Übungsblatt 1

Übungsaufgabe 1. Sei $\pi\colon E \to M$ ein Faserbündel mit Fasertyp F. Für $x \in M$ definieren wir $E_x := \pi^{-1}(x)$.

(i) Ist E_x eine Untermannigfaltigkeit von E?*

(ii) Ist $T\nu E := \sqcup_{e\in E} T_e(E_{\pi(e)}) \to M$, $v \in T_e(E_{\pi(e)}) \mapsto \pi(e) \in M$, ein Faserbündel?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Übungsaufgabe 2. Sei $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von M und seien $\mu_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}(F)$ glatte Abbildungen, die die Kozykelbedingung erfüllen. Wir setzen

$$E := \sqcup_\alpha U_\alpha \times F/\sim \xrightarrow{\pi} M,\ [(x,v)] \mapsto x,$$

wobei $(x,v) \in U_\alpha \times F \sim (y,w) \in U_\beta \times F$ genau dann gilt, wenn $x = y$ und $\mu_{\beta\alpha}(x)v = w$ ist, sowie $\phi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$, $[(x,v) \in U_\alpha \times F] \mapsto (x,v)$. Zeigen Sie, dass E ein Faserbündel definiert.

Übungsaufgabe 3. Sei $\pi\colon E \to M$ ein Vektorbündel vom Rang r über $\mathbb{K}$ mit gegebener Trivialisierung $\phi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{K}^r$. Wir betrachten die Übergangsfunktionen $\mu_{\beta\alpha}(x)(v) := \mathrm{pr}_2 \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x,v)$ mit $\mu_{\beta\alpha}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Diff}(\mathbb{K}^r)$. Da $\pi\colon E \to M$ aber nicht nur ein Faserbündel sondern ein Vektorbündel ist, ist der Bildbereich von $\mu_{\alpha\beta}$ in Wirklichkeit viel kleiner. Finden Sie (mit Beweis) $B \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{K}^r)$ derart, dass die Übergangsfunktionen eines jeden Vektorbündels vom Rang r über $\mathbb{K}$ dahin abbilden und das gilt:

Seien $\mu_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to B$ glatte Abbildungen, die die Kozykelbedingung erfüllen. Dann gibt es (bis auf Isomorphie (hier jetzt immer Isomorphie von Vektorbündeln)) ein eindeutiges Vektorbündel über $\mathbb{K}$, welches diese $\mu_{\alpha\beta}$ als Übergangsfunktionen hat.

*Eine Teilmenge $N \subset M$ einer Mannigfaltigkeit ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, falls es um jeden Punkt $p \in N$ eine Karte $\kappa\colon U \subset M \to \mathbb{R}^m$ mit $\kappa(U \cap N) = \mathbb{R}^n \times \{0 \in \mathbb{R}^{m-n}\}$ gibt. Äquivalente Definition: Um jeden Punkt $p \in N$ gibt es eine Umgebung $U \subset M$ und eine glatte Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^{m-n}$, so dass $0 \in \mathbb{R}^{m-n}$ regulärer Wert von f und $f^{-1}(0) = N \cap U$ ist. (Die Äquivalenz zeigt man ganz analog zum Fall von Untermannigfaltigkeiten im euklidischen Raum, vgl. DiffgeoI, Satz I.1.4.)