Analysis III Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 21/22

Übungsblatt 0

Dieses Blatt wird nicht abgegeben, sondern nur in der Übung der zweiten Vorlesungswoche besprochen.

Aufgabe. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen stimmt. Beweisen Sie diese dann ggf. oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.[1]

(i) Die Vereinigung beliebiger vieler offener Mengen von X ist wieder offen?

(ii) Die Vereinigung beliebiger vieler abgeschlossener Mengen von X ist wieder abgeschlossen?

(iii) Der Schnitt beliebiger vieler abgeschlossener Mengen von X ist wieder abgeschlossen?

(iv) Die Schnitt beliebiger vieler offener Mengen von X ist wieder offen?

Wie sieht das jeweils mit endlich vielen Menge aus?

Aufgabe. Sei $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit kompakten Träger. Für $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ sei

$$\|f\|_{L^1} := \int_{\mathbb{R}^n} |f| \mathrm{dvol}.$$

Zeigen Sie, dass $\|.\|_{L^1}$ auf $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ eine Norm ist.

Aufgabe. Definieren Sie geeignet punktweiser/gleichmäßiger Konvergenz von Folgen $f_n \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ bzw. direkt für $f_n \colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ für metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) und zeigen Sie die Entsprechung von Satz 4.1.48 aus Analysis 1.

[1] Für die Suche nach Gegenbeispielen denken Sie an $X = \mathbb{R}$ mit dem euklidischen Abstand.

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (2.5+2.5)**.** (Uneigentlich integrierbar)

(i) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar. Zeigen Sie, dass dann $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{i\to\infty} \int_{K_i} f \mathrm{dvol}$ für jede kompakte Ausschöpfung $(K_i)_i$ von $\mathbb{R}$ mit K_i zusammenhängend[1] ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{|\sin x|}{x}$ nicht uneigentlich integrierbar ist.
Hinweis: Vergleich gegen eine divergente Minorante.

Aufgabe 2 (2.5+2.5)**.** ($C_c^0(\mathbb{R}^n)$ ist bzgl. der L^1-Norm nicht vollständig.) Zeigen Sie dafür:

(i) Die Folge

$$f_k(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq 1 \\ 1 & \text{für } |x| \leq 1 - \frac{1}{k} \\ \text{dazwischen linear} & \end{cases}$$

ist eine Cauchyfolge bzgl. der L^1-Norm $\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$.

(ii) Sei $f_k \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ eine Folge, die in L^1 gegen ein $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ konvergiert. Dann konvergiert f_k auch punktweise gegen f.

Aufgabe 3 (2.5+2.5)**.** (Schnell konvergente Folgen)

(i) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Sei a_k eine Folge in X, so dass es ein $\ell > 0$ mit $d(a_k, a_{k+1}) \leq \frac{\ell}{k^4}$ für alle k gibt. Zeigen Sie, dass a_k eine Cauchyfolge ist.

(ii) Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum. Seien a_k und b_k zwei schnell konvergente Folgen, d.h. es gibt in $\ell > 0$ mit $d(a_k, a_{k+1}) \leq \frac{\ell}{k^4}$ für alle k und analog ein ℓ' für b_k. Sei λ im zugehörigen Körper. Zeigen Sie, dass dann auch $a_k + \lambda b_k$ schnell konvergent ist.

Aufgabe 4 (2.5+2.5)**.** (Vernachlässigbare Mengen)

(i) Zeigen Sie, dass die Cantormenge $\mathcal{C} \subset [0,1]$ aus Beispiel 1.2.4 vernachlässigbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ vernachlässigbar ist, aber $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nicht vernachlässigbar sein kann.

Abgabe am Mittwoch 27.10.21 bis 14 Uhr in die Briefkästen im Untergeschoss der Ernst-Zermelo-Str. 1.

[1] Das bedeutet hier einfach, dass K_i ein kompaktes Intervall ist.

Analysis III Ksenia Fedosova, Nadine Große

WS 21/22

Übungsblatt 2

Aufgabe 5. Zeigen Sie, es ist $\frac{1}{\sqrt{x}}$ in $L^1([0,1])$ (Das war kurz für: $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist eine Realisierung eines Elementes in $L^1([0,1])$.) und die zugehörige L^1-Norm ist gleich dem uneigentlichen Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

Aufgabe 6. Zeigen Sie: Treppenfunktionen f auf $[a,b]$, vgl. Def. 4.5.1 in Analysis 1, sind Realisierungen von Elementen in $L^1([a,b])$ und es ist $\|f\|_{L^1}$ gleich dem Riemann-Integral $\int_a^b |f(x)|dx$.

Aufgabe 7. Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$. Sei $\bar{A}$ der Abschluss von A in X und $(\bar{A}^d, \bar{d})$ die Vervollständigung des metrischen Raumes (A,d). Zeigen Sie, dass $(\bar{A}, d)$ und $(\bar{A}^d, \bar{d})$ als metrische Räume isomorph sind, d.h. es gibt eine Bijektion $\phi\colon \bar{A} \to \bar{A}^d$ und Konstanten $c_1, c_2 > 0$ mit

$$c_1 d(x,y) \leq \bar{d}(\phi(x), \phi(y)) \leq c_2 d(x,y)$$

für alle $x, y \in \bar{A}$.

Aufgabe 8. Sei X die Menge aller beschränkten reellen Folgen $(a_n)_n$. Mit $\lambda(a_n)_n + (b_n)_n := (\lambda a_n + b_n)_n$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_n, (b_n)_n \in X$ wird X zu einem reellen Vektorraum. Wir setzen

$$\|(a_n)_n\|_X := \sup_n |a_n|.$$

Damit wird $(X, \|.\|_X)$ zu einem normierten Raum.
Welche der folgenden Teilmengen von X sind zusammen mit $\|.\|_X$ Banachräume?

(i) X

(ii) c_0 die Menge aller Nullfolgen

(iii) c_1 die Menge der Folgen, die gegen 1 konvergieren.

(iv) c_{00} die Menge aller Folgen, für welche nur endlich viele Folgenglieder ungleich Null sind.

Was sind jeweils die Vervollständigungen dieser metrischen Räume?

Abgabe am Mittwoch 03.11.21 bis 14 Uhr in die Briefkästen im Untergeschoss des Matheinstituts.

Übungsblatt 3

Aufgabe 9. Zeigen Sie, $\frac{1}{x}$ ist <u>nicht</u> in $L^1([0,1])$.
Hinweis: Für welche Art von Konvergenz von Funktionfolgen können wir Grenzwert und Integration vertauschen (AnaI)? Auf welchen Menge haben wir diese Konvergenz hier? Können wir damit abschätzen, welche L^1-Norm $\frac{1}{x}$ haben müsste, wenn es L^1 wäre?

Aufgabe 10 (3.5+1.5)**.** Zeigen Sie:

(i) Sei $g_k \in L^1(K)$ eine schnell konvergente Cauchyfolge. Sei g der Limes von g_k in $L^1(K)$. Dann gilt $g_k(x) \to g(x)$ fast überall.

(ii) Sei $f_k \in L^1(K)$. Konvergiere f_k in L^1 gegen ein $f \in L^1(K)$. Seien $f_k(x)$ Realisierungen von f_k, so dass $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ fast überall existiert. Dann ist $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ eine Realisierung von f.

Aufgabe 11 (Lemma 1.3.9 für L^p)**.** Sei $p \in [1,\infty)$. Für $c \in C_c^0(K)$ definieren wir die L^p-Norm als

$$\|c\|_{L^p} := \left(\int_K |c|^p \mathrm{dvol}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(Wir werden später noch beweisen, dass es sich wirklich um eine Norm handelt. Sie können das hier einfach benutzen.)
Sei nun $c_k \in C_c^0(K)$ eine schnell konvergente Cauchyfolge bzgl. L^p. Zeigen Sie, dass c_k punktweise fast überall konvergiert und dass es für jedes $\epsilon > 0$ eine offene Menge B mit $\mathrm{vol}B < \epsilon$ gibt, so dass $c_k|_{K\setminus B}$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 12. Sei $\phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ Lipschitz mit Lipschitzkonstante C, d.h. für alle $s,t \in \mathbb{R}^m$ gelte

$$|\phi(s) - \phi(t)| \le C|s-t|.$$

Zeigen Sie: Für alle $f_1,\dots,f_m \in L^1(K)$ gibt es genau ein Element $\phi(f_1,\dots,f_m) \in L^1(K)$, so dass folgende Eigenschaften gelten: Es gibt ein $\tilde{C} > 0$, so dass für alle $f_i, g_i \in L^1(K)$ gilt

(i) $\|\phi(f_1,\dots,f_m) - \phi(g_1,\dots,g_m)\|_1 \le \tilde{C} \max_{i=1,\dots,m} \|f_i - g_i\|_1$

(ii) $\phi(f_1,\dots,f_m)(x) = \phi(f_1(x),\dots,f_m(x))$ f.ü.

Abgabe am Mittwoch 10.11.21 bis 14 Uhr in die Briefkästen im Untergeschoss des Matheinstituts.

Übungsblatt 4

Aufgabe 13. Sei $f \in L^1(K)$ mit Realisierung $f\colon K \to \mathbb{R}$, so dass $f(x) \geq a$.

(i) Sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass dann $\sqrt{f} \in L^1(K)$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass (i) i.A. nicht stimmt, wenn $a = 0$ ist.

Aufgabe 14. Zeigen Sie: $\|.\|_\infty$ (aus Lemma 1.3.25) ist eine Norm auf der Menge der beschränkten Elemente in $L^1(K)$ und stimmt für beschränkte Elemente in $L^1(K)$, welche eine Realisierung $c \in C^0(K)$ besitzen, mit der Supremumsnorm $\sup_{x\in K} |c(x)|$ überein.

Aufgabe 15. Zeigen Sie: Die Menge der Treppenfunktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ liegt dicht in $L^1([a,b])$.

Hinweis: Um ein Element in $L^1([a,b])$ durch Treppenfunktionen anzunähern, denken Sie an die Definition des Riemann-Integrals von einer Funktion.

Aufgabe 16 (Lemma von Fatou)**.** Sei $f_k \in L^1(K)$, $f_k \geq 0$. Dann ist $\liminf_{k\to\infty} I(f_k) = \infty$ oder $\liminf_{k\to\infty} f_k \in L^1(K)$ mit

$$I(\liminf_{k\to\infty} f_k) \leq \liminf_{k\to\infty} I(f_k).$$

Hinweis: Betrachten Sie $g_n := \inf_{k\geq n} f_k$.

Abgabe am Mittwoch 17.11.21 bis 14 Uhr in die Briefkästen im Untergeschoss des Matheinstituts.

Übungsblatt 5

Aufgabe 17. Berechnen Sie (mit Begründung)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(1 - e^{-\frac{x^2}{n}}\right) x^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Aufgabe 18 (2+2+1)**.** Wir betrachten die Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{für } x > 0.$$

Zeigen Sie

(i) $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$

(ii) $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$

(iii) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Hinweis: Benutzen Sie (i) für (ii) und (ii) sowie das Wallis'sche Produkt aus Analysis 1 für (iii).

Aufgabe 19. Sei f_k eine Folge in $L^1(K)$, so dass $\sum_{k=0}^\infty \|f_k\|_1 < \infty$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^\infty f_k(x)$ f.ü. absolut konvergiert und $\sum_{k=0}^\infty f_k \in L^1(K)$ mit $I(\sum_{k=0}^\infty f_k) = \sum_{k=0}^\infty I(f_k)$ ist.

Aufgabe 20. Rechnen Sie nach, dass das Volumen von $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ ist gleich $\frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ ist.
Hinweis: Induktion (von $n-2$ auf n ist einfacher als von $n-1$ auf n, geht aber beides) und Analysis 2.

Abgabe am Mittwoch 24.11.21 bis 14 Uhr in die Briefkästen im Untergeschoss des Matheinstituts.

Übungsblatt 6

Aufgabe 21. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Wir definieren

$$F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x)g(y).$$

Zeigen Sie, dass $F \in L^1(\mathbb{R}^{m+n})$ und

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} F \mathrm{dvol} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{dvol}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^m} g \mathrm{dvol}\right).$$

Aufgabe 22. Wir wollen noch einmal auf einem anderen Wege nachrechnen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ ist: Dazu seien $F, G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2, \qquad G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

Zeigen Sie, $F' + G' = 0$ und $F + G = \frac{\pi}{4}$ und benutzen Sie dies, um das gesuchte Integral zu berechnen (Selbstverständlich sollen Sie immer dazu sagen, warum Sie die jeweiligen Rechnungen machen dürfen).

Aufgabe 23. Sei $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 2y & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Welches der folgenden Integrale existiert als iteriertes Riemann-Integral bzw. iteriertes Lebesgue-Integral?

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dx\right) dy, \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dy\right) dx$$

Ist f insgesamt integrierbar im Sinne der Analysis 2 bzw. Lebegue-integrierbar?

Aufgabe 24 (1+3+1)**.** Zeigen Sie:

(i) Für $p \in (0,1)$ erfüllt $\|c\|_p = \left(\int_K |c|^p \mathrm{dvol}\right)^{\frac{1}{p}}$ auf $C_c^0(K)$ nicht die Dreiecksungleichung[1] (und ist damit keine Norm).

(ii) Sei $(X, \|.\|)$ ein reeller normierter Vektorraum. Die Norm $\|.\|$ wird genau dann von einem Skalarprodukt induziert[2], wenn die *Parallelogrammidentität*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

für alle $x, y \in X$ gilt.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst den Kandidaten für ein mögliches Skalarprodukt, indem Sie $\langle x+y, x+y\rangle$ betrachten. Die meisten Eigenschaften des Skalarprodukts folgen sofort, nur Bilinearität ist komplizierter, als man zunächst glaubt. Zeigen Sie zunächst $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$. Dann bleibt noch $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Dazu zunächst $a \in \mathbb{N}$ dann $a \in \mathbb{Q}$ betrachten und am Schluss zeigen, dass $\langle ., y\rangle\colon X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, y\rangle$ für alle $y \in X$ stetig ist. (Sie können benutzen, dass für ein Skalarprodukt immer die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ gilt – Beweis ist genau der aus Analysis 1 für das euklidische Skalarprodukt).

(iii) Für $p \in [1, \infty)$, $p \neq 2$, wird $\|.\|_p$ nicht von einem Skalarprodukt induziert.

Abgabe am Mittwoch 01.12.21 bis 14 Uhr in die Briefkästen im Untergeschoss des Matheinstituts.

[1] Stattdessen gilt in diesen L^p-Räumen die reverse Minkowski-Ungleichung: $\||f| + |g|\|_p \geq \|f\|_p + \|f\|_p$ für alle $f, g \in L^p(K)$.
[2] D.h. es gibt ein Skalarprodukt auf X mit $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

Analysis III Ksenia Fedosova, Nadine Große
WS 21/22

Übungsblatt 7

Aufgabe 25 (2+2+1)**.** (i) Zeigen Sie: Sei $p, q \in [1, \infty)$. Sei $f \in L^p(K) \cap L^q(K)$[1] und $\theta \in [0, 1]$. Dann ist

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\theta} \|f\|_q^{\theta} \quad \text{für } \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}.$$

Insbesondere ist somit $f \in L^s(K)$ mit $\|f\|_s \leq \max\{\|f\|_p, \|f\|_q\}$ für alle $s \in [p, q]$.

(ii) Zeigen Sie: Sei $p, q \in [1, \infty)$ mit $p \leq q$. Sei $f \in L^p(K)$ beschränkt. Dann folgt $f \in L^q(K)$.

(iii) Stimmt (ii) auch für $q < p$?

Aufgabe 26. Sei $p \in [1, \infty)$. Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $t_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x - a$. Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $a_i, a \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i \to 0$ für $i \to \infty$. Zeigen Sie

(i) $f \circ t_a \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $f \circ t_{a_i} \to f$ in L^p für $i \to \infty$.

Hinweis zu (ii): Betrachten Sie zuerst $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ und nutzen Sie gleichmäßige Stetigkeit.

Aufgabe 27. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader. Sei $p \in [1, \infty)$. Sei $f \in L^p(K)$ beschränkt. (Dann ist nach ÜA25.ii $f \in L^s(K)$ für alle $s \geq p$.) Zeigen Sie,

$$\|f\|_s \to \|f\|_\infty \qquad s \to \infty.$$

Stimmt die Aussage auch für $K = \mathbb{R}^n$?

Hinweis: Zeigen Sie erst: Sei $\epsilon > 0$ und $c \in C^0(K)$. Sei $K' := \{x \in K \mid |c(x)| > \|c\|_\infty - \epsilon\}$. Dann ist $K' \subset K$ offen und es gilt

$$(\|c\|_\infty - \epsilon)(\operatorname{vol} K')^{\frac{1}{p}} \leq \|c\|_p \leq (\operatorname{vol} K)^{\frac{1}{p}} \|c\|_\infty$$[2]

Aufgabe 28. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ beschränkt mit Realisierung $f(x)$. Zeigen Sie: $\|f\|_\infty$ ist das kleinste $a \in \mathbb{R}$, für dass es eine vernachlässigbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $|f(x)| \leq a$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ gibt.

Abgabe am Mittwoch 08.12.21 bis 14 Uhr in die Briefkästen im Untergeschoss des Matheinstituts.

[1] Das heißt, es gibt ein $f : K \to \mathbb{R}$, was sowohl Realisierung eines Elementes in L^p als auch eines in L^q ist.
[2] Wir gehen hier den Weg über $C^0(K)$, da wir sonst i.A. noch nicht wüssten, was volK' sein soll.

Übungsblatt 8

Aufgabe 29. Sei $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ eine Realisierung eines Elementes in $L^2([-\pi,\pi])$. Sei $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx))$ die reelle Fourierreihe zu f und $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}kx}$ die komplexe Fourierreihe zu f.

(i) Berechenen Sie c_k in Abhängigkeit der a_k und b_k und a_k bzw. b_k in Abhängigkeit von c_k's.

(ii) Zeigen Sie: Ist f gerade bzw. ungerade, dann ist $a_k = 0$ bzw. $b_k = 0$ für alle k.

(iii) Sei f differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{i}k\hat{f}(k) = \hat{f'}(k)$ gilt. Was gilt für $\hat{f}(k)$, wenn f stetig und stückweise differenzierbar ist?

Aufgabe 30. Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, und benutzen Sie diese um zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ gilt.

Aufgabe 31. Zeigen Sie $\ell_2(\mathbb{Z}) := \{(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mid a_k \in \mathbb{C}\}$ mit $\|(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}\|_2 := \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ist ein vollständiger normierter Vektorraum, dessen Norm von einem Skalarprodukt induziert wird, ist (in kurz: ein Hilbertraum).
Hinweis: Für 'vollständig' an Fourierreihen denken.

Aufgabe 32. Wir betrachten den Raum

$$C_0([-\pi,\pi]) = \{f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}, f(-\pi) = f(\pi) = 0\}.$$

Sei $f \in C_0([-\pi,\pi])$. Wir suchen eine Reihe $\sum_{k\in K_1} a_k \cos(kx) + \sum_{k\in K_2} b_k \sin(kx)$, die f approximieren soll. Ähnlich wie die Fourierreihe, nur dieses Mal wollen wir nur $\cos(kx)$ bzw. $\sin(kx)$ zulassen, welche einzeln in $-\pi$ und π Null sind (also die gleichen Randbedingungen wie f erfüllen). Welche k sind dann noch zugelassen (also was sind K_1, K_2)?

Nehmen wir nun an, dass $f = \sum_{k\in K_1} a_k \cos(kx) + \sum_{k\in K_2} b_k \sin(kx)$ für geeignete $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ als Gleichheit in $L^2([-\pi,\pi])$ gilt. Berechnen Sie a_k, b_k in Abhängigkeit von f.

Berechnen Sie diese a_k, b_k für folgendes f:

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & x \in [0,\pi) \\ \pi + x & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

Skizzieren Sie die ersten Partialsummen von $\sum_{k\in K_1} a_k \cos(kx) + \sum_{k\in K_2} b_k \sin(kx)$ und vergleichen Sie dies mit der Fourierreihe von f aus der Vorlesung.

Abgabe am Mittwoch 15.12.21 bis 14 Uhr in die Briefkästen im Untergeschoss des Matheinstituts.

Übungsblatt 9

Aufgabe 33. Lösen Sie

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 t}u(t,x) - c^2\frac{\partial^2}{\partial^2 x}u(t,x) = 0$$

mit $t \in \mathbb{R}$, $x \in [0,L]$, c Konstante,

$$\textit{Randbedingungen:}\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \quad \text{für alle } t$$

und für $g \in C^2([0,L])$ mit $g(0) = g(L) = 0$ und $h \in C^1([0,L])$

$$\textit{Anfangsbedingungen:}\ u(0,x) = g(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(0,x) = h(x) \quad \text{für alle } x \in [0,L]$$

unter Verwendung der 'Fourierzerlegung' wie in ÜA32.

Aufgabe 34 (2.5+2.5)**.** (i) Seien $\rho_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\rho_i \geq 0$ mit $\|\rho_i\|_1 = 1$ für $i = 1,2$. Zeigen Sie, dass dann $\rho_1 * \rho_2 \geq 0$ mit $\|\rho_1 * \rho_2\|_1 = 1$ ist.

(ii) Rechnen Sie nach:

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

sofern diese Faltungen existieren.

Aufgabe 35 (2.5+2.5)**.** (i) Sei $F\colon U \subset \mathbb{R}^{n-1} \to S^{n-1}$ eine lokale Parametrisierung der S^{n-1}. Zeigen Sie, dass dann $\tilde{F}\colon U \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $(x,r) \mapsto rF(x)$ eine lokale Parametrisierung für $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist und damit

$$\int_{\tilde{F}(U\times(0,\infty))\subset\mathbb{R}^n} f\mathrm{dvol} = \int_{F(U)}\int_0^\infty f\circ(rF)\, r^{n-1}dr\mathrm{dvol}_{S^{n-1}}$$

für integrierbare f gilt. Folgern Sie daraus, dass, falls $f(x) = g(|x|)$ für ein $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(|x|)\mathrm{dvol}_x = \mathrm{vol}\, S^{n-1}\int_0^\infty g(r)r^{n-1}dr$$

(ii) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ punktweiser Limes einer Folge stetiger Funktionen $c_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sei $C, \epsilon, R > 0$. Zeigen Sie:

(a) Ist $|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha}$ f.ü. in $B_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\alpha < n$, dann ist $f \in L^1(B_\epsilon(0))$.

(b) Ist $|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha}$ f.ü. in $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\alpha > n$, dann ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus B_R(0))$.

Aufgabe 36 (1.5+3.5)**.** (i) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar und 2π-periodisch. Zeigen Sie, dass es dann ein $C > 0$ mit

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^n} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

gibt.

(ii) Sei $f \in L^2([-\pi,\pi])$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei $C, \epsilon > 0$ derart, dass

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^{n+1+\epsilon}} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

gilt. Zeigen Sie, dass f dann eine n-mal stetig differenzierbare Realisierung besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $n = 0$ und zeigen Sie, dass f_k absolut und gleichmäßig konvergent ist und der punktweise Limes von f_k damit stetig ist. Für $n \geq 1$ Analysis 1 benutzen (Vertauschen von Grenzwert und Ableitung (Ana1, Satz 4.3.11) und $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{1+\epsilon}} < \infty$ für alle $\epsilon > 0$ (Ana1, Bsp. 4.5.35)).

Abgabe am Mittwoch 22.12.21 bis 14 Uhr – Modus wie Ansage in Ihrer Übung.

Übungsblatt 10

In der Vorlesung haben wir erwähnt, dass es in der Wahrscheinlichkeitstheorie den zentralen Grenzwertsatz gibt, der besagt:
Seien X_i unabhängige[1] *und identisch verteilte*[2] *Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 \neq 0$, dann ist*

$$\mathit{Wahrscheinlichkeit}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq t\right) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Wir können diesen Satz im Moment noch nicht beweisen. Doch in den nächsten zwei Aufgaben, wollen wir uns für Zufallsvariablen, die von einer Wahrscheinlichkeitsdichte kommen, mal mit Hilfe einiger Rechnung zu der Fouriertransformierten der auftauchenden Dichten plausibel machen, dass diese Aussage stimmt:

Aufgabe 37 (1+1+1+2)**.** Sei $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h. $\rho \geq 0$ mit L^1-Norm 1. Seien $\mu = \int_{\mathbb{R}} x\rho(x)dx$ der Erwartungswert und $\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}}(x-\mu)^2\rho(x)dx$ die Varianz zu ρ. Sei die Fouriertransformierte $\hat{\rho}$ von ρ mindestens dreimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

(i) $\hat{\rho}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

(ii) $\hat{\rho}'(0) = -\frac{\mathrm{i}\mu}{\sqrt{2\pi}}$

(iii) $\hat{\rho}''(0) = -\frac{\sigma^2+\mu^2}{\sqrt{2\pi}}$.

(iv) Sei $\mu = 0$. Zeigen Sie: $\left(\sqrt{2\pi}\hat{\rho}(\frac{\xi}{\sqrt{n\sigma^2}})\right)^n \to e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ für $n \to \infty$ punktweise und auf kompakten Intervallen gleichmäßig konvergiert.

Hinweis zu (iv): Taylor für $\hat{\rho}$

Aufgabe 38 (2+1+2)**.** Sei $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h. $\rho \geq 0$ mit L^1-Norm 1. ρ sei die Dichte zu einer Zufallsvariablen X, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert in $[a, b]$ annimmt ist $\int_a^b \rho(x)dx$.

(i) Sei cX die Zufallsvariable, deren Wert in $[a, b]$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit liegt, wie der Wert von X in $[a/c, b/c]$ liegt ($c > 0$). Sei $X + c$ die Zufallsvariable, deren Wert in $[a, b]$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit liegt, wie der Wert von X in $[a-c, b-c]$ liegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten von cX und $X + c$ in Abhängigkeit von ρ.

(ii) Seien X_i, $i \in \mathbb{N}$, unabhängige Zufallsvariablen mit der gleichen Wahrscheinlichkeitsdichte ρ. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte von $\frac{(\sum_{i=1}^n X_i)-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ gleich $\rho_n(x) = \sqrt{n\sigma^2}\rho^{*n}\left(\sqrt{n\sigma^2}(x + n\mu)\right)$ ist.

(iii) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte von ρ_n aus (ii) in Abhängig von $\hat{\rho}$ und folgern Sie mit 37.iv, dass, falls $\mu = 0$ und $\hat{\rho}$ oft genug differenzierbar ist, $\widehat{\rho_n}$ auf kompakten Intervallen gegen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-\xi^2}{2}}$ konvergiert.

Modulo der Differenzierbarkeitsforderungen an $\hat{\rho}$ und dass man schauen muss, ob die Konvergenz geeignet eine inverse Fouriertransformation überlebt, hätte man so den zentralen Grenzwertsatz für Zufallsvariablen, die von Wahrscheinlichkeitsdichten kommen.

[1] Impliziert auf dem Level von Wahrscheinlichkeitsdichten, dass die Dichte zu $X_1 + X_2$ gleich der Faltung der Dichten zu X_1 und X_2 ist.

[2] Falls die Zufallsvariablen von einer Wahrscheinlichkeitsdichte kommen, bedeutet 'identisch verteilt', dass diese Dichte für alle diese Zufallsvariablen gleich ist.

Aufgabe 39. Berechnen Sie die inverse Fouriertransformation von $\frac{\sin x}{x}$ als uneigentliches Riemannintegral.
Hinweis: Eulerformel, Additionstheoreme und Fallunterscheidung

Aufgabe 40. Benutzen Sie Fouriertransformationen in x-Richtung um die Lösung von

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = u(x,t) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

mit $u(x,0) = xe^{-x^2/2}$ zu berechnen.

Abgabe am Mittwoch 19.01.21 bis 14 Uhr

Übungsblatt 11

Aufgabe 41. Sei $f\colon K \to \mathbb{R}$ für K ein Quader und $f \in L^1(K)$. Sei $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\}$. Zeigen Sie, dass $\chi_A \in L^1(K)$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie das Lipschitzkalkül für eine geeignete Folge von Lipschitz-Funktionen und den Satz zur monotonen Konvergenz.

Aufgabe 42 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)**.** Sei $f \in L^1(K)$ für K einen Quader oder $\mathbb{R}^n$. Es gelte

$$\int_K f\phi \mathrm{dvol} \geq 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(K) \text{ mit } \phi \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass dann $f(x) \geq 0$ f.ü. gilt.

Gilt die Aussage auch für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (d.h. $f\chi_{[-a,a]^n} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle a)?

Hinweis: Am liebsten würde man $\phi = \chi_A$ mit A aus Aufgabe 41 setzen – darf man aber nicht, ist so nicht in C_c^∞...

Aufgabe 43 (C_c^k-Version von Satz 2.2.5)**.** Sei $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$[1], $k \in \mathbb{N}$. Sei $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Für $\varepsilon > 0$ sei $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$. Zeigen Sie, dass $\phi_\varepsilon * f$ in C_b^k gegen $I(\phi)f$ konvergiert.

Hinweis: Fangen Sie mit $k = 0$ an (Das ist auch 95% der Arbeit). Wenn Sie $\phi_\varepsilon * f - I(\phi)f$ als Integral über y schreiben, teilen Sie den Integrationsbereich auf in $|y| < \delta$ und $|y| \geq \delta$ und verwenden für das erste Integral die gleichmäßige Stetigkeit von f.

Aufgabe 44 (2+3)**.** (i) Sei $\langle .,. \rangle$ ein komplexes Skalarprodukt auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V. Zeigen Sie, dass für alle $v \in V$ die Abbildungen

$$w \in V \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}, \quad w \in V \mapsto \langle w, v \rangle \in \mathbb{C}$$

stetig[2] sind.

(ii) Sei $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*\colon L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ die Fouriertransformation bzw. inverse Fouriertransformation wie in Satz 2.3.15. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{F}(f), g)_{L^2} = (f, \mathcal{F}^*(g))_{L^2}$ für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

Abgabe am Mittwoch 26.01.21 bis 14 Uhr

[1] D.h. f ist C^k und kompakt getragen
[2] Hier ist V mit der zum Skalarprodukt gehörigen Norm ein normierter Raum und damit insbesondere ein metrischer Raum.

Übungsblatt 12

Aufgabe 45 (Parseval für DFT)**.** Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{N-1} |y_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{y}_k|^2$.

Aufgabe 46. Rechnen Sie nach, dass der Rechenaufwand zur Berechnung der FFT (Algorithmus in der Vorlesung) $O(N \log_2 N)$ ist.

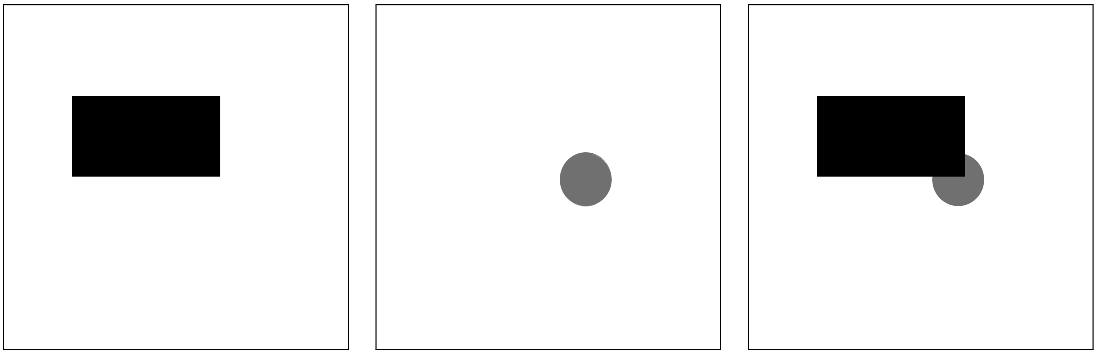
Hinweis: $N = 2^m$ - am besten den Rechenaufwand rekursiv in Abhängigkeit von m berechnen.

Aufgabe 47. Seien y_ℓ, z_ℓ, zwei komplexe Folgen der Länge N ($\ell = 0, 1, \ldots, N-1$). Wir setzen diese Folgen durch Null auf ganz $\mathbb{Z}$ fort. Sei $h_i = \sum_{j=0}^{N-1} y_{i-j} z_j$ für $i = 0, \ldots, 2N-1$. Zeigen Sie

$$\hat{h}_m = \hat{y}_m \hat{z}_m$$

Aufgabe 48. (i) Zeigen Sie, die Fouriertransformation verhält sich unter Drehungen wie folgt: Gegeben eine Drehung $A \in SO(n)$ dann gilt $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(A\xi)$ für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g = f \circ A$.

(ii) Wie sehen die DFTs von folgenden Bildern qualitativ aus?



Hierbei steht weiß für den Wert 122, schwarz für -122 und grau für 0.