Differentialgeometrie II

Nadine Große, Jonah Reuß
SS24

Übungsblatt 5

Übungsaufgabe 13 (1/2+1+1/2+1+2)**.** Sei (M^m, g) eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir definieren den Hodge-Stern $*\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{m-k}(M)$ durch $\alpha \wedge *\beta = g(\alpha, \beta)\mathrm{dvol}_g$.

(i) Warum ist $*$ wohldefiniert?

(ii) Sei e_i^* eine positiv orientierte* Orthonormalbasis von T_x^*M. Berechnen Sie $*(e_1^* \wedge \ldots \wedge e_k^*)$ for $1 \leq k \leq m$.

(iii) Zeigen Sie, dass $**\alpha = (-1)^{k(m-k)}\alpha$ für alle $\alpha \in \Omega^k(M)$ gilt.

(iv) Zeigen Sie, dass $g(\alpha, \beta) = g(*\alpha, *\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$ gilt.

(v) Zeigen Sie, dass $\delta = (-1)^{km-1} * d*$ gilt. (Benutzen Sie, dass $\int_M d\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \Omega_c^{m+1}(M) := \Gamma_c(\Lambda^{m+1}M)$ gilt (Satz von Stokes))

Übungsaufgabe 14. (1+1+3) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei e_i ein lokaler orthonormaler Rahmen von TM über $U \subset M$. Sei θ^i der zugehörige duale Rahmen, d.h. $\theta^i \in \Omega^1(U)$ und $\theta^i(e_j) = \delta^i_j$. Ziel dieser Aufgabe ist es nachzurechnen, dass auf U gilt

$$\begin{aligned} d &= \theta^i \wedge \nabla_{e_i} && (1) \\ \delta &= -\iota_{e_i}\nabla_{e_i}, && (2) \end{aligned}$$

wobei $\iota_X\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$, $\alpha \mapsto \alpha(X, \ldots)$, für ein $X \in \mathfrak{X}(M)$ das innere Produkt ist.

(i) Zeigen Sie, dass die beiden Formeln unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis ist.

Nach (i) können wir die Formeln auch für eine spezielle Orthonormalbasis in jedem Punkt $p \in U$ extra nachrechnen. Dazu wählen wir geodätische Normalkoordinaten x^i um $p \in U$ mit $\partial_i|_p = e_i(p)$, vgl. DGI Def. II.7.4 und darunter.

(ii) Zeigen Sie, dass dann $\nabla_{e_i}\theta^j(p) = 0$ gilt.

(iiii) Rechnen Sie die obigen Formeln für d und δ nach.

*d.h. $\mathrm{dvol}_g = e_1^* \wedge \ldots \wedge e_m^*$, vgl. DGI Lemma II.10.26