dann ist die Antwort ja. Ein Beispiel ist die Vitali-Menge  $V \subset [0, 1]$ , welche wie folgt spezifiziert ist: Für alle  $r \in \mathbb{R}$  gibt es genau ein  $v \in V$  mit  $r - v \in \mathbb{Q}$ . Wenn man sich überlegt, dass es diese Menge wirklich gibt, benutzt man das Auswahlaxiom<sup>†</sup>. Wie sieht man, dass  $V$  nicht Lebesgue-messbar ist? Sei  $q_1, q_2, \dots$  eine Abzählung von  $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ . Wir setzen  $V_k = V + q_k := \{v + q_k \mid v \in V\}$ . Dann sind die  $V_k$  paarweise disjunkt und  $[0, 1] \subset \cup_k V_k \subset [-1, 2]$ . Angenommen  $V$  ist Lebesgue-messbar, dann wegen Translationsinvarianz auch  $V_k$ . Wegen der  $\sigma$ -Additivität von Maßen folgt dann  $1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(V_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(V) \leq 3$ . Das ist ein Widerspruch.

Aber man kann auch zusätzlich zu 'ZF' das Axiom 'Alle Mengen sind Lebesgue-messbar' hinzunehmen und es gibt dafür auch ein Modell<sup>‡</sup> ...

---

\*s. [https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom\\_of\\_choice](https://en.wikipedia.org/wiki/Axiom_of_choice) für andere Aussagen, die äquivalent zum Auswahlaxiom sind.

<sup>†</sup>siehe [https://en.wikipedia.org/wiki/Vitali\\_set](https://en.wikipedia.org/wiki/Vitali_set) – die Existenz von nicht-Lebesgue-messbaren Mengen ist allerdings nicht äquivalent zum Auswahlaxiom. Man kommt auch mit etwas schwächeren Axiomen durch.

<sup>‡</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Solovay\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Solovay_model)

# Literaturverzeichnis

- [1] Herbert Amann and Joachim Escher. *Analysis II. Transl. from the German by Silvio Levy and Matthew Cargo*. Basel: Birkhäuser, 2008.
- [2] Nadine Große. Analysis I, Skript, WS 2020/21, Uni Freiburg.  
[https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisI/Analysis1\\_WS-2021\\_Skript.pdf](https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisI/Analysis1_WS-2021_Skript.pdf)  
Übungsaufgaben unter [https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisI/Analysis1\\_WS-2021\\_uebungen\\_gesamt.pdf](https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisI/Analysis1_WS-2021_uebungen_gesamt.pdf).
- [3] Nadine Große. Analysis II, Skript, SS 2021, Uni Freiburg. [https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrose/teaching/Vorlesungen/AnalysisII/Analysis2\\_SS-21\\_Skript.pdf](https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrose/teaching/Vorlesungen/AnalysisII/Analysis2_SS-21_Skript.pdf)  
Übungsaufgaben unter [https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisII/Analysis2\\_SS-21\\_uebungen\\_gesamt.pdf](https://home.mathematik.uni-freiburg.de/ngrosse/teaching/Vorlesungen/AnalysisII/Analysis2_SS-21_uebungen_gesamt.pdf).
- [4] Peter D. Lax. Rethinking the Lebesgue integral. *Am. Math. Mon.*, 116(10):863–881, 2009.
- [5] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Fourier analysis. An Introduction*, volume 1. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2003.
- [6] A. C. M. van Rooij and W. H. Schikhof. A second course on real functions. Cambridge etc.: Cambridge University Press. XIII, 1982.