Differentialgeometrie II

Ksenia Fedosova, Nadine Große
SS20

Übungsblatt 4

Übungsaufgabe 10. Zeigen Sie, dass es für jeden skalare Differentialoperator $P\colon C^\infty(M,\mathbb{R})$ erster Ordnung ein eindeutiges Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ und eine Funktion $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ gibt, so dass $Pu = X(u) + fu$ für alle $u \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ gilt.

Übungsaufgabe 11 (3+2)**.** Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel über M mit metrischem Zusammenhang ∇^E (bzgl. einer Bündelmetrik h^E). Auf E^* erhält man einen Zusammenhang mittels

$$X(\omega(s)) = (\nabla^{E^*}_X \omega)(s) + \omega(\nabla^E_X s)$$

für alle $\omega \in \Gamma(E^*)$, $s \in \Gamma(E)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$.

(i) Zeigen Sie, dass ∇^{E^*} bzgl. der Bündelmetrik h^{E^*} aus Lemma 1.2.27 metrisch ist.

(ii) Sei g eine Riemannsche Metrik auf M, $E = TM$ und ∇^E der Levi-Civita-Zusammenhang auf (M,g). Berechnen Sie die lokale Darstellung von ∇^{E^*}.

Übungsaufgabe 12. Sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel über M mit affinem Zusammenhang ∇^E. Auf $\Lambda^k E^*$ erhält man einen Zusammenhang mittels

$$X(\omega(s)) = (\nabla^{E^*}_X \omega)(s) + \omega(\nabla^E_X s) \quad \text{und}$$
$$\nabla^{\Lambda^{k+\ell}E^*}_X(\alpha \wedge \beta) = \left(\nabla^{\Lambda^k E^*}_X \alpha\right) \wedge \beta + \alpha \wedge \left(\nabla^{\Lambda^\ell E^*}_X \beta\right)$$

für alle $\omega \in \Gamma(E^*)$, $s \in \Gamma(E)$, $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k E^*)$, $\beta \in \Gamma(\Lambda^\ell E^*)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Zeigen Sie, dass

$$\left(\nabla^{\Lambda^k E^*}_X \alpha\right)(s_1, \ldots, s_k) = X(\alpha(s_1, \ldots, s_k)) - \sum_{j=1}^{k} \alpha(s_1, \ldots, s_{j-1}, \nabla^E_X s_j, s_{j+1}, \ldots, s_k)$$

für alle $s_i \in \Gamma(E)$, $\alpha \in \Gamma(\Lambda^k E^*)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt.

Abgabe bis Dienstag 09.06.20 15 Uhr per Mail an Frau Fedosova.