# Übungsblatt 2

**Übungsaufgabe 4.**

(i) Zeigen Sie, dass $TS^1$ das triviale Faserbündel über $S^1$ mit Fasertyp $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Sei $\epsilon$ das triviale Faserbündel über $S^n$ mit Fasertyp $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $TS^n \oplus \epsilon$ das triviale Faserbündel über $S^n$ mit Fasertyp $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

(iii) Sei $\pi\colon E \to S^1$ das Möbiusband und $f\colon z \in S^1 \subset \mathbb{C} \mapsto z^k \in S^1$. Zeigen Sie, dass $f^*E$ genau dann trivial ist, wenn $k$ gerade ist.

**Übungsaufgabe 5.** Sei $E \to M \times [0,1]$ ein Faserbündel mit Fasertyp $F$. Zeigen Sie, dass es eine abzählbare offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von $M$ gibt, so dass alle Einschränkungen $E|_{U_i\times[0,1]}$ trivial sind.*

**Übungsaufgabe 6.** Sei $E \to M \times [0,1]$ ein Faserbündel mit Fasertyp $F$ über $M$ ohne Rand. Sei $U_i$ wie in Aufgabe 5(ii) und $\phi_i$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Setze $\psi_i = \sum_{j\leq i} \phi_j$. Sei $E_i{:=}E|_{\Gamma_i}$ mit $\Gamma_i{:=}\{(x,\psi_i(x)) \mid x \in M\} \subset M \times [0,1]$.

(i) Skizzieren Sie für das Beispiel $M = [0,1]$†, $U_1 = [0,2/3)$, $U_2 = (1/3,1]$ eine Wahl einer untergeordneten Zerlegung der Eins und die resultierenden Mengen $\Gamma_i$.

(ii) Konstruieren Sie einen Faserbündelisomorphismus $h_i\colon E_i \to E_{i-1}$ über $(x,\psi_i(x)) \in \Gamma_i \to (x,\psi_{i-1}(x)) \in \Gamma_{i-1}$.

Hinweis:

(iii) Konstruieren Sie aus obigen $h_i$ einen Bündelisomorphismus von $E|_{M\times\{0\}}$ und $E|_{M\times\{1\}}$.

*Unsere Mannigfaltigkeiten haben immer eine abzählbare Basis. Daraus folgt insbesondere, dass sie *Lindelöf-Räume* sind, d.h. dass jede offene Überdeckung eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung besitzt.

†Hier ist $M$ zwar mit Rand, aber dadurch zeichnet es sich leichter.