Differentialgeometrie II — Nadine Große, Jonah Reuß, SS24

Übungsblatt 3

Übungsaufgabe 7.

(i) Sei $\pi\colon E \to M$ ein Geradenbündel (=Vektorbündel vom Rang 1). Zeigen Sie, dass $\mathrm{End}(E) \to M$ ein triviales Bündel ist.

(ii) Es gilt $\mathrm{Hom}(E, E' \oplus E'') \cong \mathrm{Hom}(E, E') \oplus \mathrm{Hom}(E, E'')$ für Vektorbündel E, E', E'' über M.

(iii) Zeigen Sie, dass $T\mathbb{R}P^n \oplus \epsilon \cong \underbrace{\tau \oplus \ldots \oplus \tau}_{(n+1)\text{-mal}}$ gilt, wobei ϵ das triviale Bündel und τ das tautologische Geradenbündel über $\mathbb{R}P^n$ ist.

Übungsaufgabe 8 (Konstruktion von Vektorbündeln über Sphären)**.** Seien $U_\pm$ offene zusammenziehbare Mengen, die S^m überdecken und $U_+ \cap U_- = S^{m-1} \times (-\epsilon, \epsilon) \subset S^m$.
Sei eine glatte Funktion $\mu_{+-}\colon S^{m-1} \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{Gl}_r(\mathbb{K})$ gegeben.

(i) Definiert μ_{+-} ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel $\pi\colon E \to S^m$? Wie und warum?

Weiterhin liefert jede glatte Abbildung $f\colon S^{m-1} \to \mathrm{Gl}_r(\mathbb{K})$ mit $\mu_{+-}(x,t) := f(x)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel. Nach der Vektorbündelversion von Folgerung 1.2.8 führen homotope $f\colon S^{m-1} \to \mathrm{Gl}_r(\mathbb{K})$ zu isomorphen $\mathbb{K}$-Vektorbündeln. Wir haben also eine wohldefinierte Abbildung

$$\Phi\colon [S^{m-1}, \mathrm{Gl}_r(\mathbb{K})]^{*} \to \mathrm{Vect}^r_{\mathbb{K}}(S^m)^{\dagger}.$$

Solche Funktionen f werden *Clutching-Funktionen* genannt.

(ii) Zeigen Sie, dass Φ surjektiv ist, d.h. sie müssen zeigen, dass ein beliebiges μ_{+-} zu einem aus einer Abbildung $f\colon S^m \to \mathrm{Gl}_r(\mathbb{K})$ wie oben entstandenen μ_{+-} (glatt) homotop ist.

(iii) Zeigen Sie: Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann ist Φ eine Bijektion.

Hinweis:

(iv) Stimmt (iii) auch für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

* $[X, Y]$ bezeichnet die Menge der (glatten) Homotopieklassen von Funktionen $X \to Y$

† $\mathrm{Vect}^r_{\mathbb{K}}(S^m)$ ist die Menge der Vektorbündel über S^m mit Faser $\mathbb{K}^r$.

Übungsaufgabe 9. Sei $\mathbb{K}$ gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei $\pi\colon E \to M$ ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel vom Rang r mit M kompakt.

(i) Zeigen Sie, dass es eine glatte Abbildung $g\colon E \to \mathbb{K}^m$ für ein $r \leq m < \infty$, so dass es für alle $x \in M$ die Einschränkung $g|_{E_x}$ injektiv und linear ist.

Hinweis:

Sei $G_r(\mathbb{K}^m) = \{r\text{-dimensionale Untervektorräume von } \mathbb{K}^m\}$ eine Grassmann-Mannigfaltigkeit.*
Dann ist $G_1(\mathbb{K}^m) = \mathbb{K}P^{m-1}$, für welches wir in Beispiel 1.2(iii) das tautologische Geradenbündel τ kennengelernt haben. Analog kann man das tautologische Bündel über $G_r(\mathbb{K}^m)$ definieren:

$$\gamma_r^m := \{(\ell, v) \in G_r(\mathbb{K}^m) \times \mathbb{K}^m \mid v \in \ell\} \to G_r(\mathbb{K}^m), \quad (\ell, v) \mapsto \ell.$$

Das ist ein Vektorbündel vom Rang r - insbesondere ein Unterbündel von trivialen Faserbündel $G_r(\mathbb{K}^m) \times \mathbb{K}^m \to G_r(\mathbb{K}^m)$. Weiterhin ist $q\colon (\ell, v) \in \gamma_r^m \mapsto v \in \mathbb{K}^m$ ein g wie aus (i).

(ii) Zeigen Sie: Gibt es einen Vektorbündelmorphismus $u\colon E \to \gamma_r^m$, der ein Isomorphismus auf den Fasern ist, dann ist qu ein g wie aus (i). Ist andersherum ein $g\colon E \to \mathbb{K}^m$ wie in (i) gegeben, dann gibt es einen Vektorbündelmorphismus $u\colon E \to \gamma_r^m$, der ein Isomorphismus auf den Fasern ist und für den $g = qu$ gilt.

(iiii) Folgern Sie, dass es für jedes $\mathbb{K}$-Vektorbündel $\pi\colon E \to M$ vom Rang r ein m groß genug und eine glatte Abbildung $f\colon M \to G_r(\mathbb{K}^m)$ gibt, so dass $f^*\gamma_r^m \cong E$ gilt.

Zu (iii) - Warum ist das toll? Das ist ein wichtiges Resultat in der Differentialtopologie zur Klassifikation von Vektorbündeln. Es sagt, dass jedes Vektorbündel als Pullback von diesen tautologischen Vektorbündeln mit geeignetem m aufgefasst werden kann. Man kann sich überlegen, dass man Einbettungen $G_r(\mathbb{K}^m) \hookrightarrow G_r(\mathbb{K}^{m+1}) \hookrightarrow G_r(\mathbb{K}^{m+2}) \hookrightarrow \dots$ hat und $\gamma_r^{m+1}|_{G_r(\mathbb{K}^m)} \cong \gamma_r^m$ gilt. Damit kann man den direkten Limes der Grassmannschen $G_r(\mathbb{K}^m)$ und der Bündel γ_r^m für $m \to \infty$ bilden und erhält ein *universelles Bündel* $\gamma_r^\infty \to G_r(\mathbb{K}^\infty)$. Das ist nicht mehr ein Vektorbündel in unserem Sinne, da die Räume keine Mannigfaltigkeiten mehr sind, aber ansonsten verhält es sich ähnlich. Es heißt universell, weil nun (durch 'Weglassen' der Dimensionseinschränkung) jedes Vektorbündel als Pullback dieses universellen Bündels dargestellt werden kann.

*Man kann $G_r(\mathbb{K}^m)$ auch als Teilmenge von $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$ verstehen, nämlich $G_r(\mathbb{K}^m) = \{P \in \mathfrak{gl}(r, \mathbb{K}) \mid P^2 = P, P^T = P, \mathrm{Spur}(P) = k\}(= \{P \text{ ist Orthogonalprojektion auf einen } k \text{ dimensionalen Untervektorraum}\})$. Dann ist $G_r(\mathbb{K}^m)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathfrak{gl}(r, \mathbb{K})$ der Dimension $r(m - r)$.